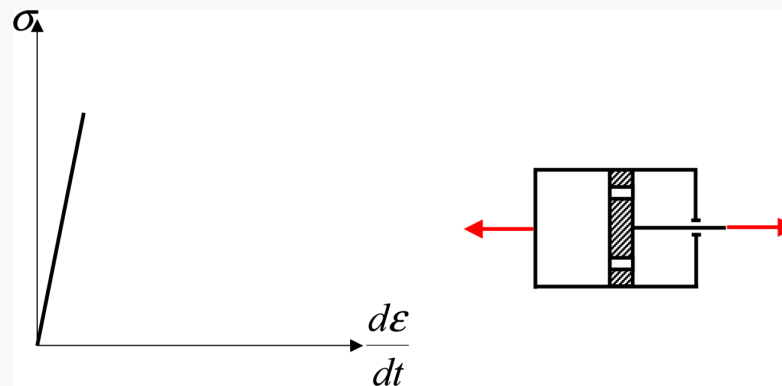
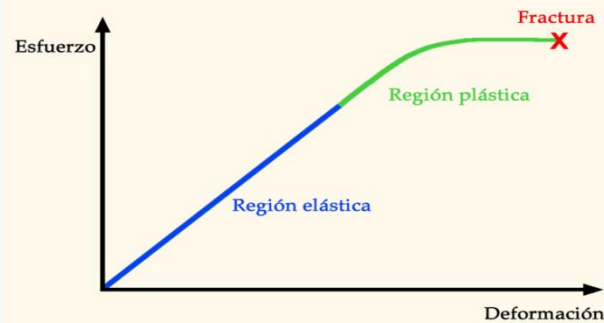


## Wykład 8: Lepko-sprężyste odkształcenia ciał

Leszek CHODOR dr inż. bud, inż.arch.

leszek@chodor.pl

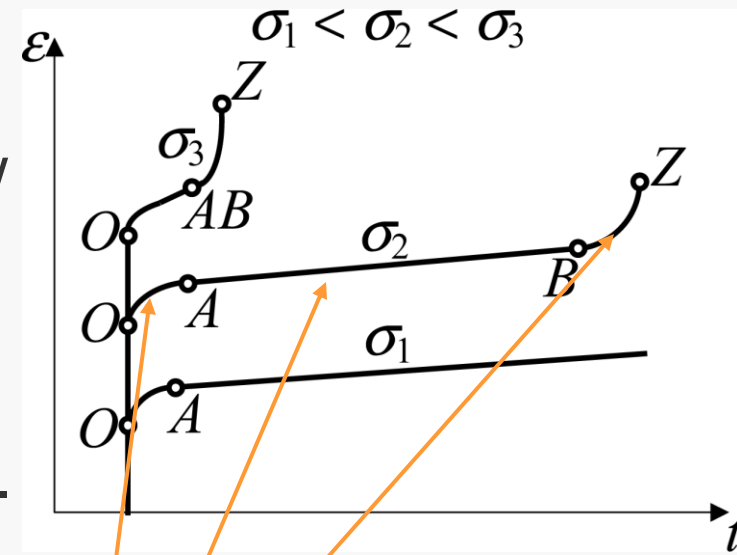


Literatura:

- [1] Piechnik St., *Wytrzymałość materiałów dla wydziałów budowlanych*, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [2] Biegus A., *Nośność graniczna prętowych konstrukcji stalowych*, PWN, Warszawa-Wrocław 1997
- [3] Kisiel I, *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1967
- [4] Chrzanowski M., Latus P. : *Reologia ciał stałych* ., [publikacja internetowa. <http://www.limba.wil.pk.edu.pl/~mc/reologia/>]

**Reologia** jest to mechanika ciała odkształcalnego, która uwzględnia wpływ czasu na związki między naprężeniami a odkształceniami. Do podstawowych zagadnień reologicznych zaliczamy: **pełzanie materiałów, relaksację naprężeń**. **Pełzaniem materiału** nazywa się wzrost odkształceń trwałych pod wpływem działania stałego obciążenia w stałej temperaturze, zależny od czasu działania tego obciążenia.

Przykład dla polimerów oraz ołowiu zjawisko pełzania zachodzi w temperaturze pokojowej, a dla stali w temperaturach wyższych od 300°C. Badania doświadczalne polegają na rejestracji zmian odkształcenia  $\epsilon$  w funkcji czasu  $t$  w stałej temperaturze dla próbek poddanych określonemu obciążeniu



Na wykresie pełzania wyróżniamy trzy części:  
 $OA$  – pełzanie nieustalone,  
 $AB$  – pełzanie ustalone,  
 $BZ$  – przy dostatecznie dużym (stałym) naprężeniu, następuje gwałtowny wzrost odkształceń, który kończy się zniszczeniem próbki.

**Granica pełzania**  $R_{a(t)^{\circ}C}$  jest to naprężenie, które po upływie czasu  $t$  w godzinach, w stałej temperaturze [ $^{\circ}C$ ], spowoduje trwałe wydłużenie a próbki w procentach.

**Wytrzymałość na pełzanie**  $R_{z(t)^{\circ}C}$  jest to naprężenie, które po upływie czasu  $t$  w godzinach, w stałej temperaturze [ $^{\circ}C$ ], spowoduje zerwanie próbki.

Całkowite odkształcenie  $\epsilon = \epsilon_o + \epsilon_{p1} + \epsilon_{p2}$

$\epsilon_o$  – odkształcenie wywołane przyłożeniem obciążenia

$\epsilon_{p1}$  – odkształcenie wywołane pełzaniem nieustalonym,

$\epsilon_{p2}$  – odkształcenie wywołane pełzaniem ustalonym.

$E_t$  – współczynnik sprężystości podłużnej materiału w danej temperaturze.

$$\epsilon_o = \frac{\sigma}{E_t}$$

prędkość odkształcenia ustalonego opisuje zależność:

$$\dot{\epsilon}_{p2} = B \sigma^n \quad B, n - \text{stałe zależne od rodzaju materiału i temperatury.}$$

Jeśli pominie się wpływ odkształcenia wywołanego odkształceniem nieustalonym to warunek na dopuszczalne odkształcenie  $\varepsilon_{dop}$  po upływie  $t_d$  godzin stałego naprężenia  $\sigma$  w stałej temperaturze ma postać:

$$\frac{\sigma}{E_t} + B\sigma^n t_d \leq \varepsilon_{dop}$$

Po wstawieniu do powyższego wyrażenia  $\sigma = k_{r_{pelz}}$  otrzymuje się tzw. równanie naprężenia dopuszczalnego przy pełzaniu:

$$\varepsilon_{dop} = \frac{k_{r_{pelz}}}{E_t} + Bk_{r_{pelz}}^n t_d$$

Z równania tego można wyznaczyć naprężenie dopuszczalne przy pełzaniu  $k_{r_{pelz}}$ .

Kryterium wytrzymałości na pełzanie ma postać:

$$\frac{R_{z(t)^o C}}{n} \geq \sigma$$

$n$  – współczynnik bezpieczeństwa.

Jeśli pominie się wpływ odkształcenia wywołanego odkształceniem nieustalonym to warunek na dopuszczalne odkształcenie  $\varepsilon_{dop}$  po upływie  $t_d$  godzin stałego naprężenia  $\sigma$  w stałej temperaturze ma postać:

$$\frac{\sigma}{E_t} + B\sigma^n t_d \leq \varepsilon_{dop}$$

Po wstawieniu do powyższego wyrażenia  $\sigma = k_{r_{pelz}}$  otrzymuje się tzw. równanie naprężenia dopuszczalnego przy pełzaniu:

$$\varepsilon_{dop} = \frac{k_{r_{pelz}}}{E_t} + Bk_{r_{pelz}}^n t_d$$

Z równania tego można wyznaczyć naprężenie dopuszczalne przy pełzaniu  $k_{r_{pelz}}$ .

Kryterium wytrzymałości na pełzanie ma postać:

$$\frac{R_{z(t)^o C}}{n} \geq \sigma$$

$n$  – współczynnik bezpieczeństwa.

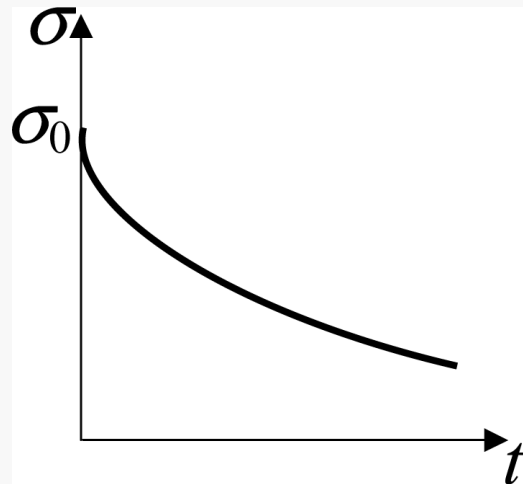
*Relaksacja naprężeń* jest zjawiskiem wtórnym, wynikającym z pełzania materiału, polegającym na zmniejszeniu się naprężeń w przecie poddanym długotrwałemu odkształceniu o stałej wartości.

Jeśli w wyrażeniu na całkowite odkształcenie  $\varepsilon = \varepsilon_o + \varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}$

przyjmiemy, że:  $\varepsilon = const$ ,  $\varepsilon_o = \frac{\sigma}{E}$  oraz  $\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2} = \varepsilon_p$ , to otrzymamy równanie w postaci:

$$\frac{\sigma}{E_t} + \varepsilon_p = const$$

Z zależności tej wynika, że wobec wzrostu  $\varepsilon_p$  w miarę upływu czasu  $t$ , przy stałej wartości  $E_t$ , naprężenie musi maleć:



Po zrózniczkowaniu równania  $\frac{\sigma}{E_t} + \varepsilon_p = const$  względem czasu i uwzględnieniu związku  $\dot{\varepsilon}_{p2} = B\sigma^n$  (przy  $\varepsilon_{p2} = \varepsilon_p$ ) otrzymujemy różniczkowe równanie relaksacji naprężeń:

$$dt = \frac{-1}{BE_t} \frac{d\sigma}{\sigma^n}$$

Po scałkowaniu równanie to będzie miało postać:  $t = \frac{-1}{BE_t} \frac{\sigma^{1-n}}{1-n} + C$

A po uwzględnieniu warunku początkowego  $t = 0 \rightarrow \sigma = \sigma_0$ :

$$t = \frac{1}{(1-n)BE_t} \left( \frac{1}{\sigma^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \right)$$

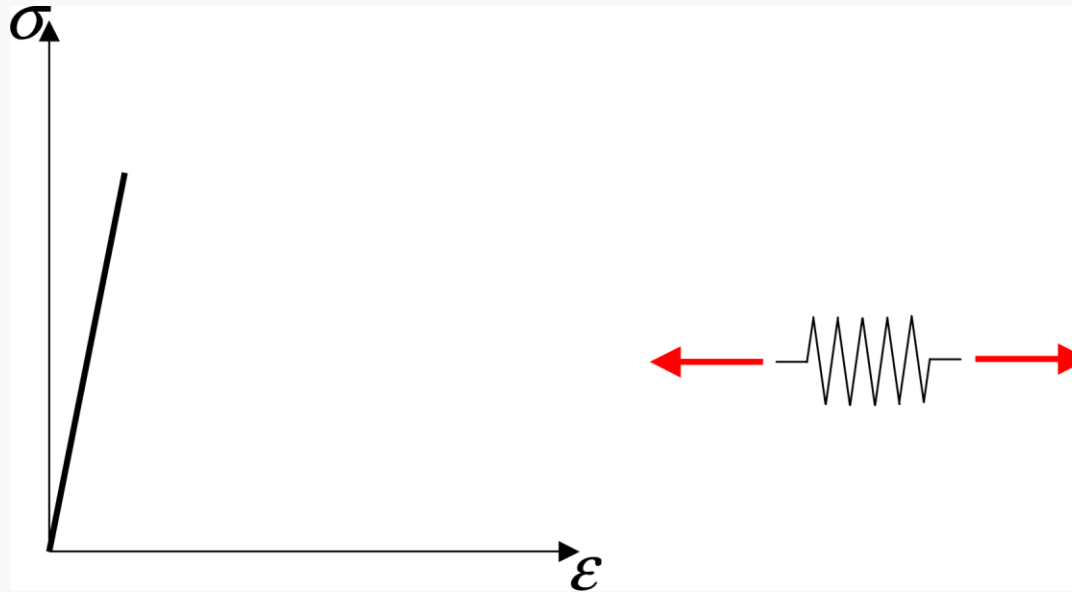
W istocie myślą przewodnią reologii jest, że własności mechaniczne ciał rzeczywistych są wynikiem udziału poszczególnych modeli prostych w ogólnym zachowaniu się materiałów.

Reologia zajmuje się więc budowaniem związków konstytutywnych (równań fizycznych) podających zależności pomiędzy lokalnymi zmiennymi stanu dla różnych ciał. Ogólnie, równania te mają postać równań całkowych, które w szczególnych przypadkach można sprowadzić do równań różniczkowych.



Reologia definiuje trzy podstawowe modele ciał odkształcalnych:

1. *Ciało Hooke'a* (ciało liniowo sprężyste), dla którego zachodzi liniowy związek między naprężeniem  $\sigma$  a odkształceniem  $\varepsilon$ :



Modelem mechanicznym takiego ciała jest sprężyna, której wydłużenie jest proporcjonalne do siły rozciągającej.

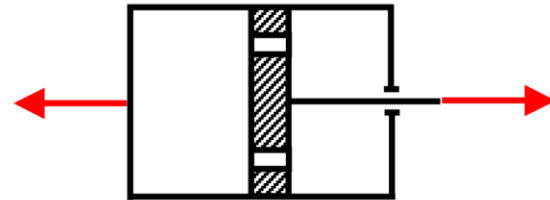
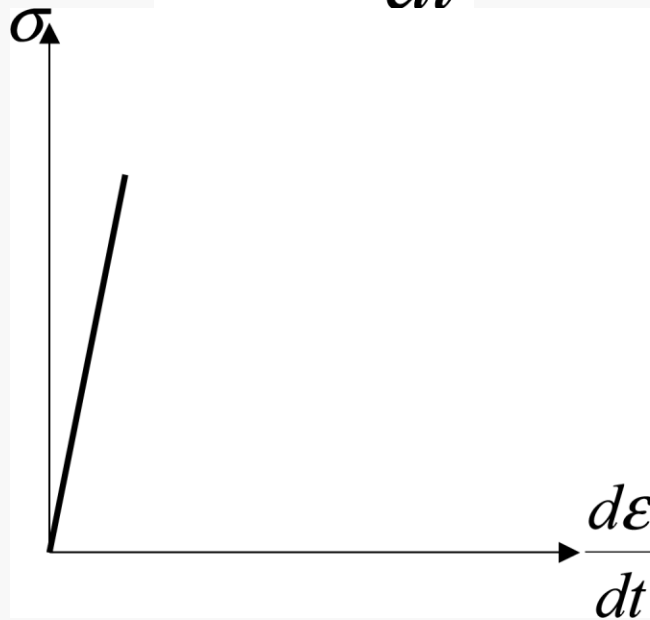


2. *Ciało Newtona* (ciało lepkie), dla którego zachodzi liniowy związek między naprężeniem  $\sigma$  a prędkością odkształcenia  $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ :

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt}$$

gdzie:

$\eta$  – stała lepkości



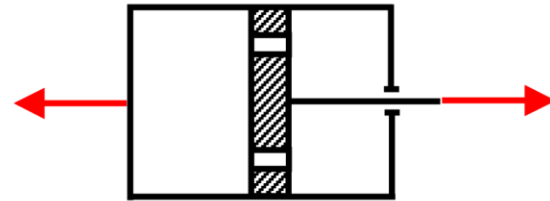
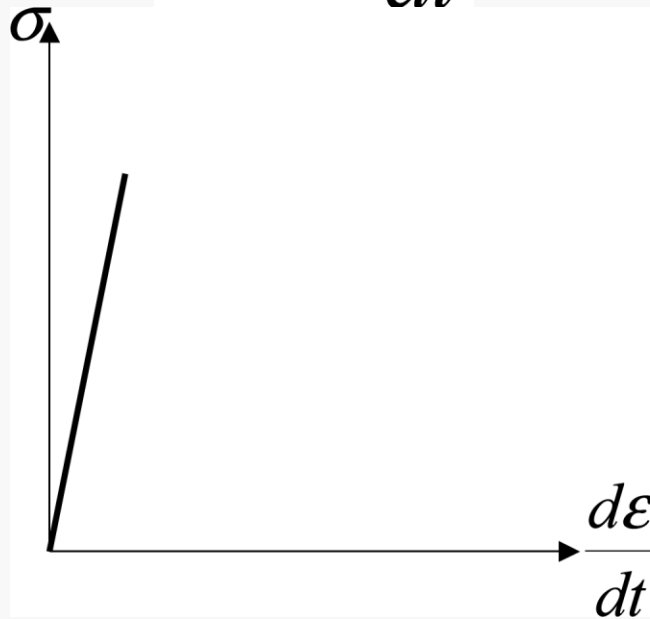
Modelem mechanicznym takiego ciała jest tłumik olejowy, czyli tłoczek z otworkami, przemieszczający się w cylindrze wypełnionym olejem.

2. *Ciało Newtona* (ciało lepkie), dla którego zachodzi liniowy związek między naprężeniem  $\sigma$  a prędkością odkształcenia  $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ :

$$\sigma = \eta \frac{d\epsilon}{dt}$$

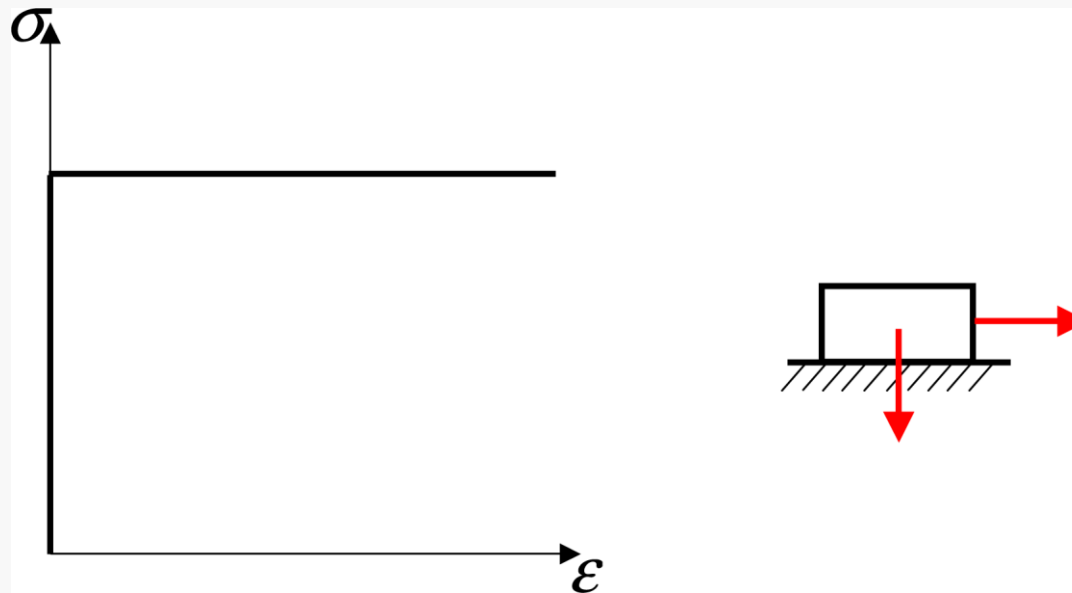
gdzie:

$\eta$  – stała lepkości



Modelem mechanicznym takiego ciała jest tłumik olejowy, czyli tłoczek z otworkami, przemieszczający się w cylindrze wypełnionym olejem.

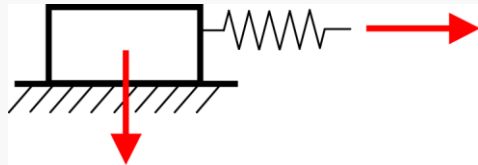
3. *Ciało de Saint-Venanta* (ciało sztywno-plastyczne), które dla  $\sigma < R_e$  nie ulega odkształceniu (ciała sztywne), a przy  $\sigma = R_e$  odkształcenia trwałe rosną nieograniczenie (ciało idealnie plastyczne).



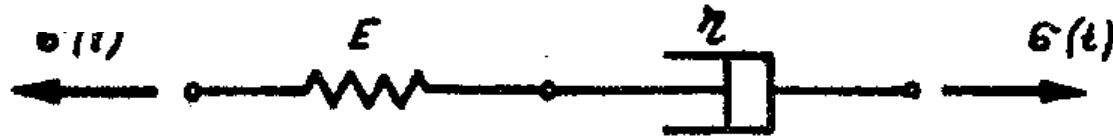
Modelem mechanicznym takiego ciała jest ważki przedmiot przesuwany po płaszczyźnie z udziałem tarcia suchego.

## Reologiczne modele podstawowe {3}

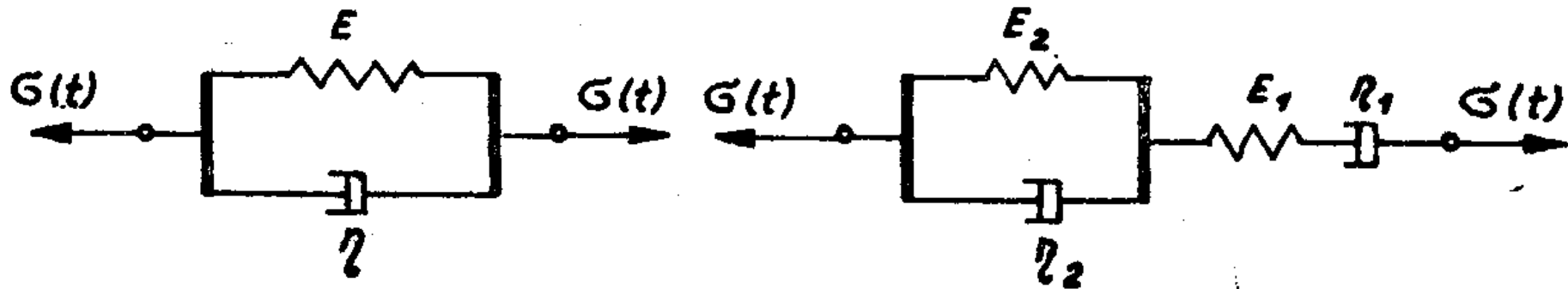
Modele ciał odkształcalnych tworzy się z kombinacji trzech prostych modeli reologicznych modeli prostych.



Model Prandtla (sprężysto-plastyczny)



Model Maxwella (sprężysto-lepki szeregowy)



Model Kelvina-Voighta  
(sprężysto-lepki równoległy)

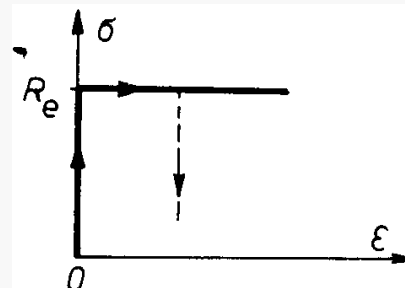
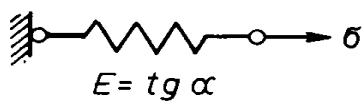
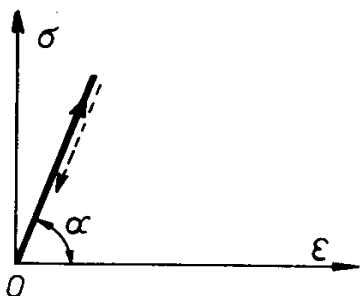
Model Burgersa  
(sprężysto-lepki szeregowo i równoległy)

Model dowolnie złożony

$$\sum_{r=0}^m q_r \frac{d^r \epsilon}{dt^r} = \sum_{r=0}^n p_r \frac{d^r \sigma}{dt^r}, \quad p_r, q_r \text{ -współczynniki modeli}$$

## Zestawienie modeli materiałów {1}

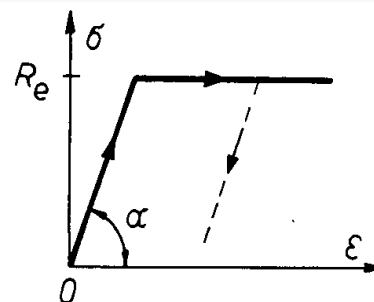
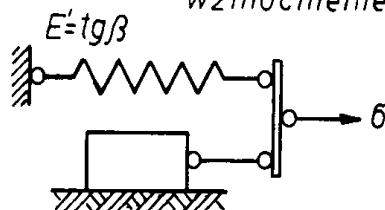
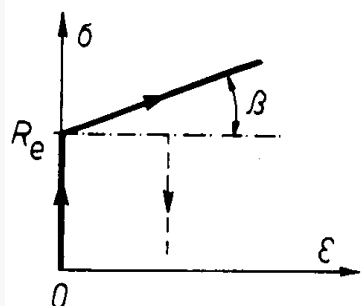
model liniowo – sprężysty



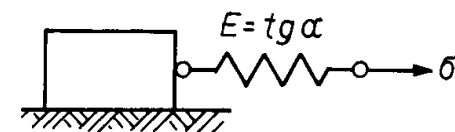
model sztywno – plastyczny



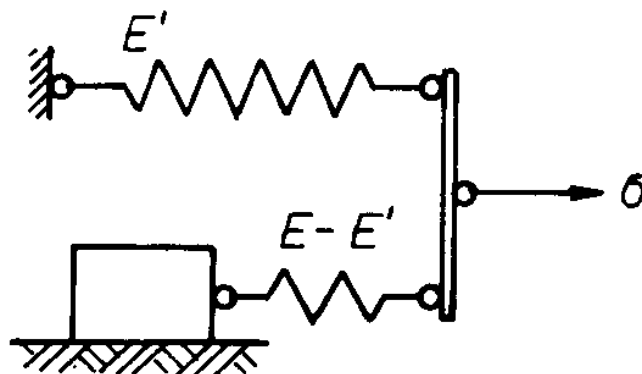
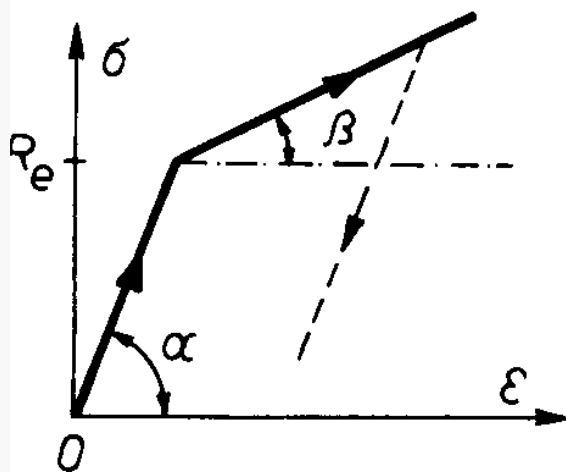
model sztywno – plastyczny ze  
wzmocnieniem



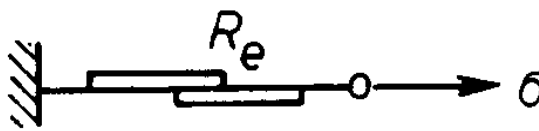
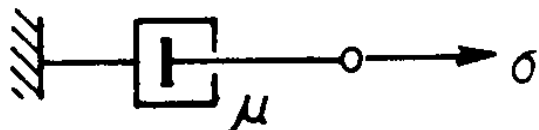
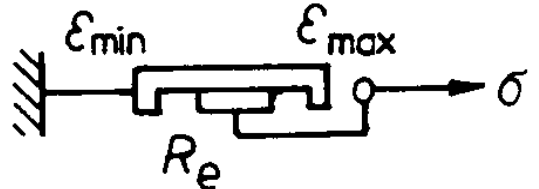
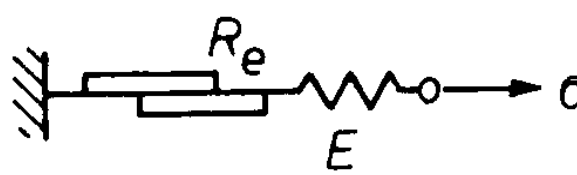
model sprężysto – plastyczny



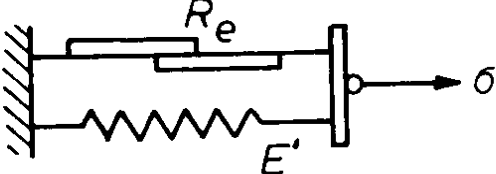
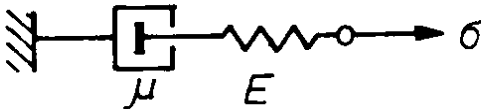
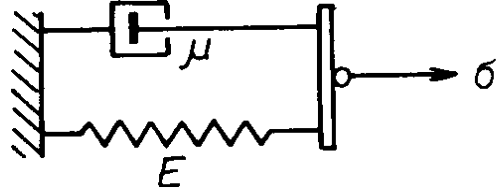
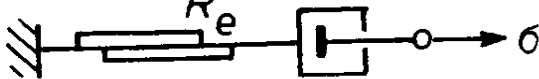
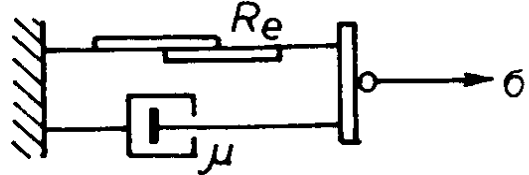
model sprężysto – plastyczny ze  
wzmocnieniem



# Zestawienie modeli materiałów {2}

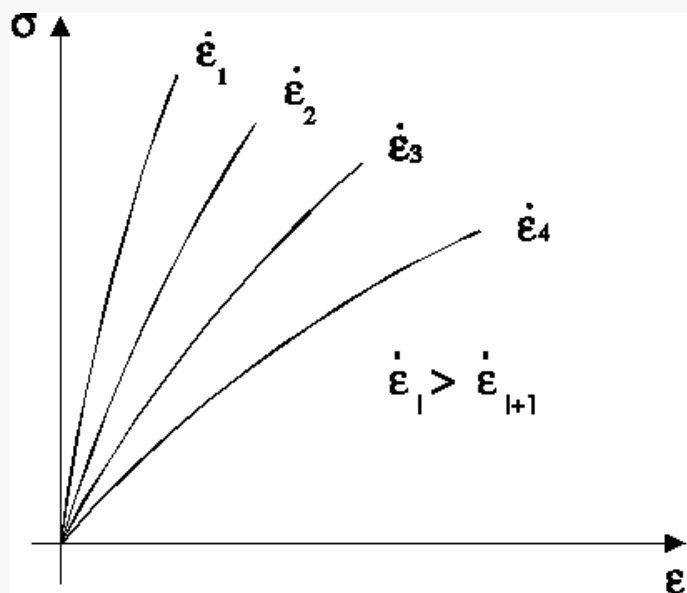
| Lp. | Nazwa modelu               | Schemat modelu                                                                       | Opis modelu                                                                                                 |
|-----|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Sprężysty (Hooke'a)        |    | $\sigma = E\varepsilon$                                                                                     |
| 2   | Plastyczny (Saint-Venanta) |    | $\varepsilon = 0$ dla $\sigma < R_e$<br>$\varepsilon \geq 0$ dla $\sigma = R_e$                             |
| 3   | Lepki (Newtona)            |    | $\sigma = \mu \dot{\varepsilon}$                                                                            |
| 4   | Plastyczny z ograniczeniem |   | $\varepsilon \neq 0$ dla $\sigma > R_e$<br>$\varepsilon_{\max} > (\varepsilon \neq 0) > \varepsilon_{\min}$ |
| 5   | Sprężysto-plastyczny       |  | $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ dla $\sigma < R_e$<br>$\varepsilon \geq 0$ dla $\sigma = R_e$              |

## Zestawienie modeli materiałów {3}

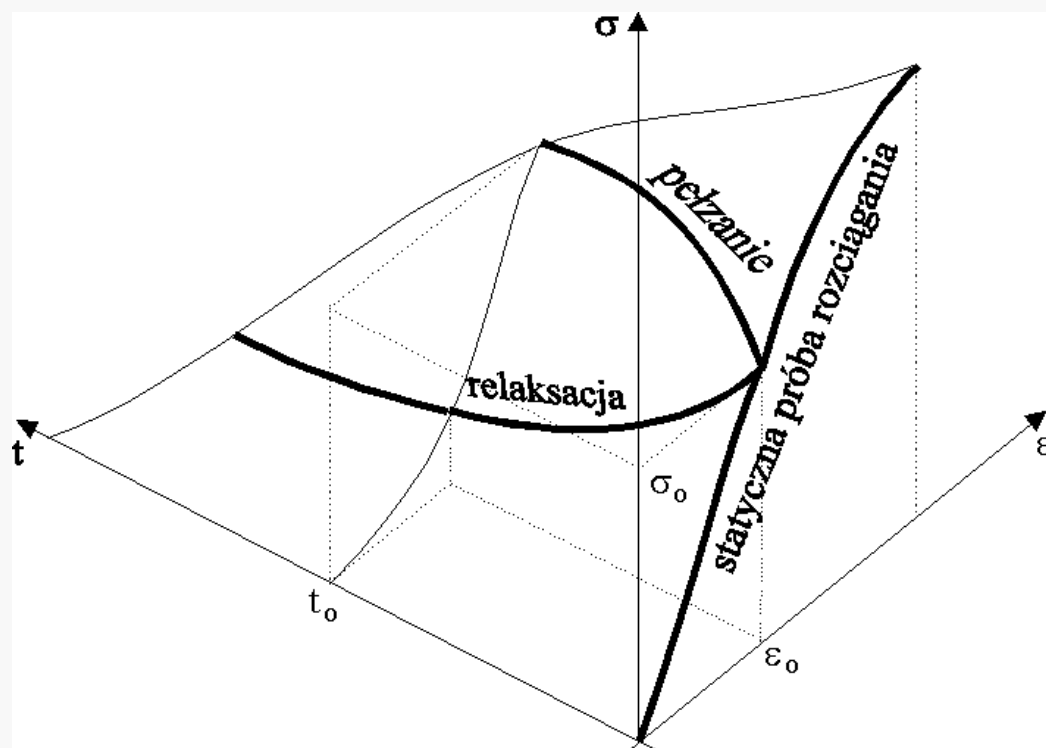
|    |                                  |                                                                                      |                                                                                                                            |
|----|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6  | Sztywno-sprężysty                |    | $\varepsilon = 0 \text{ dla } \sigma < R_e$<br>$\varepsilon = \frac{\sigma}{E'} \text{ dla } \sigma \geq R_e$              |
| 7  | Lepko-sprężysty (Maxwella)       |    | $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$                                                          |
| 8  | Lepko-sprężysty (Kelvina-Voigta) |    | $\sigma = E \cdot \varepsilon + \mu \cdot \dot{\varepsilon}$                                                               |
| 9  | Lepko-plastyczny                 |   | $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\mu} \text{ dla } \sigma < R_e$<br>$\dot{\varepsilon} \geq 0 \text{ dla } \sigma = R_e$ |
| 10 | Lepko-plastyczny (Binghama)      |  | $\varepsilon = 0 \text{ dla } \sigma < R_e$                                                                                |



## Podstawowe obserwacje reologiczne {1}



Zależność odkształceń od czasu  
(prędkości przykładania  
obciążenia)

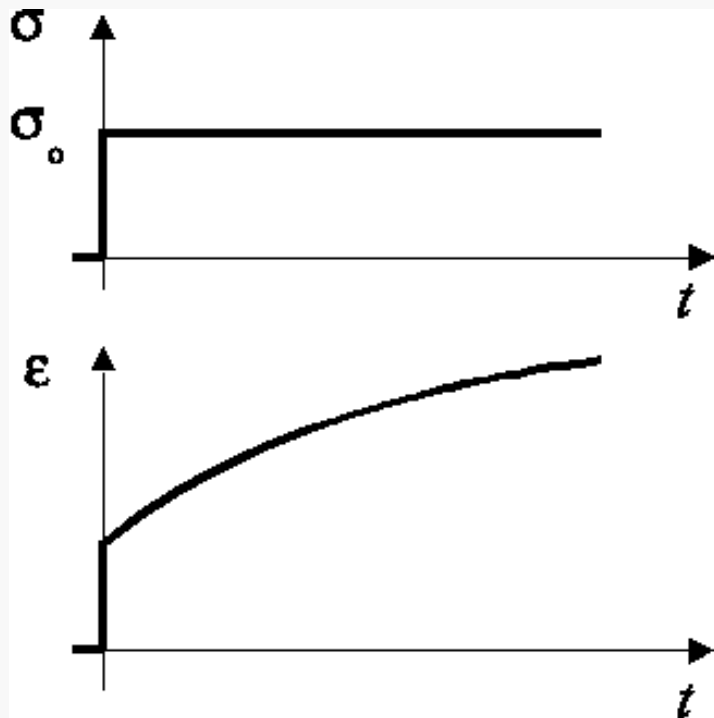


Powierzchnia stanu reologicznego  
 $f(\sigma, \epsilon, t) = 0$  (1)

Przekroje powierzchni odpowiadają próbom doświadczalnym: próba pełzania, próba pełzania z odciążeniem, próba relaksacji, próba wytrzymałości czasowej,

Próba pełzania

→



Próba pełzania

zadane jest stałe w czasie naprężenie, lub - mówiąc poprawniej - zadana jest następująca historia naprężenia:  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ ,

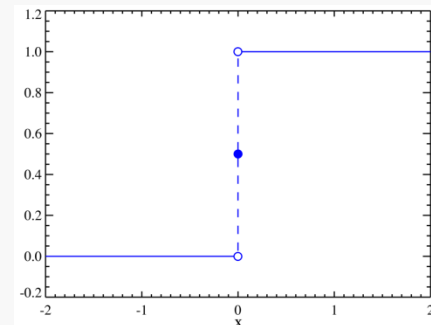
gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a  
 $H(t) = 0$  dla  $t < 0$ ,  $H(t) = 1$  dla  $t \geq 0$ .

Rozwikłanie funkcja stanu (1),  
daje:

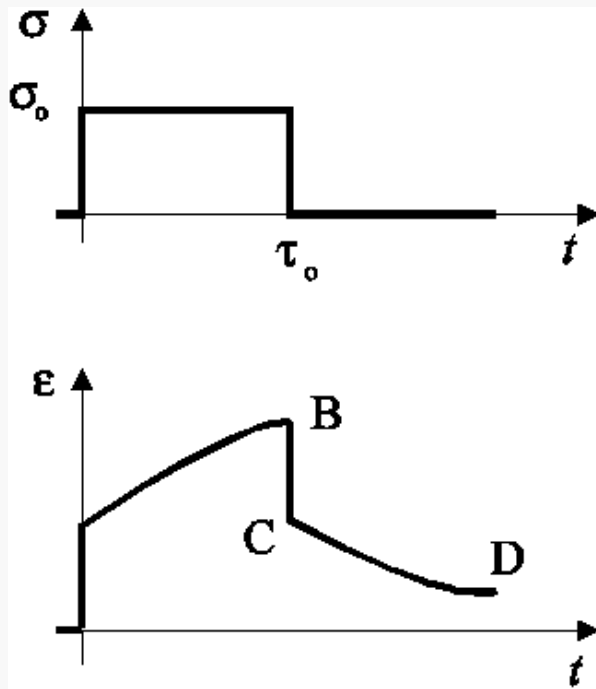
$$f(\sigma_0, \varepsilon, t) = 0 \rightarrow \varphi(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0 \quad (2)$$

gdzie  $\varphi(t)$  nosi nazwę  
**funkcji pełzania**

Funkcja Heaviside'a = m skokowa →



Próba pełzania  
z odciążeniem  
→



Próba pełzania z odciążeniem

zadana jest następująca historia naprężenia:

$$\sigma = \sigma_0 [H(t) - H(t - \tau_0)],$$

gdzie  $\tau_0$  jest chwilą odciążenia.

← typowe zachowanie się materiału  
wykazującego

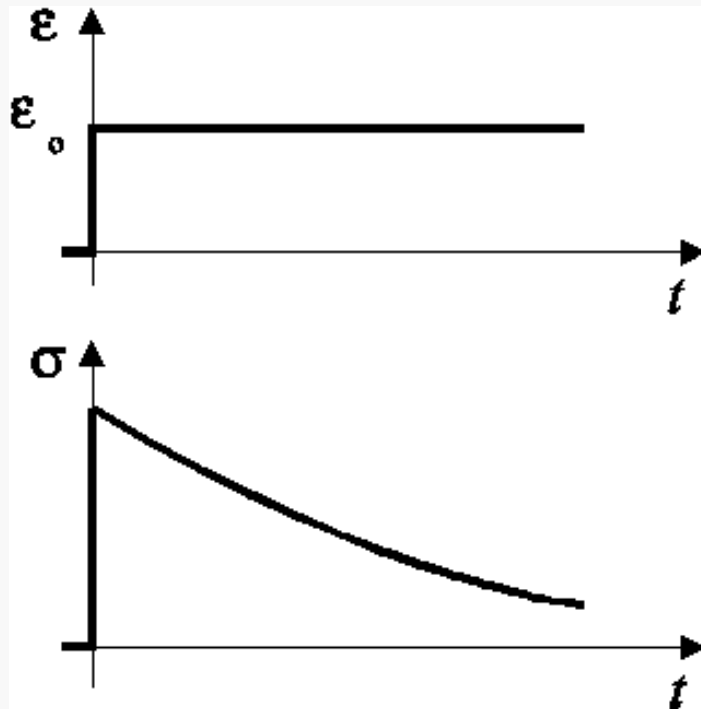
**nawrót sprężysty** (odcinek BC) i

**niesprężysty** (odcinek CD),

nazywany też **pełzaniem odwrotnym**.

Próba  
relaksacji →

zadana jest historia odkształcenia :  
 $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$  ,

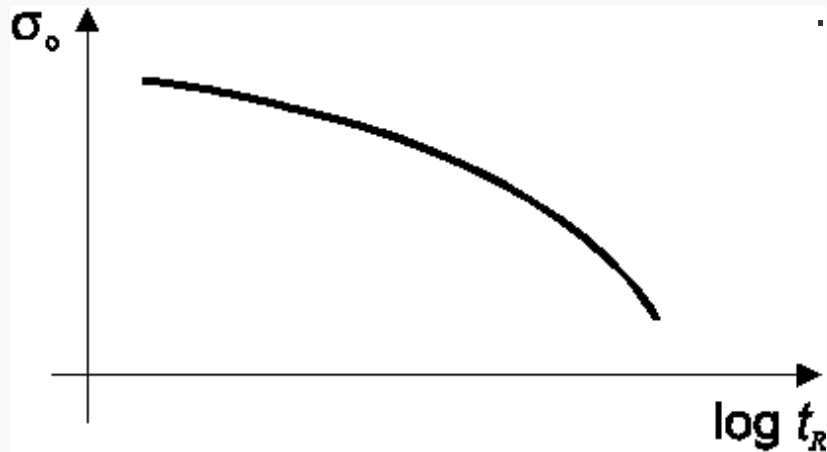


Próba relaksacji

← odpowiedź materiału w postaci  
**funkcji relaksacji**, będącej  
rozwiązaniem równania  $f(\sigma, \varepsilon_0, t) = 0$  :  
 $\psi(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0$  .

Próba  
wytrzymałości  
czasowej →

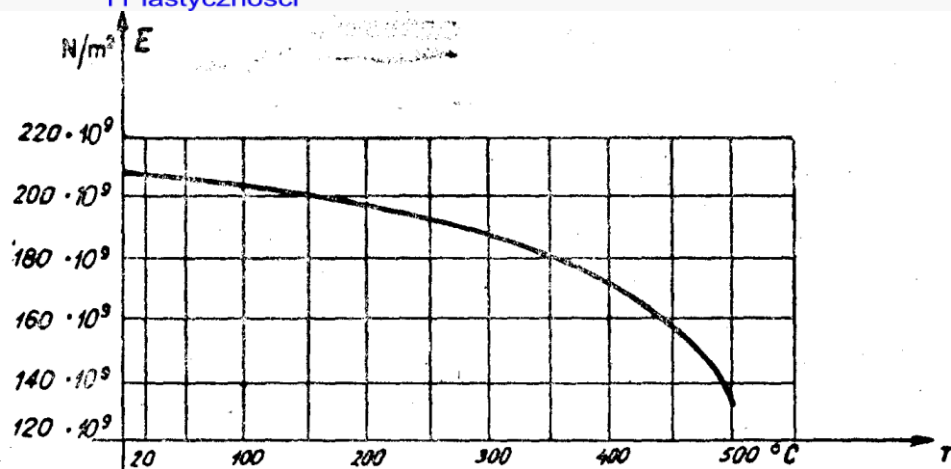
przy zadanym naprężeniu (próba pełzania),  
obciążenie jest utrzymywane aż do momentu  
zniszczenia ,



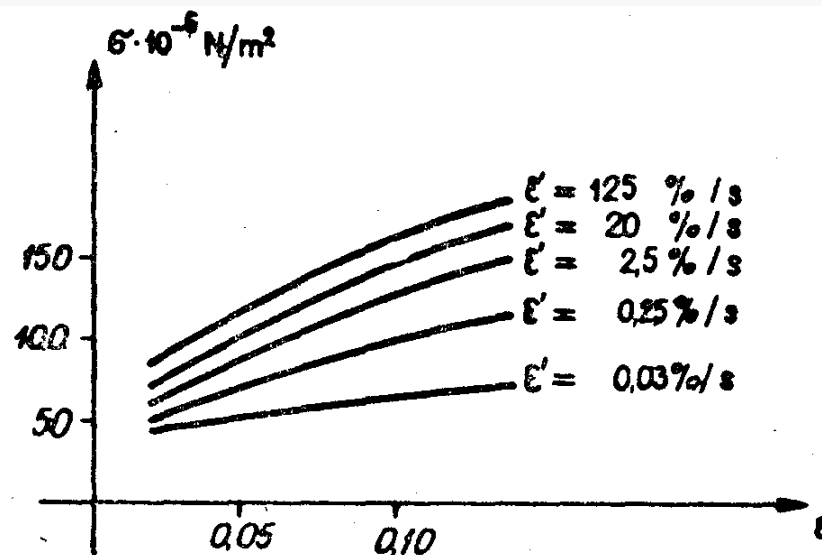
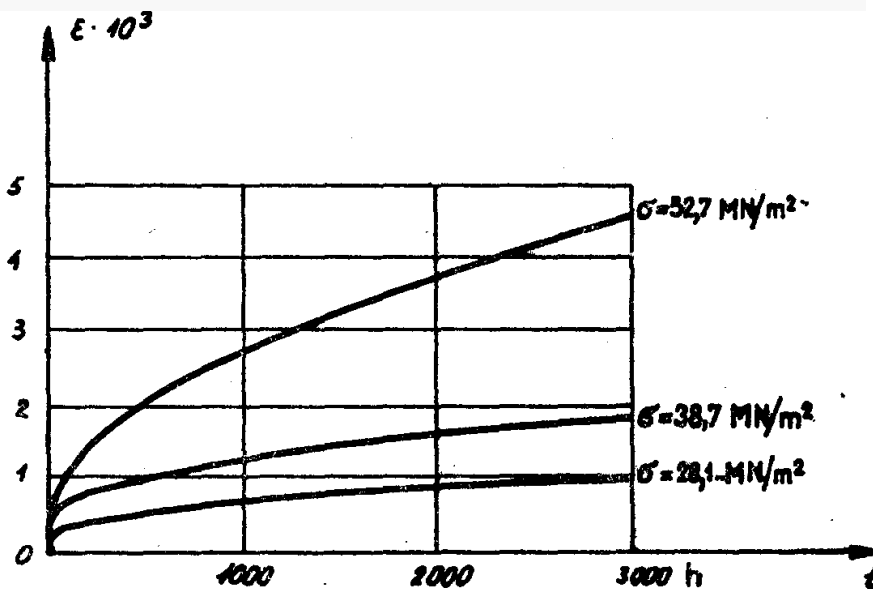
Próba wytrzymałości czasowej

←schematyczna zależność  
wytrzymałości od wartości czasu  
potrzebnego do zniszczenia  $t_R$  (z uwagi  
na duże wartości czasu  $t_R$  przy małych  
naprężeniach wykres ten podaje się  
zwykle w układzie pół-logarytmicznym).

## Podstawowe obserwacje reologiczne {6}

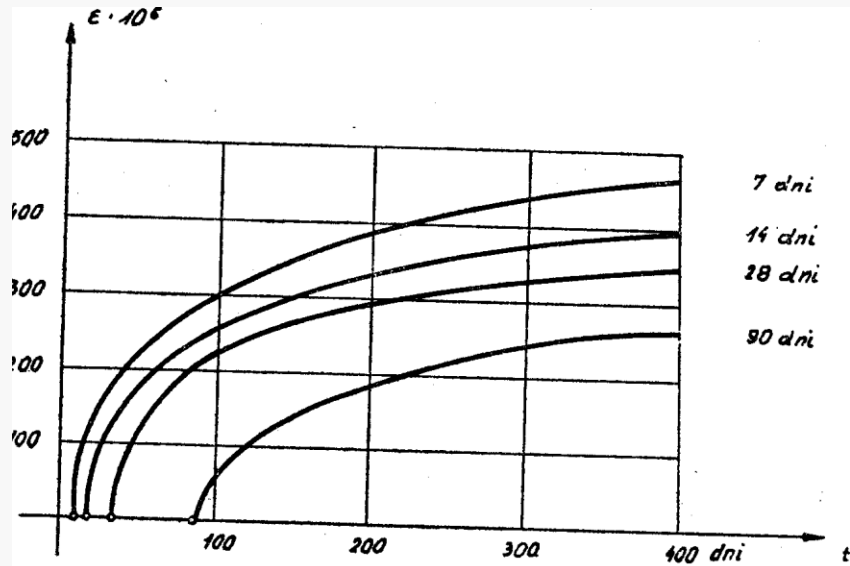


Zależność modułu Younga od emperatury stali



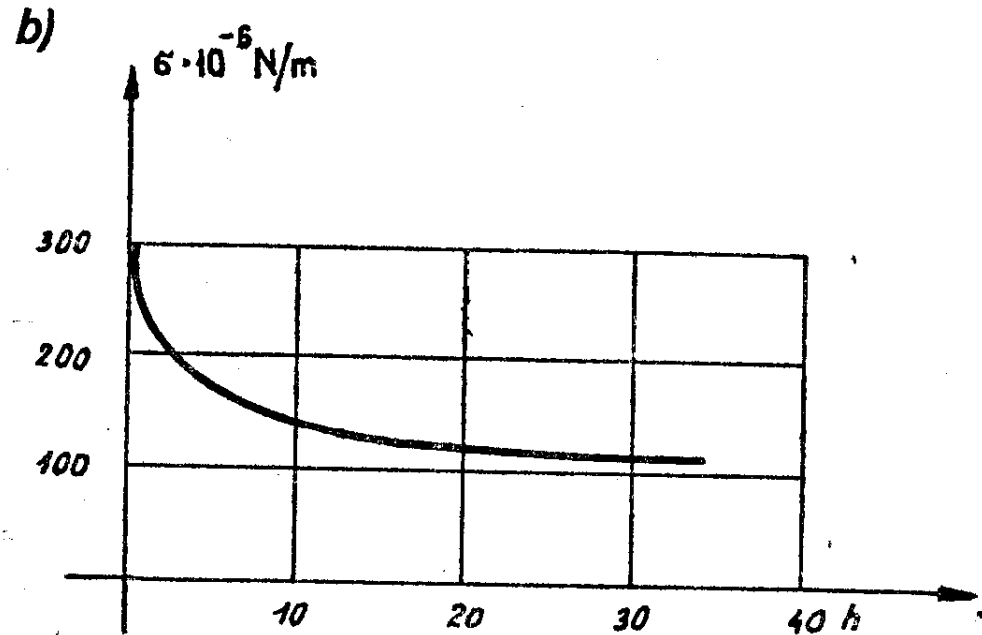
Rozciąganie ołowiu przy różnych prędkościach naprężenie

← Krzywe pełzania stali



Relaksacja stali →

← Starzenie betonu !



→ Właściwość zjawisk reologicznych, która powoduje, że zniszczenie materiału następuje przy dowolnej wartości przyłożonego naprężenia, pod warunkiem utrzymania go odpowiednio długo, jest jedną z najistotniejszych różnic w zachowaniu się materiałów reologicznych w stosunku do ciał o własnościach niezależnych od czasu

Klasyczny warunek projektowania ze względu na nieprzekroczenie naprężeń :  $\sigma_{\text{ekspl}} < R$ , gdzie  $R$  jest naprężeniem charakterystycznym (dopuszczalnym), musi być więc zastąpiony warunkiem

*nieprzekroczenia czasu potrzebnego do zniszczenia*  $t_{\text{ekspl}} < t_R$

Drugi z warunków projektowania (tzw. warunek użytkowania), żądający ograniczenia maksymalnych przemieszczeń też musi być zmodyfikowany, przez dodanie ograniczenia niewystąpienia tych przemieszczeń w całym czasie eksploatacji konstrukcji

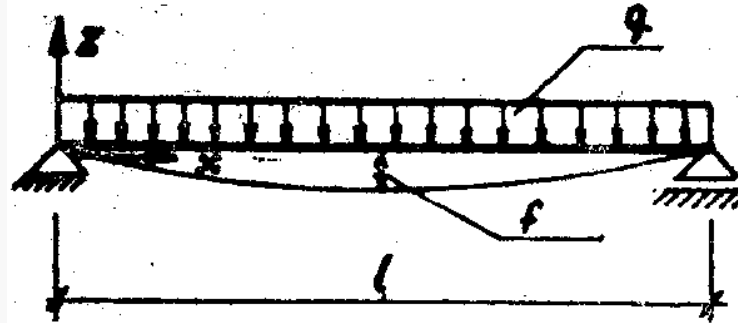
$u_{\text{ekspl}}(t_{\text{ekspl}}) < u_{\text{max}}$

Dodatkowo, ze względu na zjawisko relaksacji (a więc spadku naprężeń przy stałych odkształceniach), może zająć konieczność sprawdzenia warunku ograniczenia naprężeń od dołu  $\min \sigma(t) > \sigma_{\text{min}}$

Z przypadkiem takim mamy do czynienia wówczas, gdy konieczne jest przeniesienie przez konstrukcję określonych sił, np. siły naciągu w kablach sprężających



# Zginanie belki z materiału Kelvina {1}



Model Kelvina

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) .$$

Odształcenie – prawo Bernoulliego (r,k) – funkcje czasu :  $\varepsilon_x = \frac{z}{\rho} = kz$

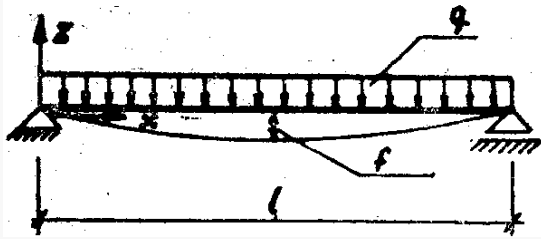
Z równania fizycznego  $\sigma_x(x, t) = Ek(x, t)z + \eta\dot{k}(x, t)z .$

$$M(x) = \iint_A \sigma_x z dA = \iint_A (Ekz + \eta\dot{k}z) z dA = EJ_y k(x, t) + \eta J_y \dot{k}(x, t) ,$$

Całka ogólna powyższego równania  
- krzywizna k

$$k_0(x, t) = ce^{-\frac{E}{\eta} t}$$

## Zginanie belki z materiału Kelvina {2}



Całka szczególna

więc całka ogólna :

$$k_s(x, t) = \frac{M(x)}{EJ_y}$$

$$k(x, t) = \frac{M(x)}{EJ_y} + ce^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Z modelu Kelvina: dla  $t=0 \rightarrow e=0 \rightarrow k(x, t)=0 \rightarrow$

$$k(x, t) = \frac{M(x)}{EJ_y} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$

Równanie fizyczne spełnia więc  $\sigma_x = \frac{M(x)}{J_y} z$

(nie zależy od czasu)

Z zależności  $k(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} = w''(x, t)$  mamy  $w''(x, t) = \frac{M(x)}{EJ_y} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$ .

Jeśli dana jest funkcja  $M(x)$ , to całkowanie funkcji ugięcia daje:

$$w(x, t) = w_{\text{spr}}(x) (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}), \quad \text{gdzie } w_{\text{spr}} - \text{ugięcie sprężyste}$$

# Zginanie belki z materiału Kelvina {3}

W konkretnym przypadku  $\rightarrow$

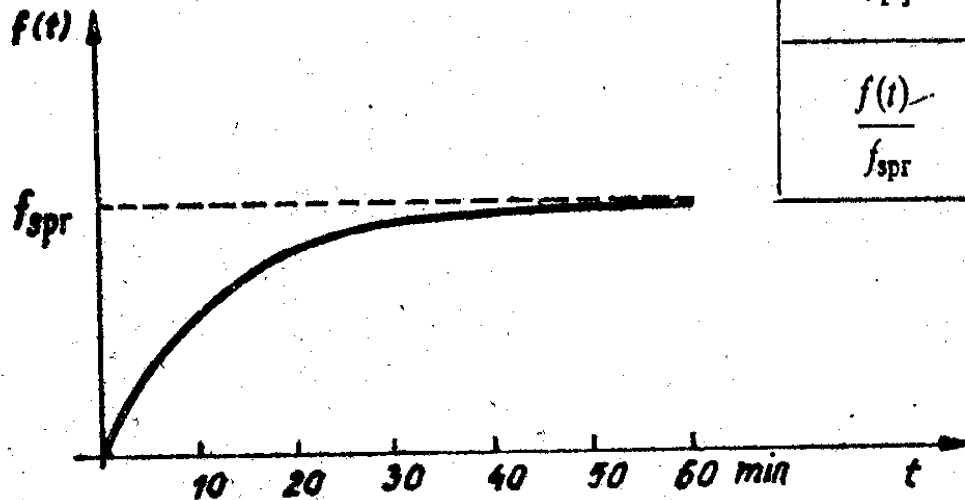
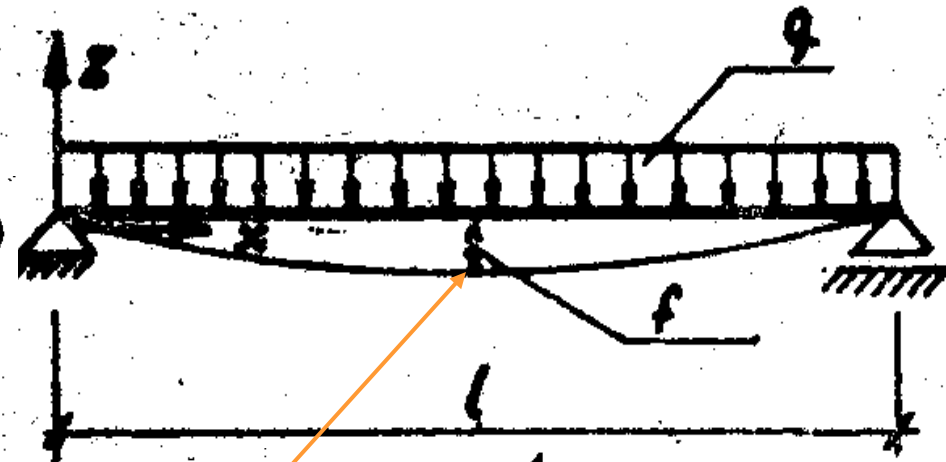
$$w(x, t) = \frac{q}{24EJ_y} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$

Dla:  $E = 270 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\eta = 324 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

$$f(t) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_y} (1 - e^{-1,4 \cdot 10^{-3}t}) = f_{\text{spr}}(1 - e^{-1,4 \cdot 10^{-3}t})$$

$$f(t) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_y} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$



| $t[\text{s}]$                 | 600  | 1200 | 1800 | 2400 | 3000 | 3600 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{f(t)}{f_{\text{spr}}}$ | 0,57 | 0,81 | 0,92 | 0,96 | 0,98 | 0,99 |

← Funkcja ugięcia w czasie