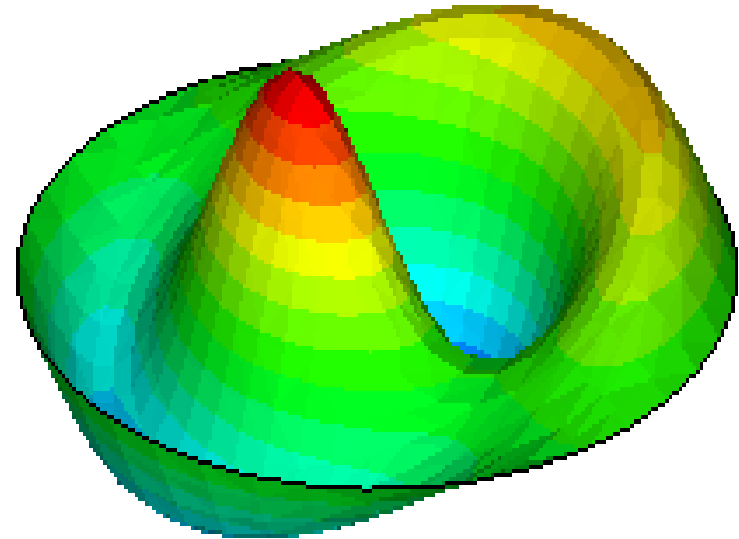
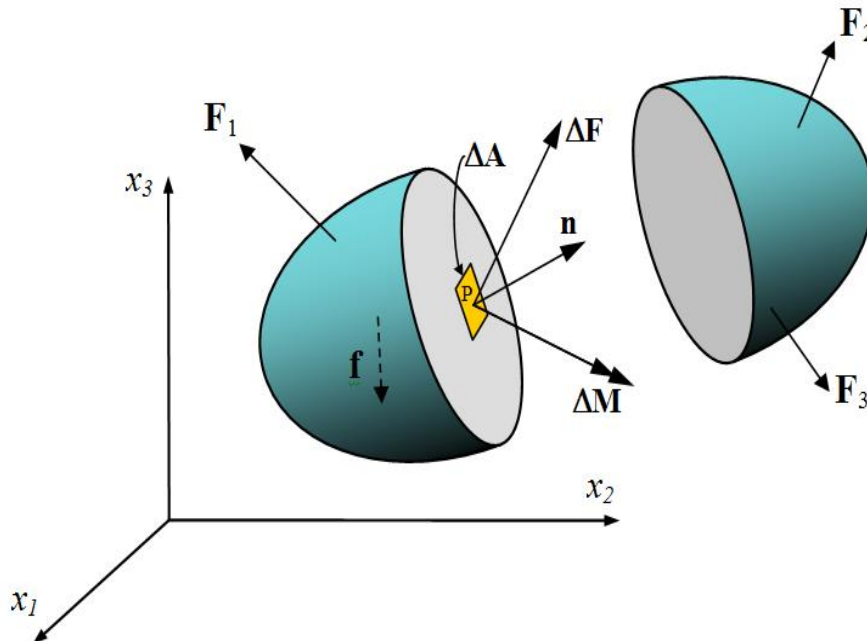


Wykład 6: Nieliniowości fizyczne Część 1: Typy nieliniowości, hipotezy, plastyczność

Leszek CHODOR dr inż. bud, inż.arch.
leszek@chodor.co



Literatura:

- [1] Timoschenko S. Goodier A.J.N., Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951
- [2] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów dla wydziałów budowlanych, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [3] Rakowski G., Kacprzyk Z., Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji, Oficyna PW, Warszawa, 2005
- [4] Bower A., Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University Spring 2005,
- [5] Lebedev L.P., Cloud M.J., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010
- [6] Chodor L., publikacje własne - różne.
- [7] Strony www [dostępne luty-kwiecień 2011] - różne

Typy nieliniowości w ZB MC

W celu objęcia analizą innych niż liniowo sprężyste materiałów, ale także konstrukcji w których wywołane są naprężenia, które nie są liniową funkcją odkształceń, odchodzimy od założenia podstawowego założenia TS: tj. założenia „liniowości”.

Wydzielimy trzy typy nieliniowości:

1. **fizyczna** → związek między naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowy (nieliniowe-sprężyste, plastyczne, kruche, lepkie itd.) → wykład 2,3
2. **geometryczna** → związek między odkształceniami i przemieszczeniami jest nieliniowy (równania geometryczne {3} → wykład 2,3

$$(\epsilon_{11} + 1)^2 = 1 + 2\epsilon_{11}$$

(odejście od założenia małych przemieszczeń - np. zjawisko utraty stateczności, analiza - $P - \Delta$

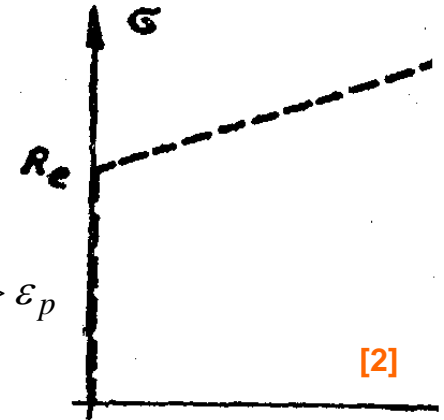
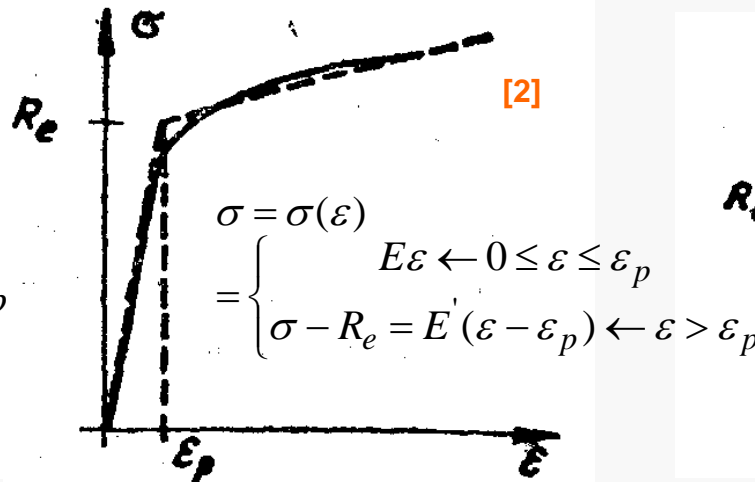
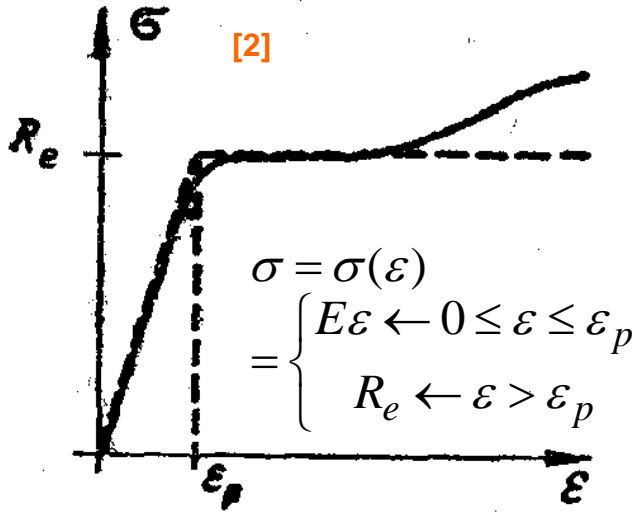
3. **strukturalna** → związek obciążeniami i przemieszczeniami jest uwikłany (np. elementy tylko rozciągane, podłoże sprężyste jednostronne)

W niniejszym wykładzie będziemy zajmowali się nieliniowościami fizycznymi → nieliniowym prawem fizycznym materiału bryły, opisanym równaniem fizycznym

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \ddot{\boldsymbol{\sigma}}, t, T)$$

Podstawowe modele ciała plastycznego

W teorii plastyczności zazwyczaj pomija się różnicę pomiędzy granicą sprężystości, a granicą plastyczności, przyjmując, że uplastycznienie ciała rozpoczyna się na **granicy plastyczności** $f_y (= R_e)$



Materiał **idealnie sprężysto-plastyczny** (Prandtl)

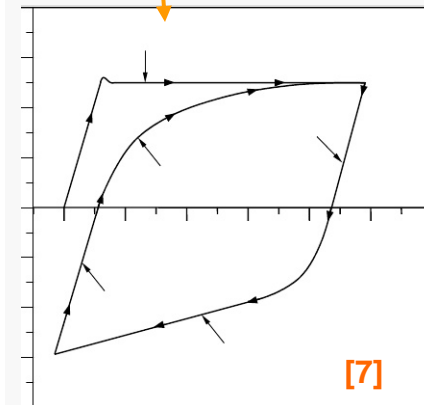
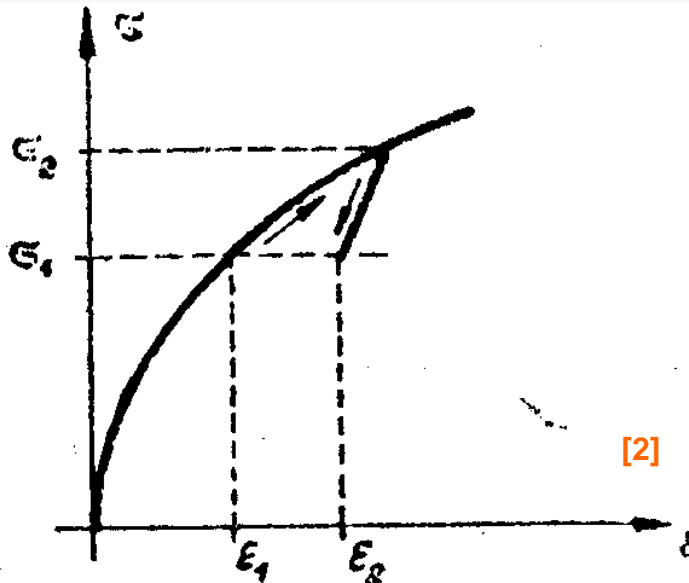
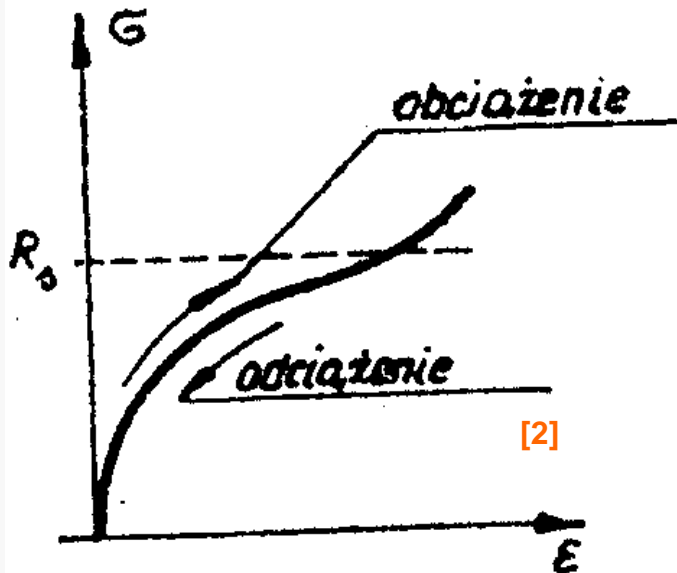
Materiał **sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem**

Materiał **sztwno-plastyczny ze wzmocnieniem**

Doświadczenie przy prostym rozciąganiu i schematyzacja teoretyczna

Charakterystyczne cecha odkształceń plastycznych – są trwałe

- sprężystość** → po odciążeniu punkt nie doznaje trwałych odkształceń funkcja , czyli przy obciążeniu i odciążeniu funkcja $\sigma = \sigma(\epsilon)$ jest identyczna
Wartość naprężeń jednoznacznie określa odkształcenia
- plastyczność** → Proces obciążenia przebiega nieliniowo, a proces odciążenia liniowo. W procesie odkształcenia sprężysto-plastycznego istnieje niejednoznaczność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami. Aby określić odkształcenia nie wystarczy znać wartość odkształcenia, ale także trzeba znać drogę po której doszliśmy do tego naprężenia → **efekt Bauschinger** (1880)[zakres sprężysty nie zmniejsza się ani nie zwiększa, a jedynie ulega przesunięciu.



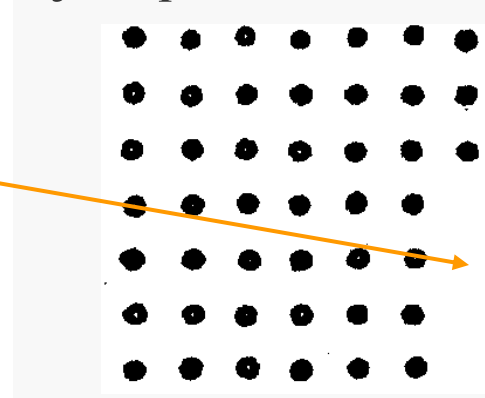
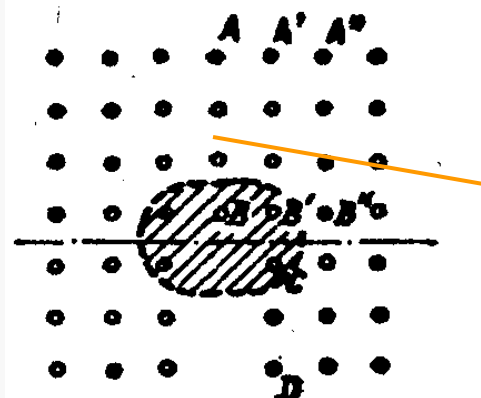
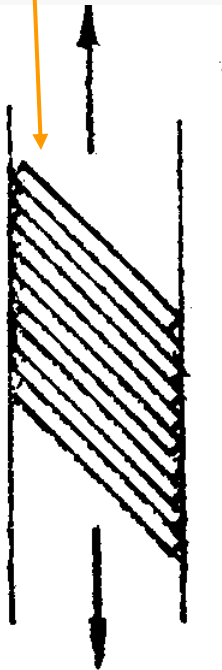
Interpretacja odkształceń trwałych

W procesie odkształceń trwałych kształt ciała nie wraca do pierwotnej postaci. Oznacza to, że cząsteczki doznały nieodwracalnych względnych przemieszczeń.

Linie Lidersa – w stanie plastycznym na powierzchni próbki pojawiają się cienkie, jasne i ciemne, nachylone pod kątem 45° do osi próbki.

Znaczy to, że w płaszczyznach tych linii następuje intensywne ścinanie materiału. W modelu przyjmujemy, że próbka złożona jest z oddzielnych płytek ułożonych pod kątem 45° , które ślizgają się po sobie. Poślizg jest wynikiem złożonego procesu,

zachodzi w krystalicznej siatce każdego ziarna oraz w materii litykrystalicznej. Najczęściej tłumaczy się go obecnością dyslokacji w siatce. Dyslokacja to wada siatki regularnej, polegająca na występowaniu dodatkowego półplastra atomów (na rys. dyslokacja = odcinek AB, a obszar zdeformowanych atomów zakreskowano → dyslokacja wędruje w prawo $AB \rightarrow A'B' \rightarrow A''B''$, itd



Intensywność odkształceń – naprężeniem zastępczym – hipotezy wyteżeniowe

Miara wyteżenia (= naprężenia zastępcze)

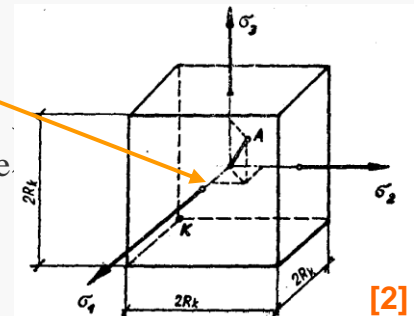
Hipoteza: Złożony, wieloosiowy stan naprężeń można scharakteryzować **miarą wyteżenia**, naprężeniem które wywołuje taki sam efekt w dowolnym stanie naprężenia, a w szczególności w jednoosiowym stanie naprężenia, co pozwala a prosty sposób uogólnić wyniki badań prostego rozciągania.

Miara wyteżenia zależy od hipotezy wyteżeniowej:

- (historyczna) → hipoteza Galileusza(1632) (: **maksymalne naprężenie główne**)
- → hipoteza **Hubera(1904)-Misesa-Hencky** (: **intensywność naprężeń, energia odkształcenia postaciowego**)
- 3. → hipoteza **Coulomba (1776) Treski(1872)-Guesta(1900)** (**maksymalne naprężenia styczne**)

Hipoteza Galileusza ma znaczenie historyczne, bo nie potwierdza jej doświadczenia, np. 1) dla wszechstronnego ściskania $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ nie jesteśmy w stanie zniszczyć bryły, (w tym uplastyczyć jakiegokolwiek jej punktu)

2) dla prostego skręcania) – $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau = \sigma_3 = 0$ już przy $R_e/2$ nastąpi uplastycznienie (wg hipotezy G przy R_e)



Hipoteza Coulomba-Treski –Guesta C-T-G

Doświadczenia

- 1) ściskania próby betonowej →
 - 2) rozciąganie próby stalowej linie Lidersa ←
- ← z wykładu 2,3 – w płaszczyznach zniszczeń działają maksymalne naprężenie styczne

Hipoteza C-T-G:

O wyężeniu materiału w danym punkcie decyduje maksymalna, bezwzględna wartość największego naprężenia stycznego, niezależnie od tego, czy wartość ta powstała w wyniku prostego, czy złożonego stanu naprężenia.

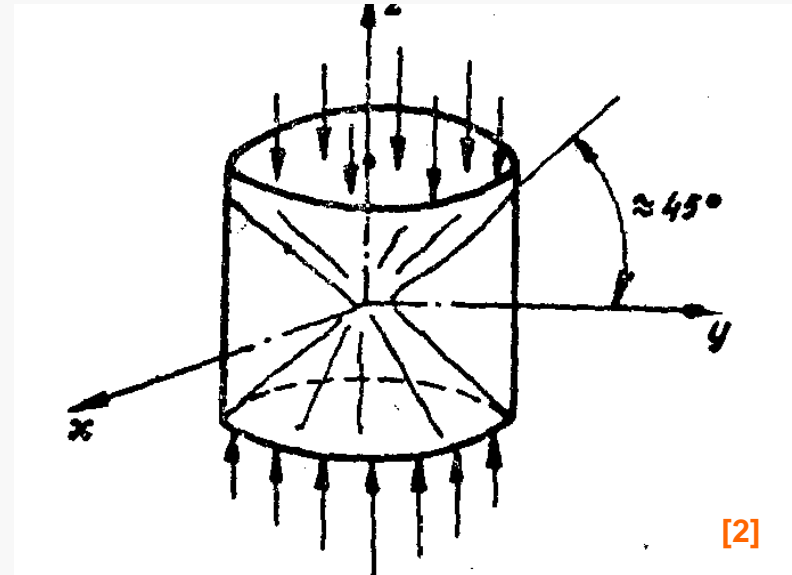
Miara wyężenia C-T-G

stan złożony

$$m(w)_{C-T-G} = \max \left(\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \right).$$

proste rozciąganie

$$m(w)_{C-T-G} = \frac{|\sigma_1|}{2}.$$



[2]

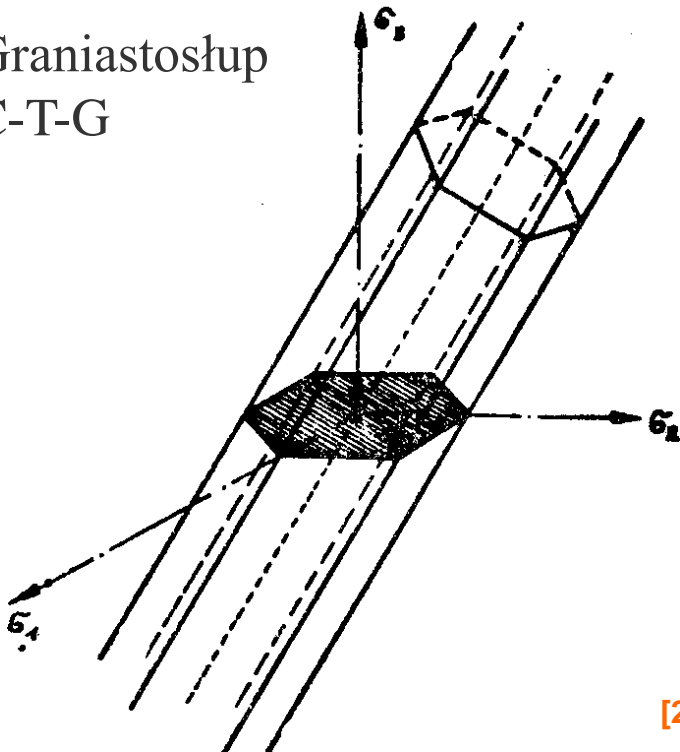
Hipoteza H-T-G – interpretacja geometryczna

Prac konstrukcji będzie bezpieczna jeśli w każdym punkcie zachodzi nierówność

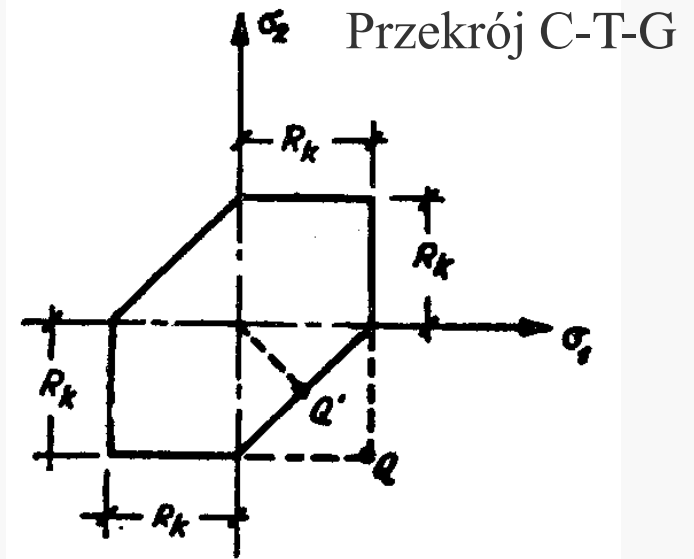
$$\max \left(\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \right) \leq \frac{R_k}{2}$$

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{R_k}{2}, \quad \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| \leq \frac{R_k}{2}, \quad \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \leq \frac{R_k}{2}$$

Graniastosłup
C-T-G



[2]



[2]

Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky H-M-H

Oryginalnie sformułowana przez Hubera w rozważaniach na temat wszechstronnego ściskania.

Hipoteza H-M-H:

O wytéżeniu materiału w danym punkcie decyduje ilość nagromadzonej w nim Energii odkształcenia postaciowego, niezależnie od tego, czy wartość energii powstała w wyniku prostego, czy złożonego stanu naprężenia.

Miara wytéżenia C-T-G:

$$m(w)_H = \Phi_f = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2].$$

$$m(w) = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2.$$

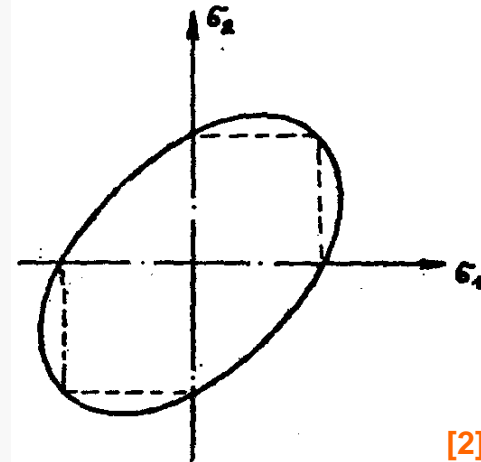
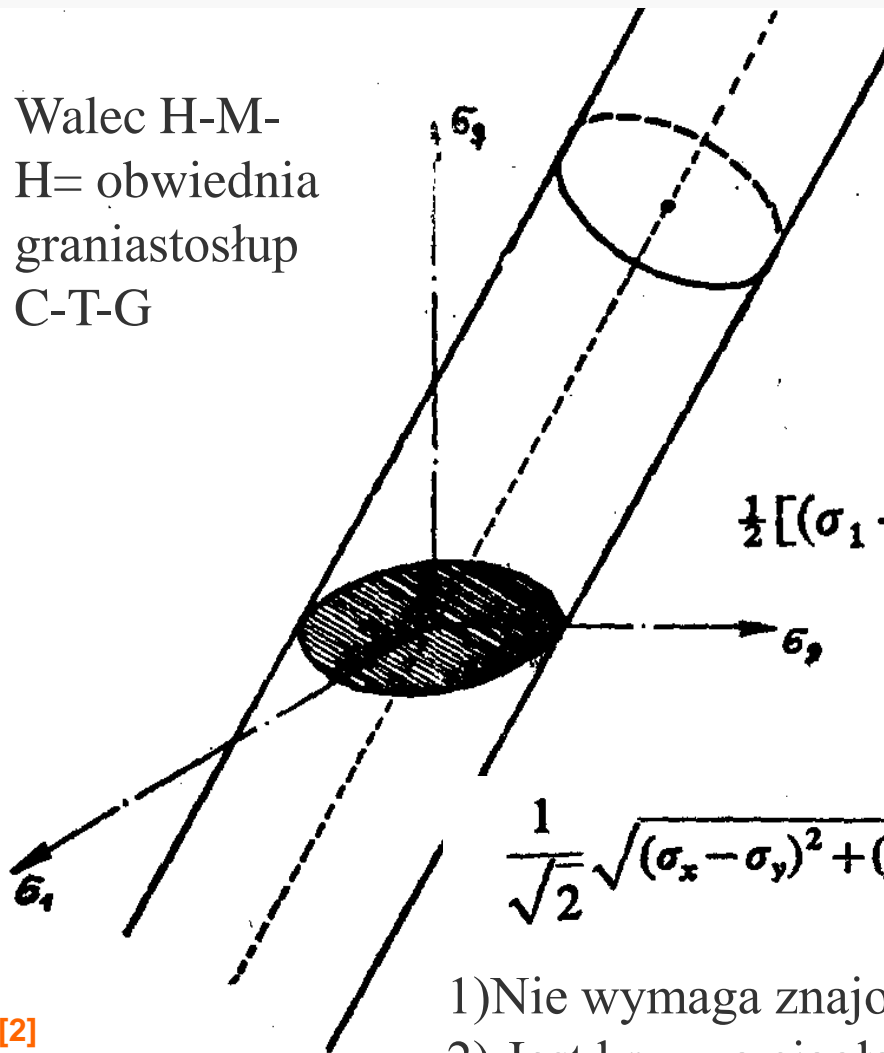
$$m(w_{nieb})_H = \frac{1+\nu}{3E} R_k^2.$$

Prac konstrukcji będzie bezpieczna jeśli w każdym punkcie zachodzi nierówność

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1+\nu}{3E} R_k^2$$

Hipoteza H-M-H – interpretacja geometryczna

Walec H-M-H =
obwiednia
graniastosłup
C-T-G



$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \leq R_k^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq |R_k|.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \leq R_k. \quad (1)$$

- 1) Nie wymaga znajomości naprężeń głównych
- 2) Jest krzywa ciągłą (bez punktów nieciągłości – obliczenia OK)

[2]

[2]

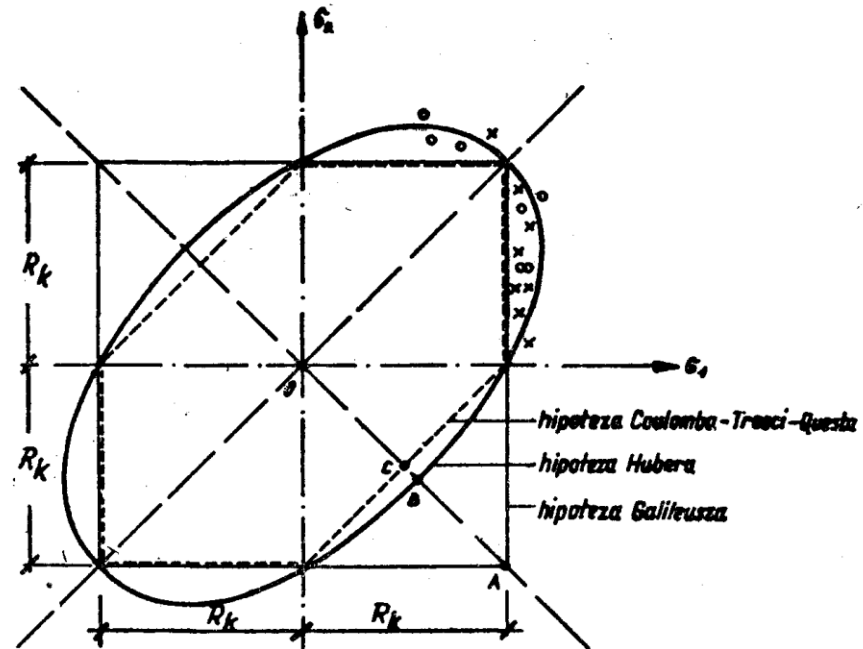
(1)

Porównania hipotez {1}

Pokazane hipotezy dotyczą materiałów własności sprężysto-plastyczne, które cechuje równość naprężeń niebezpiecznych, otrzymanych z prób rozciągania i ściskania. Nie dotyczą więc materiałów kruchych, takich jak: żeliwo, kamień, cegła, beton. Hipotezy dla materiałów kruchych (korzystające z przedstawionych idei): Rankine'1(1856), Clebscha(1862), Burzyńskiego(1928), Davidenkova-Friedmana(1944), Pełczyńskiego(1951), a także teoria Mohra, która przedstawimy w dalszej części.

Jeśli we wzorze (1) przyjmiemy $R_k = R_e = f_y$, to otrzymamy stosowany w teorii plastyczności warunek plastyczności H-M-H. Taki warunek przyjmujemy w teorii plastyczności MIMO, zę wyrażenie na energie potencjalne wzięliśmy z liniowej teorii sprężystości (użyliśmy prawa Hooke'a).

Dopuszczalność analogii potwierdza doświadczenie !-



Porównania hipotez {2}

Po uporządkowaniu naprężeń głównych, tak, aby $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Wówczas warunki wytrzymałościowe wg różnych hipotez przyjmą postać:

$$\sigma_1 \leq |R_k|,$$

$$\text{G:} \quad \sigma_0 = \sigma_1,$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq |R_k|,$$

$$\text{C-T-G:} \quad \sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq |R_k|.$$

$$\text{H-M-H:} \quad \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

Stąd uzasadnienie nazywania lewych stron „naprężeniem zastępczym” σ_0

Naprężenie zastępcze H-M-Hw TP nazywa się często intensywnością naprężenia σ_i

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Warunek plastyczności (powierzchnia plastyczności) H-M-H przyjmie postać

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \quad (2)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{(1 + \nu)} \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{3}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)},$$

Hipotezy – przykład liczbowy {1}

Dla macierzy naprężeń w punkcie
wyznaczyć naprężenia zastępcze
Wg hipotez, G, C-T-G i H-M-H

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & 40 & -20 \\ 40 & 50 & 30 \\ -20 & 30 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

1. Naprężenia główne macierzy naprężeń (wykład 2,3) wynoszą:

$$\sigma_1 = 122,2 MPa, \sigma_2 = 4,94 MPa, \sigma_3 = -31,7 MPa$$

2. Naprężenie zastępcze G, C-T-G i H-M-H wynoszą więc

- według hipotezy G: $\sigma_o = 122,2 \text{ MN/m}^2$,
- według hipotezy C-T-G: $\sigma_o = 122,2 - (-31,7) = 153,9 \text{ MN/m}^2$,
- według hipotezy H-M-H: $\sigma_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(122,2 - 49,4)^2 + (122,2 + 31,7)^2 + (49,4 + 31,7)^2} = 133,3 \text{ MN/m}^2$.

Charakterystyki materiału: $R_H = 120 \cdot MPa, R_s = 130 MPa, R_e = 200 \cdot MPa$

Ze wszystkich hipotez wynika, że punkt ciała jest poza granicą plastyczności.

Wniosek Jeśli macierz naprężeń została wyznaczona na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego fizycznie liniowej teorii sprężystości, to rozwiązanie (statyki) jest NIEPOPRAWNE.

Hipotezy – przykład liczbowy {2}

Podać naprężenia zastępcze w punktach belki zginanej poprzecznie.

Macierz naprężeń w belce zginanej poprzecznie ma postać:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Naprężenia główne: $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$

Naprężenia zastępcze wynoszą więc

$$G : \sigma_0 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

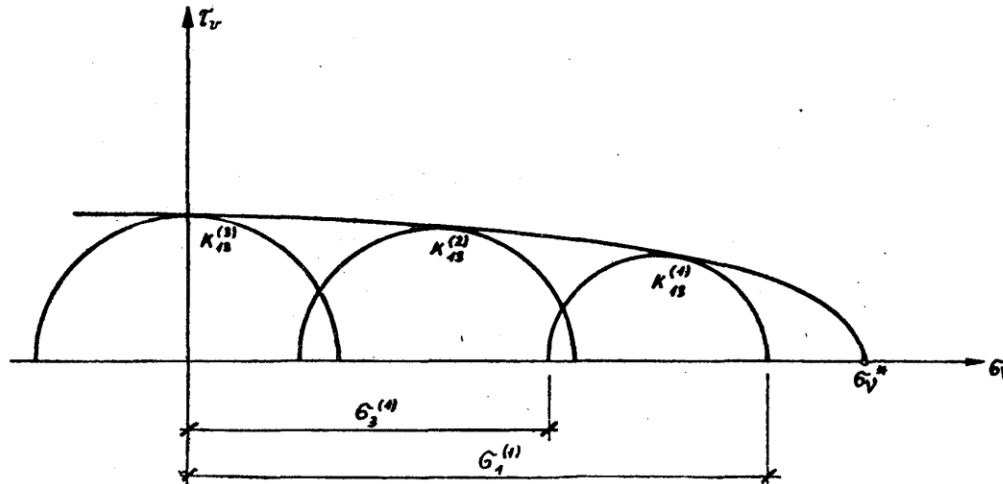
$$C - T - G : \sigma_0 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$$H - M - H : \sigma_0 = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

Wytyężeniowa teoria Mohra {1}

Może być stosowana do **ciał kruchych**

Wykonajmy następującą konstrukcję: 1) Weźmy dowolną macierz naprężeń i zwiększamy proporcjonalnie elementy macierzy naprężeń, aż do takich wartości, dla których osiągniemy jeden ze stanów niebezpiecznych i dla tych wartości rysujemy największe koło Mohra.



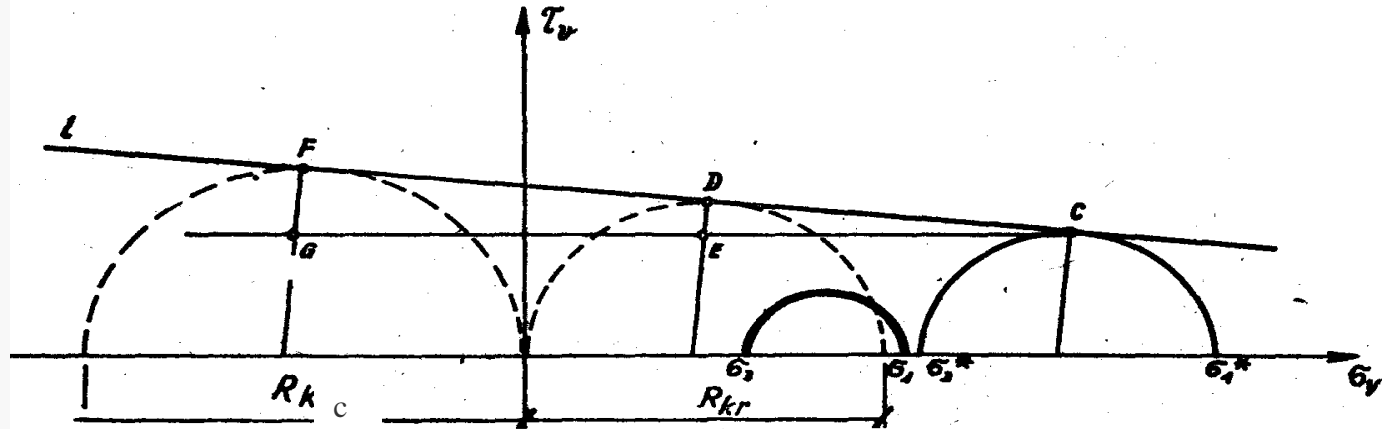
- 1) Postępując wg1) dla kolejnych macierzy naprężeń – uzyskamy obwiednię kół Mohra (rys)

Kształt obwiedni zależy od materiału, dlatego obwiednia taka będzie pewną jego charakterystyką. Jeślibyśmy dla danego materiału mieli taką obwiednię, to można wówczas dla każdej macierzy naprężeń wyznaczyć odpowiednie koło Mohra, a następnie tak zwiększać proporcjonalnie naprężenie główne, by koło było styczne do obwiedni (koło graniczne).

Widać stąd, że do wyznaczenia stanu niebezpiecznego nie jest potrzebna żadna hipoteza.

Wytyężeniowa teoria Mohra {2}

Obwiednię możemy skonstruować w następujący sposób: 1) rysujemy koła dla dwu przypadków prostych, znanych z doświadczenia, np. proste rozciąganie $\sigma_1 = R_{kr}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$,
, proste ściskanie, $\sigma_3 = -R_{kc}, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$,
(linie przerywane)



Obwiedni kół Mohra wyznaczamy jako aproksymację linia styczną do obu wyznaczonych kół prostych.

Dla dowolnego stanu naprężeń - koło (linią grubą) – mnożymy elementy naprężeń, tak, by koło było styczne do prostej aproksymującej obwiednię – koło ostatnie, narysowane liniją cienką. Z konstrukcji wynika, że naprężenie zastępcze wg teorii Mohra wynosi:

$$\sigma_0 = \sigma_1 - k\sigma_3, k = \frac{R_{kr}}{R_{kc}}$$

Dla materiału równowytężonego, $k=1$ i naprężenia zastępcze są takie jak według hipotezy C-T-G

Hipotezy – przykład liczbowy {3}

Obliczyć naprężnie zredukowane dla żeliwa, dla którego

$$R_{kr} = R_{mr} = 150MPa, R_{kc} = R_{mc} = 330MPa$$

Macierz naprężeń w punkcie zadaniu 1

Mamy
więc: $\sigma_1 = 122,2MPa, \sigma_2 = -31,7MPa, k = \frac{150,0}{330,0} = 0,455$

$$\sigma_0 = \sigma_1 - k\sigma_2 = 122,2 - 0,455(-31,7) = 136,6MPa$$

Podstawowe teorie plastyczności {1}

Teorie plastyczności różnią się ponadto od teorii sprężystości związkami między naprężeniami i odkształceniami, albo ich przyrostami lub pochodnymi względem czasu. Przyjmuje się przy tym, że prawo zmiany objętości \rightarrow (Wykład 2,3) pozostaje w mocy (zmiana objętości jest czysto sprężysta). Różnice uwidaczniają się w prawie zmiany postaci. Ogólne, liniowe **prawo zmiany postaci** można zapisać w postaci:

$$a_1 D_\sigma + a_2 D_{\dot{\sigma}} + a_3 D_\varepsilon + a_4 D_{\dot{\varepsilon}_j} = 0, \quad (3).$$

gdzie jednak tylko trzy ze współczynników a_i są wielkościami stałymi, jeden jest pewną funkcją odkształceń lub naprężeń, chwilowo nieznaną, którą można określić za pomocą dodatkowego równania warunku plastyczności (2). Przyjmując w równaniu (3)

otrzymujemy równanie teorii plastyczności **Levy'ego-Misesa** $a_1 = a_2 = 0, a_4 = 1, a_3 = -\lambda$

$$D_{\dot{\varepsilon}} = \lambda D_{\dot{\sigma}} \quad (4).$$

Uwzględniając dodatkowo odkształcenia sprężyste przez przyjęcie

$$a_2 = -\frac{1}{2G}$$

otrzymujemy równanie teorii plastyczności **Prandtla-Reussa**

$$D_{\dot{\varepsilon}} = \lambda D_{\dot{\sigma}} + \frac{1}{2G} D_{\dot{\sigma}} \quad (5)$$

Podstawowe teorie plastyczności {2}

Teorie plastyczności Levy'ego-Misesa i Prandtla-Reussa są z grupy **teorii plastycznego płynięcia**. Wyróżnikiem tych teorii jest to, że uwzględniają **prędkości dewiatora odkształcenia**.

Przyjmując $a_2 = a_4 = 0, a_3 = 1, a_1 = -\varphi$

otrzymujemy równania teorii plastyczności **Hencky'ego-Iljuszina**:

$$D_\varepsilon = \varphi D_\sigma \quad (6)$$

Zwanej teorią małych **sprężysto-plastycznych odkształceń**

λ lub φ

W równaniach (5) i (6) niewiadomą funkcją, którą chcemy wyznaczyć jest

Dla przykładu podamy metodę wyznaczania funkcji- parametru w równaniu Leviego-Misesa. W przypadku materiału idealnie plastycznego.

Oznaczmy składowe normalne dewiatorów naprężeń i prędkości odkształceń przez $\sigma_D, \dot{\varepsilon}_D$. Składowe styczne są równe wprost odpowiednim składowym $\tau = \sigma_{ij}, \gamma/2 = \varepsilon_{ij} (i \neq j)$

Mnożąc każde z dziewięciu równań (5) przez odpowiednią składową dewiatora naprężeń i sumując stronami otrzymujemy

$$(71) \quad \sigma_{xD} \dot{\varepsilon}_{xD} + \sigma_{yD} \dot{\varepsilon}_{yD} + \sigma_{zD} \dot{\varepsilon}_{zD} + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz} \dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} =$$

Podstawowe teorie plastyczności {3}

$$= \lambda [\sigma_{xD}^2 + \sigma_{yD}^2 + \sigma_{zD}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (7p)$$

Lewa strona równania (7l) przez analogię do energii sprężystej nazywana jest **mocą odkształcenia plastycznego** i oznaczana przez **W**

Intensywność naprężeń daje się wyrazić przez składowe dewiatora naprężeń w postaci:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_{xD}^2 + \sigma_{yD}^2 + \sigma_{zD}^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Zatem w przypadku materiału idealnie plastycznego równanie (7l=7p) przyjmie postać

$$W = \frac{2}{3} \lambda f_y^2 \Rightarrow \lambda = \frac{3W}{2f_y^2}$$

Powyższe związki definiują układ równań, w których po obu stronach występują pochodne względem czasu. Mnożąc je formalnie przez dt, rugujemy czas w zupełności, uzyskując związki w postaci

$$d\varepsilon_{xD} = \frac{3}{2f_y^2} (\sigma_{xD} d\varepsilon_{xD} + \sigma_{yD} d\varepsilon_{yD} + \sigma_{zD} d\varepsilon_{zD} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}) \sigma_{xD}, \quad \left. \vphantom{d\varepsilon_{xD}} \right\}$$

Postać związków (8) dowodzi, że czas w tej teorii plastyczności jest czynnikiem ubocznym, a skala czasu nie ma żadnego znaczenia. , w przeciwieństwie do związków reologicznych, (o których w dalszej części wykładu).

Powyższe związki opisują **proces obciążania**.

Proces odciążania: przyjmuje się, że ma on charakter sprężysty, czyli że przy odciążaniu przyrosty (ujemne) naprężeń są proporcjonalne do przyrostów odkształceń. Odpowiednie prawo zmiany postaci można zapisać wzorem ogólnym w postaci różniczkowej

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{2G} D_{\sigma}$$

Wynika stąd, jeżeli dewiator naprężeń i dewiator odkształceń w chwili rozpoczęcia się procesu odciążenia oznaczmy \tilde{D}_{ε} i \tilde{D}_{σ} to

$$\tilde{D}_{\varepsilon} - D_{\varepsilon} = \frac{1}{2G} (\tilde{D}_{\sigma} - D_{\sigma}).$$

Prawo zmiany objętości pozostaje oczywiście w postaci standardowej TS