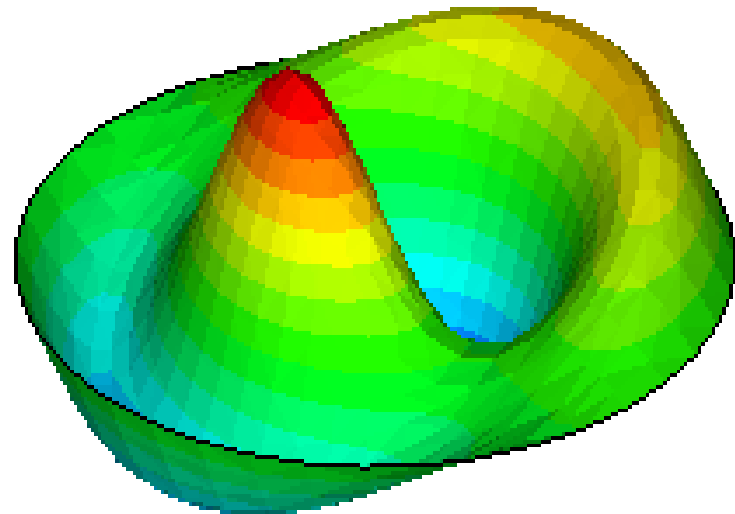
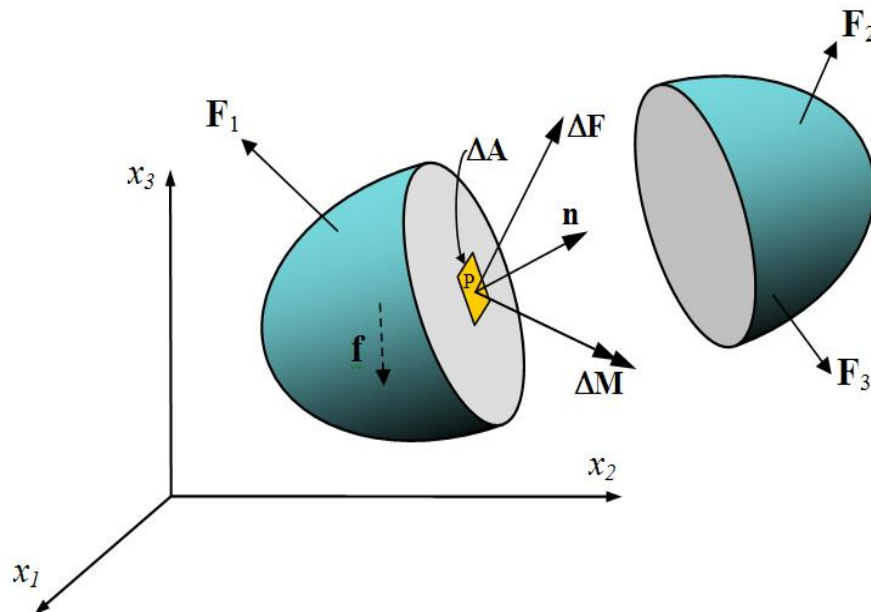


Teoria sprężystości i plastyczności

Wykład 3: Metody rozwiązywania ZBTS i proste przykłady

Leszek CHODOR dr inż. bud, inż.arch.
leszek@chodor.co



Literatura:

- [1] Timoschenko S. Goodier A.J.N., Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951
- [2] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów dla Wydziałów budowlanych, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [3] Rakowski G., Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa, 1979
- [4] Bower A., Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University Spring 2005,
- [5] Lebedev L.P., Cloud M.J., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010
- [6] Chodor L., publikacje własne - różne.
- [7] Strony www [dostępne luty 2011] - różne

Metody rozwiązywania zagadnień

teorii sprężystości

Równania Cauchy'ego

→ Warunki nierozdzielności
(eliminujemy przemieszczenia)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Równania Hooke'a (odkształcenia
wyrażamy przez naprężenia) i w rezultacie
mamy związki między naprężeniami

Metoda sił:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0$$

(+) **Równania Naviera** : układ równań, który zawiera tylko niewiadome funkcje naprężeń

**Metoda
przemieszczeń:**

Równania Hooke'a (naprężenia
wyrażamy przez odkształcenia)

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{ij}, \dots (i, j = 1, 2, 3)$$

→ **Równania Cauchy'ego** -
otrzymujemy naprężenia wyrażone przez
przemieszczenia

→ **Równania Naviera**) : układ trzech równań, który zawiera tylko funkcje naprężeń
przemieszczeń

Metoda mieszane: Kombinacja powyższych metod w zależności od konkretnego zadania

Techniki rozwiązania ZBTS:

- 1) **bezpośrednie** → trudne matematycznie (zaawansowany aparat matematyczny równań różniczkowych),
- 2) **półodwrotne** (przypuszczania) → **podejście statyczne** | **podejście kinematyczne**

lecz podstawowy sposób → **minimalizacja funkcjonalu** metodą **bezpośrednią** + numerycznie

Funkcje statycznie dopuszczalne.

Przypuszczamy (zgadujemy) macierz naprężeń, ale taką która spełnia **równania Naviera** i statyczne warunki brzegowe

→ Równania Hooke'a – dla przyjętych funkcji naprężeń obliczamy funkcje odkształceń.

→ Sprawdzamy równania nierozdzielności odkształceń: jeśli nie będą spełnione, to nie ma sensu dalej zadania rozwiązywać – musimy przypuścić inną macierz naprężeń

→ ~~R~~ównania Cauchy'ego: obliczamy funkcje przemieszczeń

→ Sprawdzamy kinematyczne warunki brzegowe. Jeśli są spełnione, to znaleźliśmy rozwiązanie ZBTS (spełnione są wszystkie równania !!!)

Podejście kinematyczne:
przypuszczamy funkcje przemieszczeń, ale takie, które spełniają kinematyczne warunki brzegowe i są klasy C^1

→ Równania Cauchy'ego:

Obliczamy odkształcenia dla przyjętych przemieszczeń.

→ Równania Hooke'a obliczamy funkcje naprężeń z odkształceń.

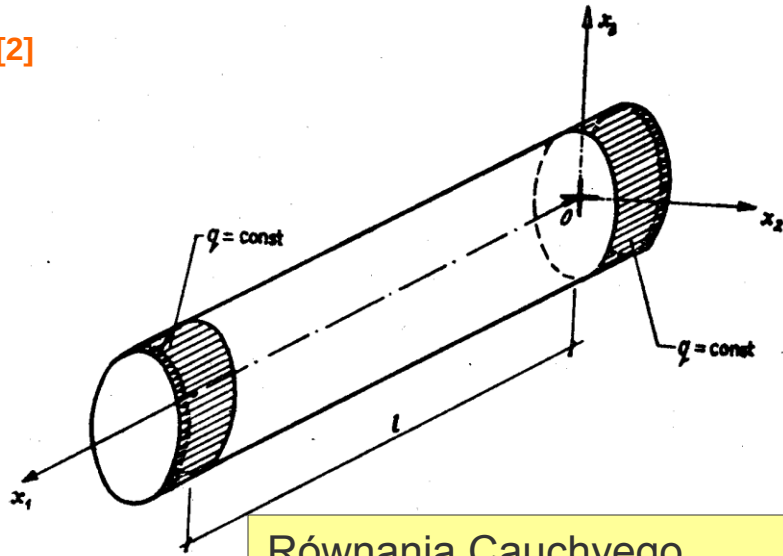
Funkcje kinematycznie dopuszczalne.

→ Sprawdzamy **równania Naviera**) : jeśli obliczone naprężenia spełniają te równania i statyczne warunki brzegowe, to rozwiązaliśmy ZBTS !!! W przeciwnym przypadku trzeba poprawić przypuszczenie przemieszczeń

Uwagi: 1) Mamy możliwość niezbyt precyzyjnego przypuszczenia naprężeń (lub przemieszczeń) z pewnymi parametrami (skalarnymi lub funkcyjnymi) , które mogą być dobierane z warunku najlepszego dopasowania do równań Cauchy'ego (lub Naviera) na końcu procesu rozwiązania.

Rozwiązanie ZBTS – czyste rozciąganie

[2]



Równania Cauchyego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

+ kinematyczne warunki brzegowe

a) w utwierdzeniu O(0,0,0)

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$$

Prawo
Hooke'a

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}$$

(analogicznie dla pozostałych funkcji odkształceń)

Sformułowanie ZBTS

Równania Naviera

+ statyczne warunki
brzegowe:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{12}\alpha_{v2} + \sigma_{13}\alpha_{v3} \\ 0 &= \sigma_{22}\alpha_{v2} + \sigma_{23}\alpha_{v3} \\ 0 &= \sigma_{32}\alpha_{v2} + \sigma_{33}\alpha_{v3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0$$

$$q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj}$$

a) na pobocznicach:

$$\alpha_{v1} = 0,$$

$$\alpha_{v2} \neq 0,$$

$$\alpha_{v3} \neq 0,$$

$$q_{vi} = 0 (i = 1, 2, 3)$$

b) na
ściankach
Poprzecznych
 $x_1=0$ i $x_1=l$:

$$\alpha_{v1} = 0,$$

$$\alpha_{v2} \neq \pm 1, \alpha_{v2} = \alpha_{v3} = 0,$$

$$q_{v1} \neq \pm q, q_{v2} = q_{v3} = 0$$

$$\begin{aligned} \pm q &= \sigma_{11}(0, l), \\ 0 &= \sigma_{21}(0, l), \\ 0 &= \sigma_{31}(0, l) \end{aligned}$$

Metoda statyczna: przypuszczenie macierzy naprężeń

1. na podstawie: 1) analogii do innych rozwiązań, 2) obserwacji zachowań się bryły pod obciążeniem, 3) pomiaru naprężeń na powierzchni bryły, INTUICJI, **przypuścić macierz naprężeń**: Łatwo sprawdzić, że macierz ta spełnia warunki równowagi i statyczne warunki

2. obliczyć **macierzy odkształceń** - z równań Hooke'a :

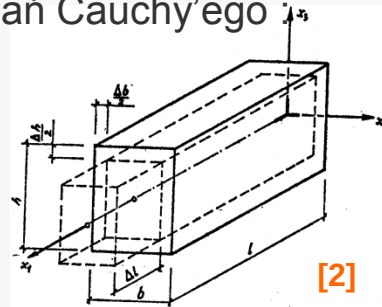
3. sprawdzić warunki nierozdzielności (wiążą drugie pochodne odkształceń), ponieważ $\varepsilon = \text{const}$, więc są spełnione tożsamościowo: **2. Hurra !**

Zał: $P_i = 0$

4. obliczenie **wektora przemieszczeń** - z równań Cauchy'ego

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{q}{E}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\nu \frac{q}{E}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\nu \frac{q}{E}, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0, \end{aligned} \right\}$$



$$\varepsilon = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{q}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{q}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{q}{E} \end{bmatrix}$$

← Niejednorodny układ równań różniczkowych. Rozwiązanie jest sumą: (1) całki ogólnej (układu jednorodnego) i (2) całki szczególnej

5. Uwzględnić **kinematyczne warunki brzegowe** w (1)+(2) → (3), **3. Hurra !!! (ściśle)**

$$(3) \dots u_1 = \frac{q}{E} x_1; u_2 = -\nu \frac{q}{E} x_2; u_3 = -\nu \frac{q}{E} x_3$$

$$(1) \dots u_1^O(x_2, x_3) = a + bx_2 + cx_3,$$

$$u_2^O(x_1, x_3) = d - bx_1 + fx_3,$$

$$u_3^O(x_1, x_2) = g - cx_1 - fx_2$$

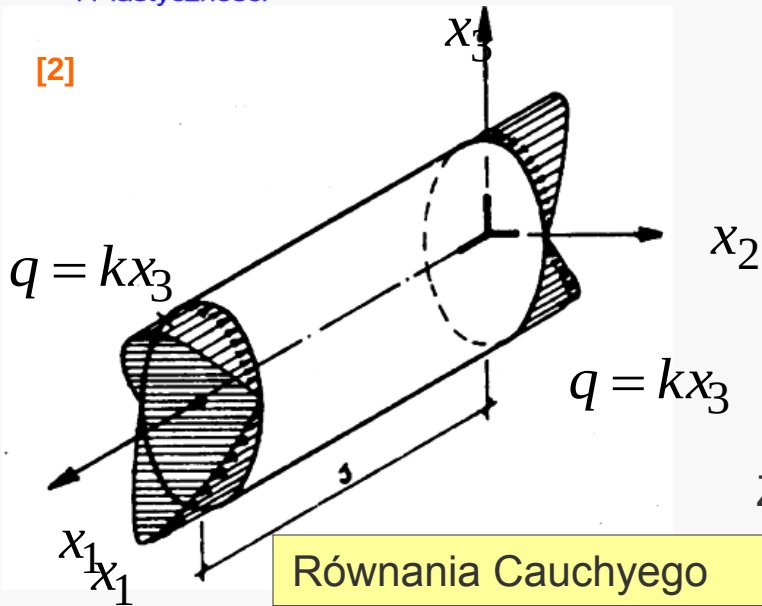
$$(2) \dots u_1^S = \frac{q}{E} x_1,$$

$$u_2^S = -\nu \frac{q}{E} x_2,$$

$$u_3^S = -\nu \frac{q}{E} x_3$$

Rozwiązanie ZBTS – czyste zginanie (proste → siły przekrojowa M)

[2]



Sformułowanie ZBTS

Równania Naviera

+statyczne warunki
brzegowe:

a) na pobocznicy – jak
poprzednio (pręt rozciągany)

b) na ściankach poprzecznych $x_1=0$ i $x_1=l$:

Zał: $P_i=0$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0$$

$$Q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj}$$

$$\begin{aligned} \pm kx_3 &= \sigma_{11}(0, s), \\ 0 &= \sigma_{12}(0, s), \\ 0 &= \sigma_{13}(0, s) \end{aligned}$$

Równania Cauchyego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

2b. Kinematyczne warunki
brzegowe

a) w utwierdzeniu O(0,0,0) jak
poprzednio (pręt rozciągany)

3. Prawo Hooke'a

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}$$

(analogicznie dla pozostałych funkcji odkształceń)

**1. Przypuszczona macierz
naprężeń**

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} -kx_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić,
że macierz ta
spełnia warunki
równowagi i
statyczne warunki
brzegowe: **1.**
Hurra !

2. obliczyć **macierzy odkształceń** - z równań Hooke'a :

3. sprawdzić warunki nierozdzielności - są spełnione
tożsamościowo: **2. Hurra !**

$$\varepsilon = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\frac{kx}{E} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{k}{E} x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{k}{E} x_3 \end{bmatrix}$$

4. obliczenie **wektora przemieszczeń** - z równań Cauchy'ego → całkujemy niejednorodny układ równań różniczkowych – analogicznie jak poprzednio i otrzymamy:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{k}{E} x_1 \cdot x_3 + a + bx_2 + cx_3, \\ u_2 &= -\nu \frac{k}{E} x_2 \cdot x_3 + d + bx_1 + fx_3, \\ u_3 &= \frac{k}{2E} (x_1^2 - \nu x_2^2 + \nu x_3^2) + g - cx_1 - fx_2, \end{aligned}$$

5. Uwzględnić **kinematyczne warunki brzegowe**: **3. Hurra !!!**

$$a = b = c = d = f = g = 0$$

W zapisie technicznym:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] = [x, y, z]; \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3] = [u, v, w]; \alpha_v = [\alpha_{v1}, \alpha_{v2}, \alpha_{v3}] = [m, n, l]$$

$$u = -\frac{k}{E} xz, v = -\nu \frac{k}{E} yz, w = \frac{k}{2E} (x^2 \nu y^2 + \nu w^2)$$

Przemieszczenia na osi pręta: $u = 0; v = 0; w = \frac{kx^2}{2E}$, gdzie k - parametr obciążenia $k = M / J_y$

$$\frac{k}{E} = \left| w''(x) \right| = \frac{1}{\rho(x)}$$

Analizując uzyskane rezultaty można wykazać, np. prawo płaskich przekrojów Bernoulliego: przekroje płaskie w konfiguracji początkowej pozostają płaskie i prostopadłe do ugiętej osi pręta po odkształceniu

• y, z – główne, centralne osie bezwładności

* pręt nieważki

* utwierdzony w pkt O

Założenia:

1. słuszna jest zasada płaskich przekrojów Bernoulliego (w zginaniu poprzecznym jest zachowana tylko przybliżeniu)
- 2, naprężenia σ_y i σ_z są nieporównanie małe w stosunku do σ_x (wynika z prostego doświadczenia)

Z założenia 1 i 2 wynika [2], że

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{J_y} z$$

Wyznaczenie naprężeń stycznych w ogólności jest trudnym zadaniem, bo np. zależy od kształtu przekroju poprzecznego. Dlatego wyznaczmy naprężenia średnie z warunków równowagi [2] (wzór Żurawskiego)

[2]

Ponieważ z równania Naviera wynika:

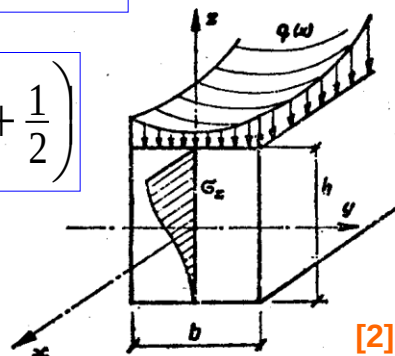
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\sigma_z = - \int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz + c(x, y)$$

$$\sigma_z = -q(x) \left(\frac{3z}{2h} - 2 \frac{z^3}{h^3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{Q(x) S_y^I(z)}{J_y b(z)}$$

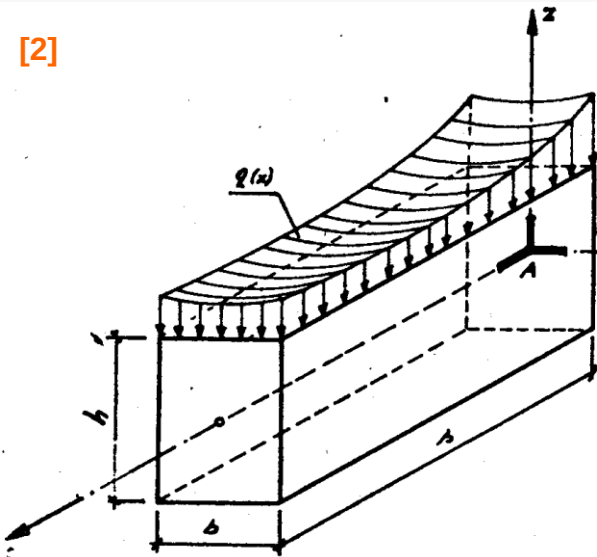
$$\tau_{xy}(x, z) = \frac{Q(x) S_y^I(z)}{J_y h(y)}$$



[2]

Gdzie funkcję $c(x, y)$ dobieramy z warunku spełnienia statycznych warunków brzegowych na krawędziach przekroju, a dla przekroju prostokątnego $b \times h$, otrzymamy [2].

[2]



Sprawdzenie statycznych warunków brzegowych na pobocznicę $y = \pm b/2$. Wobec $q_{vx} = q_{vy} = q_{vz} = 0$ i $a_{vx} = a_{vz} = 0$ i $a_{vy} = \pm 1$, mamy

$$0 = \pm \tau_{xy}, 0 = \pm \sigma_y, 0 = \pm \tau_{zy}$$

na pobocznicę $y = \pm h/2$. Wobec $q_{vx} = q_{vy} = q_{vz} = -q(x) \parallel 0$ i $a_{vx} = a_{vz} = 0$ i $a_{vy} = \pm 1$, mamy

$$0 = \pm \tau_{xy}, 0 = \pm \tau_{yz} - q(x) \parallel 0 = \pm \sigma_z$$

Warunki brzegowe na pobocznicę $\rightarrow$ ściśle spełnione

Analogicznie możemy wykazać, że warunki brzegowe na ściankach czołowych $\rightarrow$ spełnione [2]

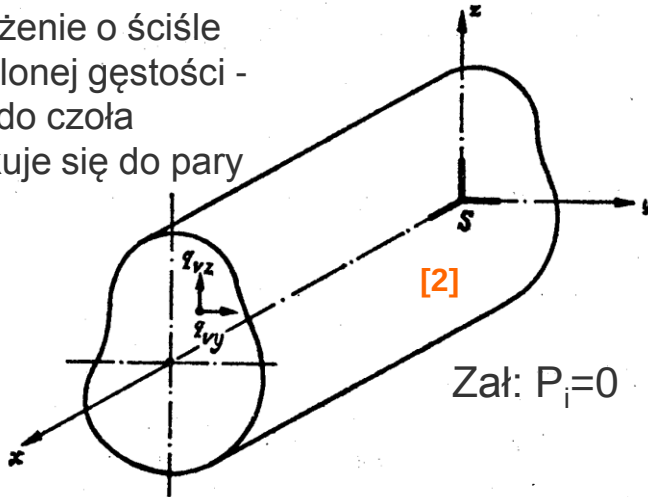
Wniosek: macierz naprężeń uzupełniona elementem $\leftarrow \sigma_z$! Ściśle spełnia równania Naviera i statyczne warunki brzegowe $\rightarrow$ 2. Hurra !

Po obliczeniu macierzy odkształceń z prawa Hooke'a , sprawdzamy warunki nierozdzielności

Niestety – nie są spełnione **Ojej !!!** : Macierz naprężeń $[\sigma]$ nie jest więc macierzą rzeczywistą, a przedstawia tylko zbiór funkcji przybliżających rozwiązanie.

Sformułowanie ZBTS . Podejście kinematyczne

obciążenie o ściśle określonej gęstości - tylko do czoła redukuje się do pary



Równania Naviera ze statycznymi warunkami brzegowymi

a) na poboczniczy – jak poprzednio (pręt rozciągany)

b) na ściankach poprzecznych $x_1=0$ i $x_1=s$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_x(\pm 1) \\ q_{vy} &= \tau_{yx}(\pm 1), \\ q_{vz} &= \tau_{zx}(\pm 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_{xy}m + \tau_{xz}n, \\ 0 &= \sigma_y m + \tau_{yz}n, \\ 0 &= \tau_{zy}m + \sigma_z n \end{aligned}$$

Równania Cauchyego z kinematycznymi warunkami brzegowymi

w utwierdzeniu $S(0,0,0)$

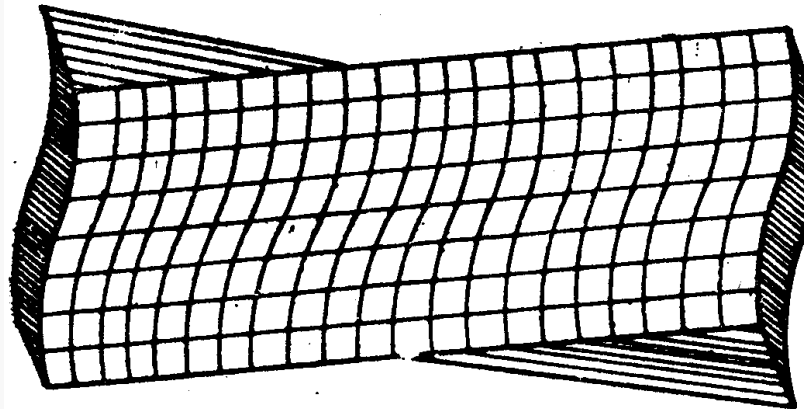
$$\begin{aligned} u &= v = w = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Równania Hooke'a

1. Przypuścić funkcje przemieszczeń

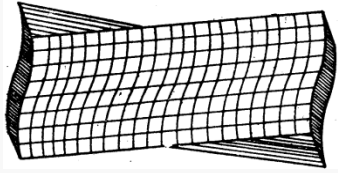
Funkcje przemieszczeń przyjmujemy opierając się na obserwacji.

[2]



$$\alpha = \Theta x,$$

α – kat skręcenia, Q – jednostkowy kat skręcenia



Rozwiązanie ZBTS – czyste skręcanie (proste → siły przekrojowa M)

Pierwsza funkcja wektora przemieszczenia założymy w klasie funkcji niezależnych od x (wszystkie przekroje po długości pręta deplanują się tak samo w zależności od nieznanej jeszcze funkcji - parametru

$$u = \Theta \varphi(y, z), v = -\Theta xz, w = \Theta xy$$

1. Sprawdzić kinematyczne warunki brzegowe. → będą spełnione jeśli w pkt $S(0,0,0)$

$$\varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \leftarrow \text{Funkcję } \varphi, \text{ należy dobierać tak by te warunki były spełnione (parametry dobieramy na końcu zadania)}$$

2. Obliczyć macierz odkształceń - z równań Cauchy'ego

3. Obliczyć macierz naprężeń- z równań Hooke'a

4. Sprawdzić warunki równowagi Naviera. Dobrać parametry zależnie od warunków brzegowych

Drugie i trzecie równanie Naviera jest spełnione tożsamościowo. Natomiast pierwsze przyjmuje postać

$$\Theta G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Theta G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

Pokazaliśmy więc, że funkcja paczenia jest funkcją biharmoniczną, a rozwiązanie ZBTS skręcania sprowadza się do doboru funkcji paczenia, a ponadto spełniać warunki brzegowe, które można zapisać [2] → (i wówczas mamy rozwiązanie ścisłe ZBTS)

$$q_{vy} = \Theta G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - z \right) (\pm 1),$$

$$q_{vz} = \Theta G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - y \right) (\pm 1)$$

Istota metod wariacyjnych

Większość zadań TS sprowadza się do rozwiązywania **równań różniczkowych** z warunkami brzegowymi, co jest często trudne ze względów rachunkowych, ale też formalnych. Dlatego ważne są metody wariacyjne, które formułują metody otrzymania rozwiązania przybliżonego z żadaną dokładnością.

Idea metod wariacyjnych polega na tym, że mając zadanie brzegowe, często udaje się podać **wyrażenie całkowite** $I[\varphi]$, określone dla funkcji φ pewnej klasy, które przyjmuje swoje minimum właśnie dla szukanego rozwiązania ZBTS.

Rozwiązanie równania różniczkowego jest więc równoważne zrealizowaniu minimum całki $I[\varphi]$.

Problem podstawowy rachunku wariacyjnego. Równanie Eulera

Spośród funkcji $\varphi(\mathbf{x})$, **przyjmujących na końcach przedziału zadane wartości**: $\varphi(\mathbf{a})=\mathbf{A}$, $\varphi(\mathbf{b})=\mathbf{B}$ i **mających w nim ciągłą pochodną** znaleźć te dla których całka I przyjmuje minimum.

$$I[\varphi] = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi') dx \quad (W.1)$$

Z matematyki pamiętamy, że jeśli istnieje rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{y}(\mathbf{x})$, tj. jeśli istnieje funkcja, dla której całka ma wartość najmniejszą, to $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ musi spełniać tak zwane równanie Eulera i zadane warunki brzegowe

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

To znaczy z każdym funkcjonałem stowarzyszone jest równanie różniczkowe, a sposób minimalizacji funkcjonału będziemy nazywać minimalizacją pośrednią

Problem odwrotny rachunku wariacyjnego – podstawowy dla ZBTS

Poszukiwać będziemy rozwiązania odwrotnego. Znając warunek konieczny (równanie różniczkowe ZBTS) poszukiwać będziemy postaci funkcjonału i minimalizować go metodą bezpośrednią (czyli całkę bez) np. metodą Ritza

Metoda Ritza minimalizacji funkcjonału

Metoda Ritza jest najprostszym sposobem szukania minimum funkcjonału. Niech funkcjonał (W.1) będzie tym dla którego szukamy funkcji realizującej minimum.. Szukać będziemy $\varphi(\mathbf{x})$ w klasie funkcji dopuszczalnych, to znaczy w klasie funkcji spełniających warunki brzegowe. W metodzie Ritza ograniczamy się do **kombinacji liniowej jednomianów funkcji Ritza**, spełniających warunki brzegowe.

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) + \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(x) \quad (W.2)$$

Podstawiając (W.2) do (W.1) i wykonując zaznaczone tam operację różniczkowania i całkowania otrzymamy funkcję n zmiennych a_i :

$$I = I(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (W.3)$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (W.4)$$

Uzyskujemy układ równań algebraicznych do wyznaczenia stałych funkcji Ritza (W.2). Dla celów praktycznych wystarczy uwzględnić jedynie kilka składników sumy (W.2), a dokładność rozwiązania sprawdzamy w ten sposób, że mając określone funkcje $\varphi_k(\mathbf{x})$ i $\varphi_{k+1}(\mathbf{x})$ obliczamy ich **wartości w wybranych** punktach i jeśli różnić się będą mniej od założonej dokładności, to funkcję $\varphi_k(x)$ uważamy za rozwiązanie ZBTS.

Odpowiednie funkcjonały $I[\varphi]$ dla zagadnień teorii sprężystości określa się **z zasady prac przygotowanych**, czyli na bazi metod energetycznych. Do tego celu przydatne jest zredukowanie układu równań ZBTS w przemieszczeniach (**równania Lamego**) lub w naprężeniach (**Beltramiego-Michela**).

Linia ugięcia belki na sprężystych podporach

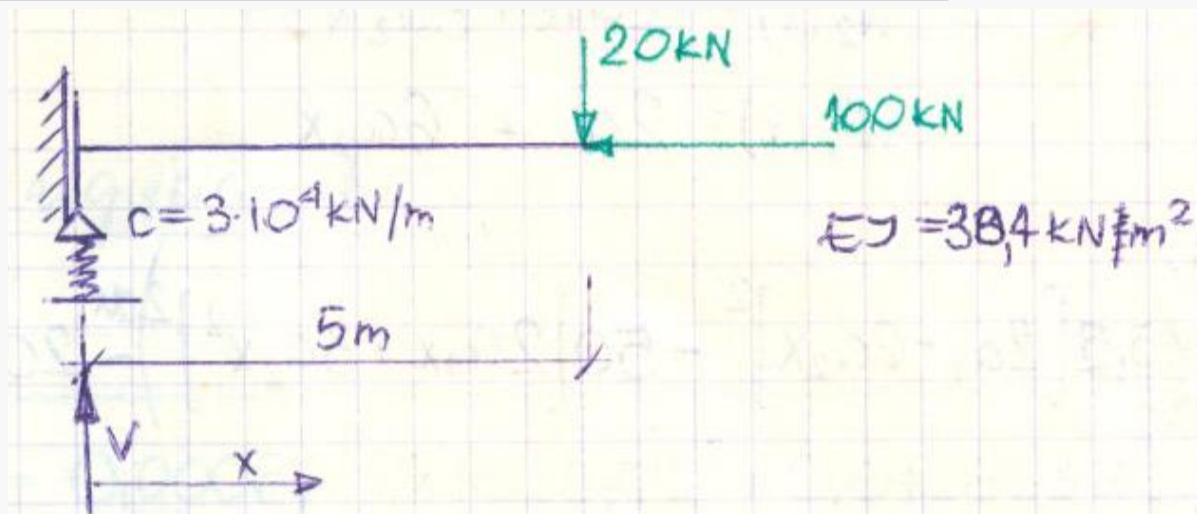
Znaleźć linię ugięcia belki jak na rysunku metodą Ritza.

Ograniczyć się do drugiego przybliżenia.

Rozwiązanie:

1. Warunek brzegowy na podporze.

Reakcja $V = 20 \text{ kN}$, Przemieszczenie $w(x=0) = V/c = 20/30000 = 0,00067 \text{ m}$.



2. Rozwiązanie poszukujemy w klasie funkcji dopuszczalnych:

$$w_n(x) = \varphi_0 + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x)$$

gdzie $\varphi_0 = 0,00067, \varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x^3$

3. Sprawdzenie spełnienia warunków brzegowych: $w_n(0) = 0,00067 + 0 + 0, w'_n(0) = 0 + 0 + 0 = 0$

4. **Funkcjonał Lagrange'a** dla belki na sprężystym podłożu ze współczynnikiem sprężystości k np. [2] (z wytrzymałości materiałów) przyjmuje postać.

$$V = \int_0^l \left\{ \frac{EJ}{2} [w''(x)]^2 - \frac{N}{2} [w'(x)]^2 + \frac{k}{2} [w(x)]^2 - q(x)w(x) \right\} dx - \sum_k P_k w(x_k) - \sum_k M_k w'(x_k)$$

Wobec $k=q=M_k=0$, funkcjonal
Lagrange'a przyjmie postać

$$V = \int_0^l \left\{ \frac{EJ}{2} [w''(x)]^2 - \frac{N}{2} [w'(x)]^2 \right\} dx - \sum_k P_k w(x_k) -$$

5. Zestawienie pochodnych funkcji Ritza oraz wyrachowanie funkcjonału

$$w_2(x) = \varphi_0 + a_1 x^2 + a_2 x^3, w_2'(x) = 2a_1 x + 3a_2 x^2, w_2''(x) = 2a_1 + 6a_2 x$$

$$V = \int_0^5 \left(15,2 [2a_1 + 6a_2 x]^2 - 50 [2a_1 x + 3a_2 x^2]^2 \right) dx - 20 (\varphi_0 + a_1 \cdot 5^2 + a_2 \cdot 5^3)$$

$$V = \int_0^5 \left[15,2 (4a_1^2 + 24a_1 a_2 x + 36a_2^2 x^2) - 50 (4a_1^2 x^2 + 12a_1 a_2 x^3 + 9a_2^2 x^4) \right] dx +$$

$$- 20 (0,00067 + 25a_1 + 125a_2)$$

$$V = \int_0^5 (60,8a_1^2 + 364,8a_1 a_2 x + 547,2a_2^2 x^2 - 200a_1^2 x^2 - 600a_1 a_2 x^3 +$$

$$- 450a_2^2 x^4) dx - 0,0134 - 500a_1 - 2500a_2$$

$$V = \left[60,8a_1^2 x + \frac{364,8}{2} a_1 a_2 x^2 + \frac{547,2}{3} a_2^2 x^3 - \frac{200}{3} a_1^2 x^3 - \frac{600}{4} a_1 a_2 x^4 + \right.$$

$$\left. - \frac{450}{5} a_2^2 x^5 \right]_0^5 - 0,0134 - 500a_1 - 2500a_2$$

$$V = -8029,3a_1^2 - 258450a_2^2 - 89190a_1 a_2 - 500a_1 - 2500a_2 +$$

$$- 0,0134$$

6. Pochodne i warunek minimum funkcjonału

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a_1} = -16058,6 a_1 - 89190 a_2 - 500 \\ \frac{\partial V}{\partial a_2} = -89190 a_1 - 516900 a_2 - 2500 \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0$$

7. Przybliżona linia ugięcia belki

$$\begin{cases} 16058,6 a_1 + 89190 a_2 = -500 \\ 89190 a_1 + 516900 a_2 = -2500 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,102577 \\ a_2 &= 0,012863 \end{aligned}$$

$$w_2(x) = 0,00067 - 0,102577 x^2 + 0,012863 x^3$$

Dokładność aproksymacji można oszacować zwiększając rząd wielomianu aproksymacyjnego do III przybliżenie, np. poprzez przyjęcie ...

$$\varphi_0 = 0,00067, \varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x^3, \varphi_3 = x^4$$

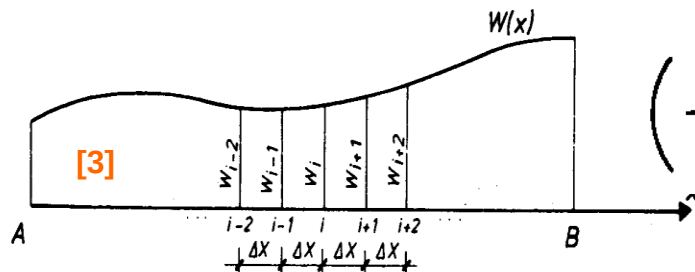
1. Miejsce metody różnic skończonych (MRS) w teorii sprężystości (TS)

Idea MRS została zaproponowana już przez Carla Fridricha Gaussa, lecz dopiero w erze komputerowej znalazła ona szersze zastosowanie. Jest to ogólna metoda rozwiązywania równań różniczkowych. Polega ona na zastąpieniu równania różniczkowego układem równań różnicowych, więc w sprowadzeniu problemu do rozwiązywania układu równań algebraicznych lub do problemu wartości i wektorów własnych macierzy.

Jest metodą pojęciowo prostą, lecz trudną do uniwersalnego zalgorytmizowania, szczególnie w obszarze warunków brzegowych. Dlatego została praktycznie zastąpiona przez metodę elementów skończonych (MES). W niniejszym wykładzie metodę pokażemy ze względu na wartość historyczną, ale też możliwość szybkiego zastosowania (bez potrzeby znajomości zawitych teorii praktycznie w każdym indywidualnym przypadku zagadnienia inżynierskiego).

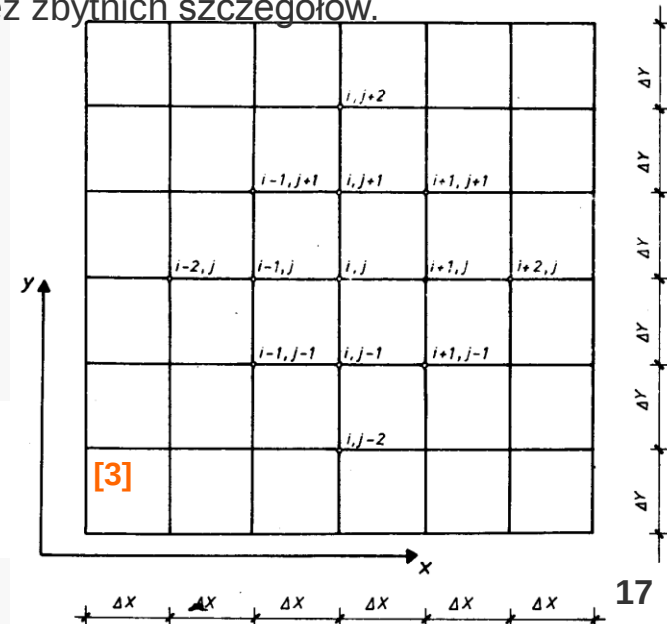
Najprostsze w zastosowaniu są różnice centralne, choć oprócz różnic centralnych istnieje wiele metod aproksymacji pochodnych przez ilorazy różnicowe. W ogólności dokładność wyników MRS zależy od sposobu aproksymacji pochodnych oraz sposobu podziału rozpatrywanego obszaru na elementy. MRS służy do rozwiązywania równań różniczkowych, ale pokazujemy ją dla porządku bez zbytnich szczegółów.

2 Różnice centralne



$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \Delta x}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x \Delta y} \right)_{i,j} = \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y}$$



2. Różnice centralne cd [3] Wybrane wzory różnicowe

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{i,j}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right)_{i,j},$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^2 \Delta y}\right)_{i,j}, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x \Delta y^2}\right)_{i,j}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}\right)_{i,j}, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta y^3}\right)_{i,j}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4}\right)_{i,j}, \quad \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4}\right)_{i,j}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{i,j} \approx \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2}\right)_{i,j}$$

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \Delta x}$$

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}\right)_i = \frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2 \Delta x^3}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4}\right)_i = \frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4}$$

$$\left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^2 \Delta y}\right)_{i,j} = \frac{2(w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2 \Delta x^2 \Delta y}$$