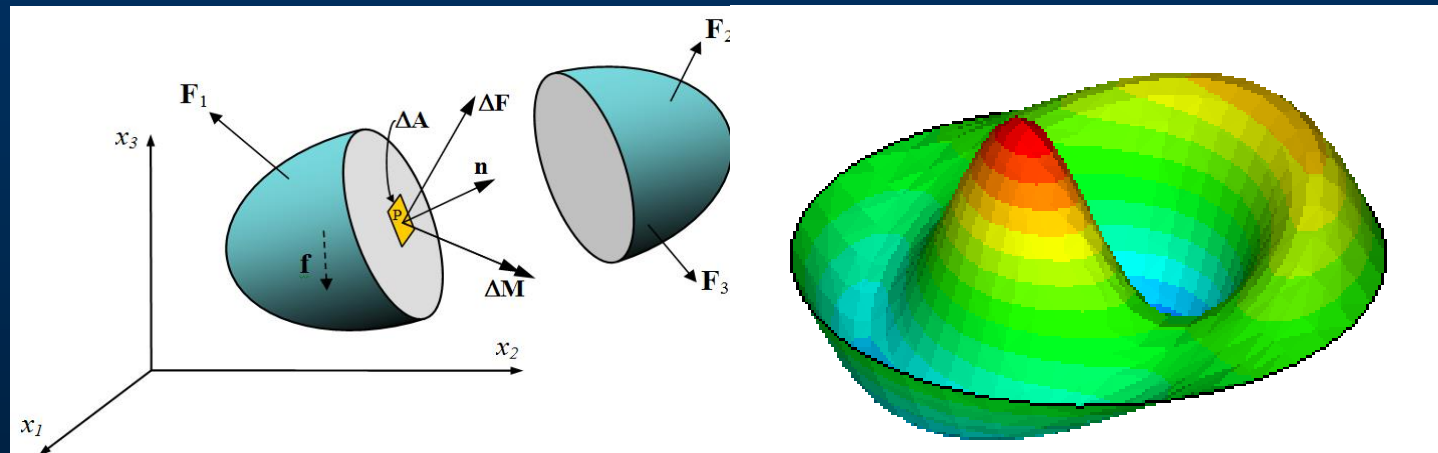


Teoria sprężystości i plastyczności

Wykład 2: Stan naprężeń i odkształceń

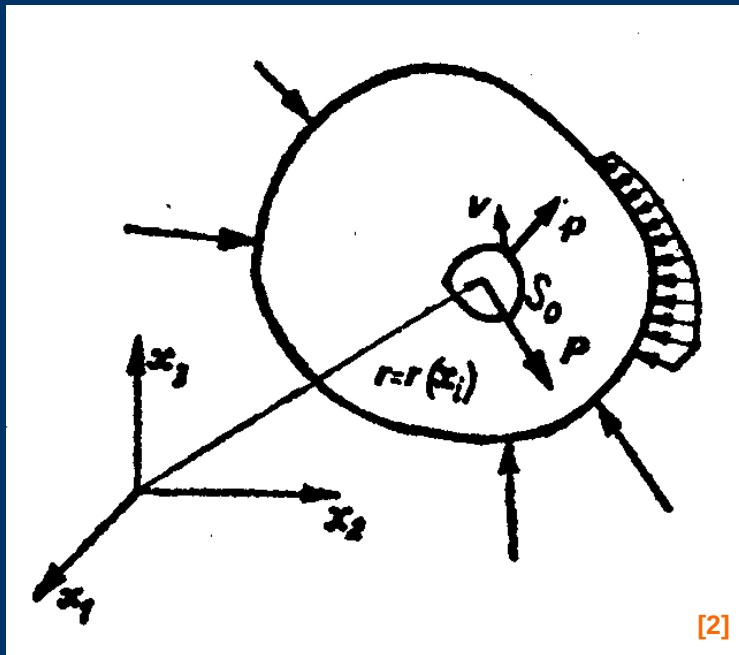


Leszek CHODOR , dr inż. bud, inż.arch.

leszek@chodor.pl ; leszek.chodor@polskie-inwestycje.pl

Literatura:

- [1] Timoschenko S. Goodier A.J.N., Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951
- [2] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów dla Wydziałów budowlanych , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [3] Rakowski J., Teoria sprężystości, Almamater, Politechnika Poznańska, 2003/2004
- [4] Bower A., Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University Spring 2005,
- [5] Lebedev L.P., Cloud M.J., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010
- [6] Chodor L., publikacje własne - różne.
- [7] Strony www [dostępne luty 2011] - różne



Bryła określona w układzie (x_i) jest obciążona układem sił zewnętrznych pozostających w równowadze ($Z=0$). Z wnętrza tej bryły o objętości V wycinamy dowolny element o objętości V_0 i powierzchni S_0 .

Na każdy punkt powierzchni S_0 działają siły wewnętrzne o gęstości $\mathbf{p}_v$, a na każdy punkt wewnątrz elementu V_0 działają siły masowe o gęstości $\mathbf{P}$ (wcześniej oznaczaliśmy $\mathbf{G}$).

Zgodnie z twierdzeniem o równoważności układów sił wewnętrznych i zewnętrznych układ sił działających na wycięty element objętościowy jest układem równoważnym układowi zerowemu.

Spełnione więc muszą być warunki: $\mathbf{S}=0$ i $\mathbf{M}=0$

Warunki te możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \iint_{S_0} \mathbf{p}_v dS_0 + \iiint_{V_0} \mathbf{P} dV_0 = \mathbf{0} \wedge \mathbf{M}_0 = \\ &= \iint_{S_0} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_v dS_0 + \iiint_{V_0} \mathbf{r} \times \mathbf{P} dV_0 = \mathbf{0} \quad (25) \end{aligned}$$

Przydatne twierdzenia matematyczne:

Tw 1. o współrzędnych iloczynu wektorowego:

Twierdzenie (o współrzędnych iloczynu wektorowego). *Jeżeli dane są dwa wektory $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, to współrzędne wektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ możemy zapisać*

$$c_i = e_{ijk} a_j b_k,$$

gdzie e_{ijk} jest symbolem Ricciego zdefiniowanym następująco:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy wskaźniki tworzą permutację parzystą,} \\ -1, & \text{gdy wskaźniki tworzą permutację nieparzystą,} \\ 0, & \text{gdy co najmniej dwa wskaźniki są równe.} \end{cases}$$

Tw.2. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego (o zamianie całki powierzchniowej na objęściową):

Twierdzenie (Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego). *Jeśli dany jest obszar V , ograniczony zamkniętą gładką powierzchnią S zorientowaną zewnętrznio, oraz jeśli w obszarze domkniętym $V+S$ dane są trzy funkcje $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$ i $R(x_1, x_2, x_3)$ klasy co najmniej C_1 , to zachodzi równość*

$$\iint_S [P \cos(\mathbf{n}, x_1) + Q \cos(\mathbf{n}, x_2) + R \cos(\mathbf{n}, x_3)] dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dV.$$

Korzystając z tw.1 , rozwijając iloczyny wektorowe

$$S_i = \iint_{S_0} \sigma_{vi} dS_0 + \iiint_{V_0} P_i dV_0 = 0 \wedge M_i = \iint_{S_0} e_{ijk} x_j \sigma_{vk} dS_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j P_k dV_0 = \mathbf{0} \quad (26)$$

Warunek ten możemy przedstawić w postaci (korzystamy z (18) →)

$$\sigma_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj} \quad (18)$$

$$\iint_{S_0} (\sigma_{i1} \alpha_{v1} + \sigma_{i2} \alpha_{v2} + \sigma_{i3} \alpha_{v3}) dS_0 + \iiint_{V_0} P_i dV_0 = 0$$

$$\iint_{S_0} \sigma_{ij} \alpha_{vj} dS_0 + \iiint_{V_0} P_i dV_0 \quad (27)$$

$$\iiint_{V_0} \left(\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \right) dV_0 + \iiint_{V_0} P_i dV_0 = 0$$

Ponieważ :

$$\alpha_{vi} = \cos(\nu, x_i)$$

$$\iiint_{V_0} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i \right) dV_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

więc z wykorzystaniem zapisu sumacyjnego, otrzymaliśmy

Warunek $M=0$ (26)
zapiszemy w postaci

$$\iint_{S_0} (e_{ijk} x_j \sigma_{kr}) \alpha_{vr} dS_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j P_k dV_0 = 0.$$

$$\iiint_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_r} (e_{ijk} x_j \sigma_{kr}) dV_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j P_k dV_0 = 0.$$

Z tw.1. →

$$\iiint_{V_0} \left(e_{irk} \sigma_{kr} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} \right) dV_0 + \iiint_{V_0} e_{ijk} x_j P_k dV_0 = 0.$$

$$\iiint_{V_0} \left[e_{irk} \sigma_{kr} + e_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \sigma_{kr}}{\partial x_r} + P_k \right) \right] dV_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ponieważ równości muszą zachodzić dla dowolnego elementu V_0 , to funkcje podcałkowe muszą być tożsamościowo równe zero, więc:

Równanie (29), to właśnie równania **równowagi Naviera**:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (29)$$

Po rozpisaniu (29) otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + P_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + P_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + P_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy też wynik poboczny

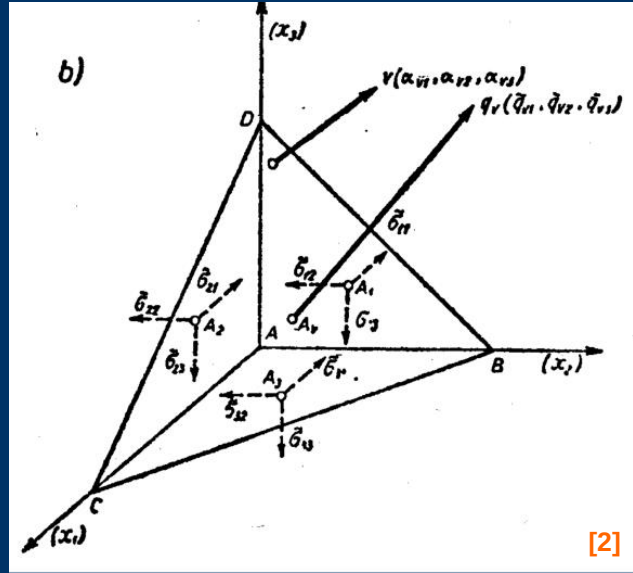
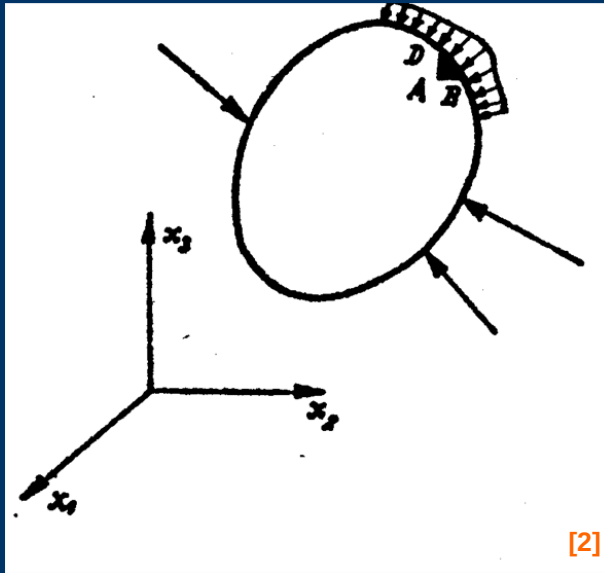
$$e_{irk} \sigma_{kr} = 0, \quad i, k, r = 1, 2, 3.$$

Równanie powyżej potwierdza twierdzenia o równości naprężeń stycznych do siebie prostopadłych

Przez analogię do statyki budowli możemy powiedzieć, że zadanie jest statycznie niewyznaczalne, albowiem mamy tylko trzy równania równowagi, a szukanych jest sześć funkcji ZBTS.

Brakujące równania są natury geometrycznej i fizycznej.

Równania Naviera są różniczkowe w klasie funkcji, a nie skalarów



Z rozważanej bryły wycinamy element, zawierający część Powierzchni zewnętrznej
Składamy warunek $S=0$ oraz $M=0$.
Postępując podobnie jak (10 do (18), otrzymujemy
statyczne warunki brzegowe

W równaniu (30):

σ_{ij} – i,j-ty element macierzy naprężeń w punkcie na powierzchni bryły
 α_{vj} – j-ta współrzędna wektora normalnego do powierzchni w punkcie
 q_{vi} – i-ta współrzędna wektora gęstości obciążenia zewnętrznego w punkcie

$$q_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj} \quad (30)$$

Wszystkie wielkości, występujące w (30) są w ogólnym przypadku funkcjami dwóch zmiennych (zmienne x_1, x_2, x_3 i nie są niezależne, bowiem są związane równaniem powierzchni $F(x_1, x_2, x_3) = 0$). Rolę warunków brzegowych pokażemy na przykładach →

$$q_{v1} = \sigma_{11} \alpha_{v1} + \sigma_{12} \alpha_{v2} + \sigma_{13} \alpha_{v3}$$

$$q_{v2} = \sigma_{21} \alpha_{v1} + \sigma_{22} \alpha_{v2} + \sigma_{23} \alpha_{v3}$$

$$q_{v3} = \sigma_{31} \alpha_{v1} + \sigma_{32} \alpha_{v2} + \sigma_{33} \alpha_{v3}$$

Przykład: Dla danej bryły napisać SWB.

Równanie płaszczyzny ściany:

$$x_3 = +h/2$$

Kosinusy kierunkowe
płaszczyzny ściany:

$$\alpha_{v1} = 0, \alpha_{v2} = 0, \alpha_{v3} = 1$$

Obciążenia powierzchni

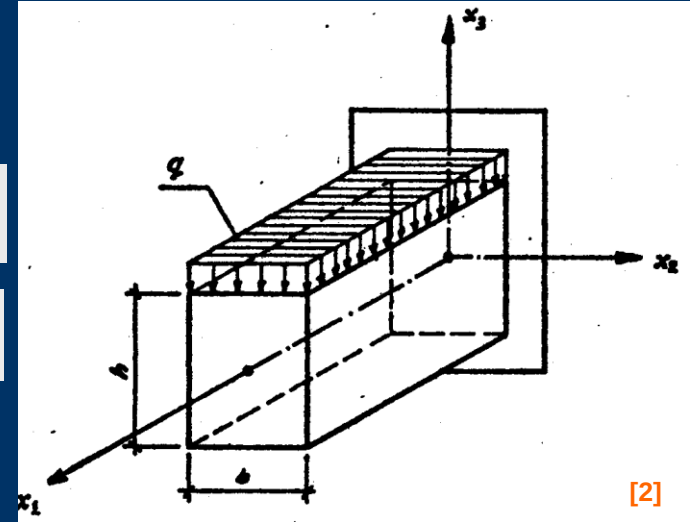
$$q_{v1} = 0, q_{v2} = 0, q_{v3} = -q$$

SWB.

$$0 = \sigma_{11}(x_1, x_2, h/2) \cdot 1$$

$$0 = \sigma_{21}(x_1, x_2, h/2) \cdot 1$$

$$-q = \sigma_{31}(x_1, x_2, h/2) \cdot 1$$

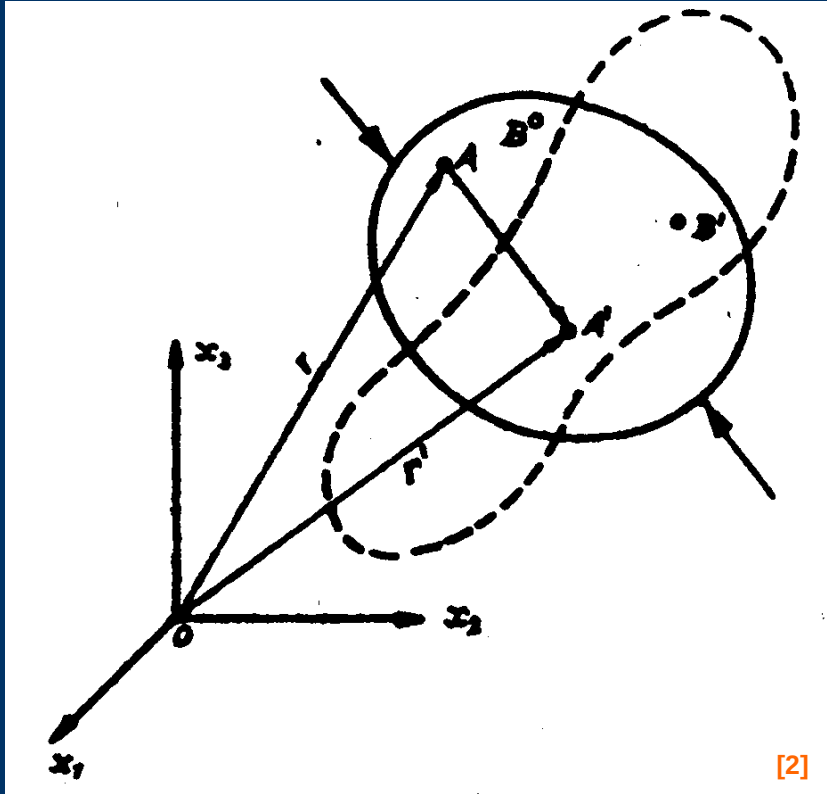


Na pozostałych płaszczyznach SWB wyznaczmy analogicznie:

Uwaga: Funkcje naprężeń, które znajdziemy dla rozpatrywanej bryły, muszą być takie, aby spełniały wypisane warunki brzegowe w każdym punkcie na powierzchni bryły !

- **funkcje statycznie dopuszczalne.**

Spełnienie przez elementy macierzy naprężeń równań Naviera i statycznych warunków Brzegowych nie oznaczają jeszcze, że macierz naprężeń przedstawia rzeczywiste naprężenia w bryle, jest to jedynie – warunek konieczny, ale nie wystarczający.



[2]

$$\text{przemieszczenie: } \mathbf{u} = \mathbf{AA}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

$$\text{pole_przemieszczeń_} \mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3](\mathbf{r}) = u_i(x_1, x_2, x_3) \dots (i = 1, 2, 3)$$

Można wykazać, np. [2], że różnica kwadratów odległości punktów po deformacji A'B' i przed deformacją AB wynosi:

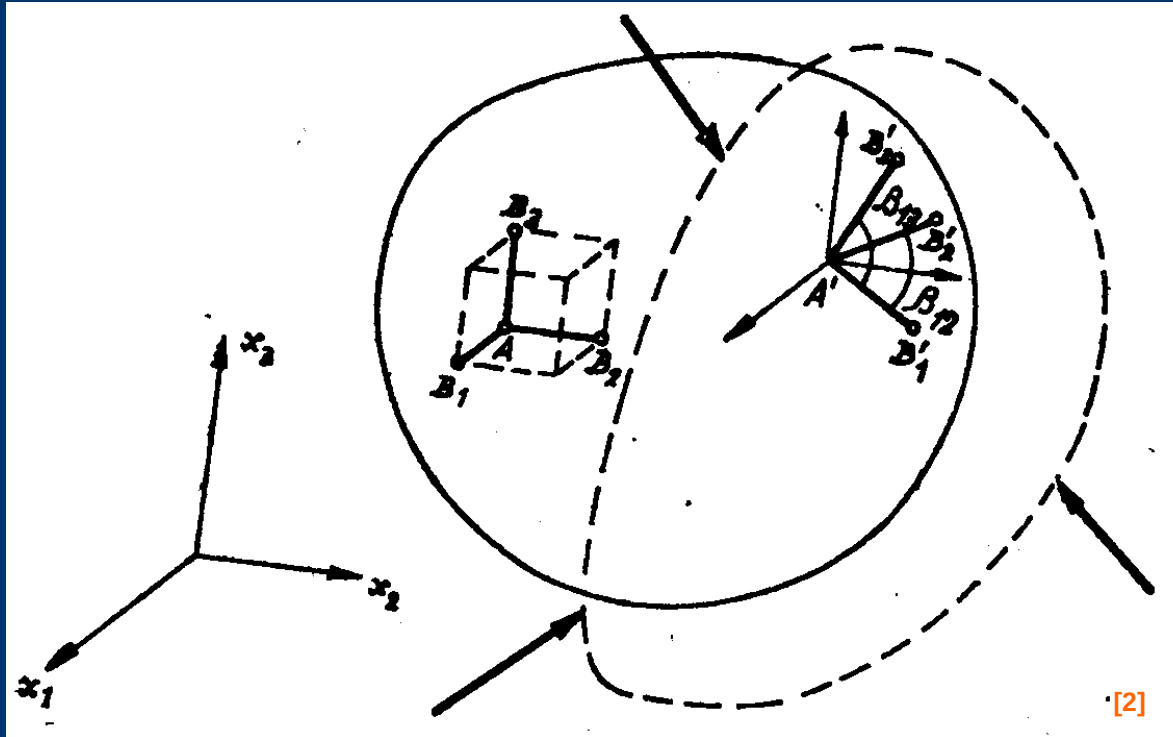
$$|A'B'|^2 - |AB|^2 = 2e_{kr} \Delta x_k \Delta x_r \quad (31)$$

$$|\vec{A'B'}|^2 - |\vec{AB}|^2 = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_r} \Delta x_k \Delta x_r + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_r + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_r} \Delta x_k \Delta x_r = \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_r} \right) \Delta x_k \Delta x_r.$$

gdzie z definicji

$$2\tilde{e}_{kr} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_r} + \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_r},$$

Deformacja zorientowanego prostopadłościanu



Korzystając z (31) obliczamy różnice kwadratów odległości między punktem A, a punktami B_i przed i pod deformacji

Przykładowo mamy:

$$|\vec{A'B'_1}|^2 - |\vec{AB_1}|^2 = 2\tilde{e}_{11}\Delta x_1\Delta x_1$$

$$|\vec{A'B'_1}| = \sqrt{1 + 2\tilde{e}_{11}\Delta x_1}$$

Z wykorzystaniem podobnych zależności można otrzymać, np. [2]:

$$\cos \beta_{ij} = \frac{2\tilde{e}_{ij}}{\sqrt{1 + 2\tilde{e}_{ii}} \sqrt{1 + 2\tilde{e}_{jj}}}$$

Znajomość odległości między punktem A' i punktami B'_i , a także znajomość kątów β_{ij} – nie daje pełnych informacji o deformacji prostopadłościanu, potrzeba znajomości zależności pomiędzy położeniami tych punktów początkowego i końcowego włókna, a położeniami pozostałych punktów materialnych na tych krawędziach prostopadłościanu. Otrzymane jednak rezultaty pozwolą na wyznaczenie względnych wydłużeń włókien, przechodzących przez punkt A oraz zmiany kątów między tymi włóknami po deformacji. Takie względne wydłużenia nazwiemy odkształceniami, które są funkcją przemieszczeń → **ważne odróżnić odkształcenie i przemieszczenia!**

Odkształcenie liniowe → przechodzące przez dany punkt, to względna zmiana odległości (wydłużenie) na skutek przyłożonych sił [oznaczamy ε_{ij} – z dwoma jednakowymi wskaźnikami]

Można wykazać, np. [2], że

$$\varepsilon_{ii} = \sqrt{1 + 2e_{ii}} - 1$$

$$2e_{ii}(x_1, x_2, x_3) = 2 \frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} + \frac{\partial u_r(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_r(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

Nie ma sumowania względem i

Odkształcenie kątowe → jest to połowa kąta, o jaki zmieni się kąt prosty między dwoma włóknami przechodzącymi przez wspólny punkt i wzajemnie prostopadłymi przed przyłożeniem obciążenia [oznaczamy ε_{ij} – z dwoma różnymi wskaźnikami, będącymi wskaźnikami osi, do których włókna w konfiguracji początkowej były równoległe]

Przykład:

$$\varepsilon_{ij} (i \neq j)$$

-połówka kąta, o jaki zmieni się kąt prosty między dwoma włóknami przechodzącymi przez wspólny punkt i z których w konfiguracji początkowej jedno było równoległe do osi x_1 , a x_i , a drugie do osi x_j

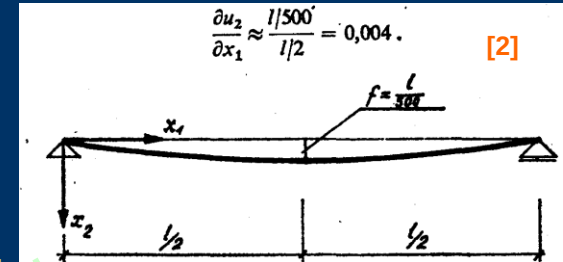
Ze stosownymi związkami analitycznymi można zapoznać się np. pracy [2]

Równania geometryczne → związki między odkształceniami, a przemieszczeniami.

Otrzymane wcześniej związki po rozpisaniu mają postać:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sqrt{1+2e_{11}} - 1, \\ \varepsilon_{22} &= \sqrt{1+2e_{22}} - 1, \\ \varepsilon_{33} &= \sqrt{1+2e_{33}} - 1, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2e_{12}}{\sqrt{1+2e_{11}} \sqrt{1+2e_{22}}}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2e_{13}}{\sqrt{1+2e_{11}} \sqrt{1+2e_{33}}}, \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2e_{23}}{\sqrt{1+2e_{22}} \sqrt{1+2e_{33}}} \end{aligned} \right\}$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$



Zależności te są **równaniami nieliniowymi**. Zagadnienia, w których istnieje konieczność posługiwania się tym i równaniami nazywamy **zagadnieniami geometrycznie nieliniowymi**.

Ponieważ większość zagadnień inżynierskich jest ograniczona do małych przemieszczeń, w których pochodne tych przemieszczeń stanowią wielkość jeszcze mniejszego rzędu, to związki te możemy zlinearyzować:

$$(e_{11} + 1)^2 = 1 + 2e_{11}$$

$$2e_{11} + e_{11}^2 = 2e_{11}$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Ćwiczenie: rozpisać

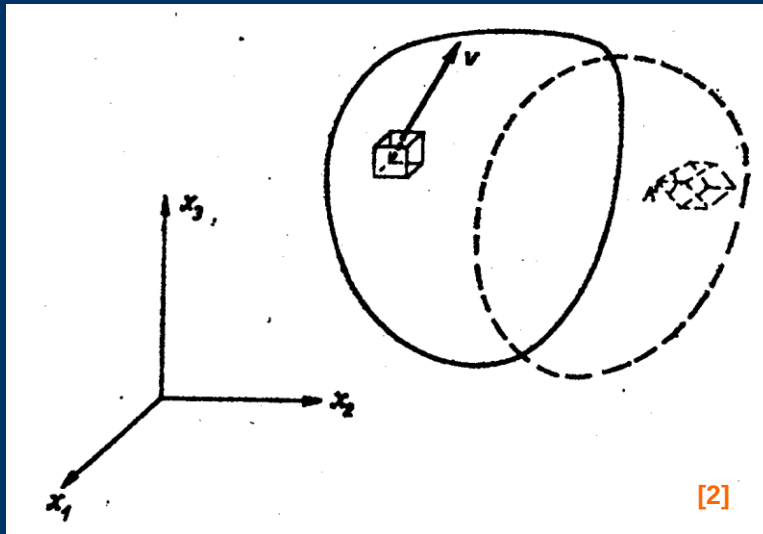
wskaźnikowe związki Cuchy'ego

Równania Cuchy'ego → zlinearyzowane związki między odkształceniami, a przemieszczeniami. →

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \dots (i, j = 1, 2, 3) \quad (32)$$

Równania geometryczne → związki między odkształceniami, a przemieszczeniami.
Otrzymane wcześniej związki po rozpisaniu mają postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (33)$$



Można udowodnić, np. [2] że macierz odkształceń jest tensorem, tzn jej współrzędne transponują się zgodnie z prawem tensorowym (19).

Jeśli jest tensorem, to pozwala to od razu na rozwiązanie szeregu zadań z analizy stanu odkształcenia, np.

Ćwiczenia:

- 1) znaleźć odkształcenia włókna, którego kierunek wyznacza wektor v odniesiony do układu (x_i) ,
- 2) Spośród wszystkich włókien przechodzących przez punkt A znaleźć te, które odkształcają się ekstremalnie. Kierunki te wyznaczają *kierunki główne*, a odpowiadające odkształcenia, to *odkształcenia główne*.
- 3) Znaleźć macierz główną danej macierzy odkształceń

Interpretacja geometryczna macierzy odkształceń: odkształcenia liniowe – wydłużenia krawędzi sześciangu; odkształcenia kątowe – połowa kąta, o jaki zmieniają się kąty proste między krawędziami sześciangu, czyli

$$\pi/2 - 2\varepsilon_{12}, \pi/2 - 2\varepsilon_{13}, \pi/2 - 2\varepsilon_{23}$$

Kinematyczne warunki brzegowe (KWB) → są to warunki jakie narzucają na przemieszczenia więzi kinematyczne.

Każdą funkcję przemieszczeń, która spełnia KWB nazywamy **funkcją kinematycznie dopuszczalną**. Więzy kinematyczne ograniczają liczebność rodziny wszystkich rozwiązań przemieszczeń.

Z uwagi na różnorodność typów więzów, KWB nie da się ująć generalną formułą, jak to było w przypadku statycznych warunków brzegowych. Zapis KWR pokażemy na przykładach.

Przykład: Dala danych więzi kinematycznych podać zapis KWB

Utwierdzenie bryły przestrzennej:

1) Niemożność przemieszczenia punktu O (0,0,0)

$$u_1(O) = u_2(O) = u_3(O) = 0;$$

2) Niemożność obrotu względem osi x1 w punkcie O

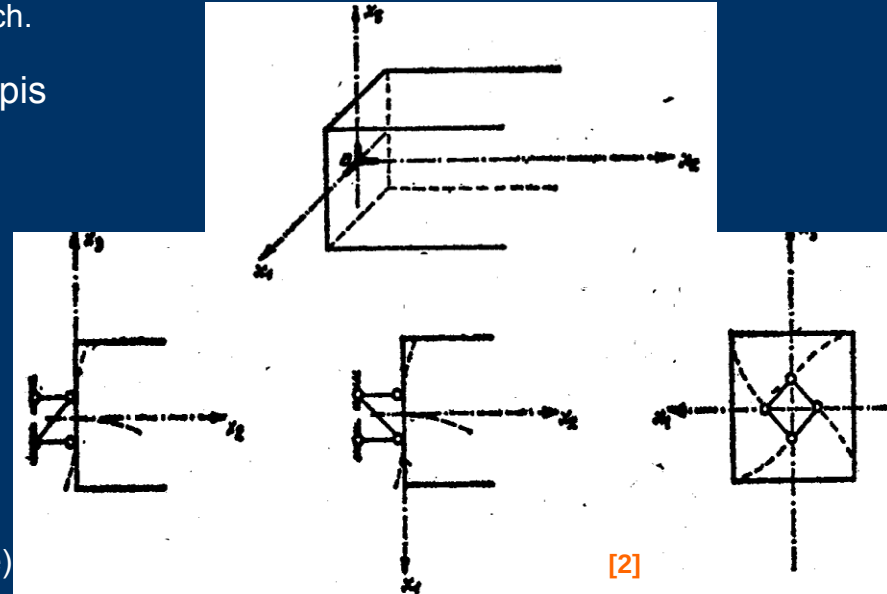
$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0;$$

3) Niemożność obrotu względem osi x2 w punkcie O (skręcenie)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0;$$

4) Niemożność obrotu względem osi x3 w punkcie O

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0.$$



Zadanie: Znaleźć zmianę objętości sześcianu, jeśli dna jest macierz odkształceń $\varepsilon = \text{diag}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$

Rozwiązanie: $\Delta V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

Ćwiczenie: Wykazać powyższy związek na ΔV (patrz [2])

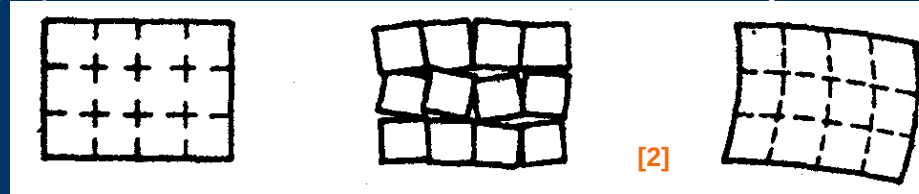
Warunki nierozdzielności odkształceń → są to warunki definiujące zależności, które powinny być spełnione pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami, by istniało rozwiązanie [w sensie ścisłym].

Niestety znalezienie rozwiązania, które w sposób ścisły spełnia warunki nierozdzielności odkształceń jest zadaniem bardzo trudnym i w praktyce rzadkim

Wychodząc z równania Cauchy'ego

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Różniczkując dwukrotnie stronami i w wyniku innych operacji matematycznych [2], uzyskamy



$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kr}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jr}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Związki te dla i,j,k,r=1,2,3 są szukanymi warunkami, Jest ich 3^4=81, z których niezależnych jest tylko sześć:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_r} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_r} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{kr}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_r} + \frac{\partial^3 u_r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_r} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_r} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{jr}}{\partial x_i \partial x_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_r} + \frac{\partial^3 u_r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right). \end{aligned}$$

I dalej [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned}$$

Równania fizyczne → są to zależności między odkształceniami i naprężeniami.

Ustalenie zależności jest najtrudniejszym zadaniem MCO i odbywa się eksperymentalnie, a w ogólnej postaci

Zapiszemy ją formułą

$$\varepsilon = F(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, t, T)$$

Wskazując, że odkształcenie jest funkcją nie tylko naprężeń, ale również prędkości i przyspieszenie naprężeń, a także funkcją czasu i temperatury.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t, T),$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t, T),$$

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t, T).$$

W zależności od potrzeb w drodze formalnych przekształceń można sformułować kilka postaci prawa Hooke'a [2]

Rodzaj przyjętego związku wyznacza gałąź MCO: reologię, teorię sprężystości, teorię plastyczności, Mechanikę ciał sztywnego ($\varepsilon=0$)

W teorii sprężystości związek fizyczny przyjmuje postać prawa Hooke'a (związki nie zależą w sposób jawny od t i T), a ponadto założenia: fizycznej liniowości, sprężystości materiału, izotropii, jednorodności materiału. Przy tych założeniach równanie fizyczne przyjmuje postać [2] sześciu **równań Hooke'a**:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{ij}, \dots (i, j = 1, 2, 3)$$

G i λ są funkcjami punktu i noszą nazwę współczynników Lamé'go. Istnieje zależność:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

(E, ν) = (moduł Younga, współczynnik Poisson'a); G - moduł Kirchhoffa

$D\sigma$. dewiator i $A\sigma$ aksjator naprężeń → to składowe macierzy naprężeń, ustalone jak następuje:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$D_\sigma \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$A_\sigma \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$D_\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

$$A_\varepsilon \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}$$

←Analogicznie dla macierzy odkształceń

$$\varepsilon_m \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \frac{\varepsilon_{rr}}{3},$$

Prawo zmiany objętości

$$A_\sigma = 3KA_\varepsilon$$

$$\sigma_m \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_{rr}}{3}$$

Prawo zmiany postaci

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon$$

$$3K = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Równania TS, umożliwiające postawienie ZBTS, oraz stanowiące formalny, matematyczny zapis służący do rozwiązania tego zadania.

Równania równowagi (Naviera)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i = 0, (i, j = 1, 2, 3)$$

wraz ze statycznymi warunkami brzegowymi na A_q

$$q_{\nu i} = \sigma_{ij} \alpha_{\nu j}$$

Równania geometryczne (Cauchy'ego)

wraz kinematycznymi warunkami brzegowymi na A_u

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \dots (i, j = 1, 2, 3)$$

Równania fizyczne (Hooke'a)

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{ij}, \dots (i, j = 1, 2, 3)$$

w ZBTS poszukujemy: 6 funkcji naprężeń; 6 funkcji odkształceń, 3 funkcje przemieszczeń = 15 funkcji.

Wykazano [2] istnienie i jednoznaczność rozwiązania tak postawionego zadania.

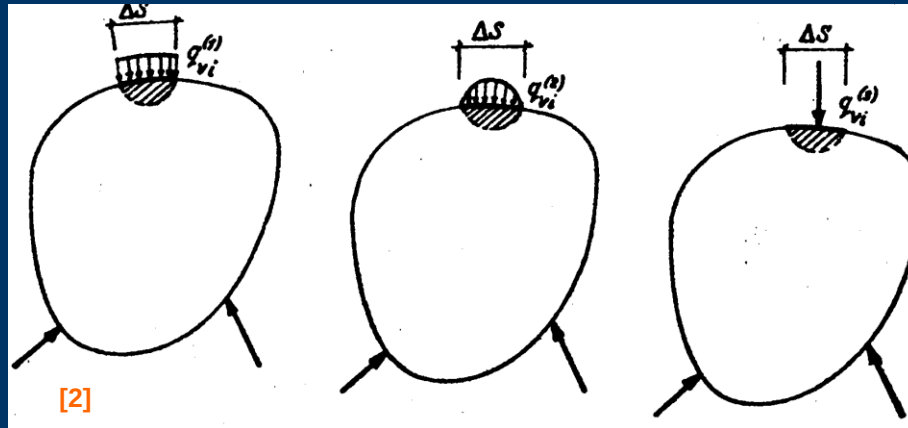
Mamy trzy podstawowe metody eliminacji niewiadomych w równaniach ZBTS:

- metoda sił (rozwiązanie w naprężeniach)
- metoda przemieszczeń (rozwiązanie w przemieszczeniach)
- metoda mieszana,

Sposoby rozwiązywania ZBTS: 1) bezpośrednie rozwiązanie, 2) półodwrotne: a) podejście statyczne (w statycznie dopuszczalnych funkcjach naprężeń) lub b) podejście kinematyczne (w kinematycznie dopuszczalnych funkcjach przemieszczeń).

Zasada superpozycji: jeśli dana jest bryła o określonych liniowych więzach kinematycznych i jeśli znamy dla tej bryły rozwiązanie ZBTS dla konfiguracji obciążenia (1) i znamy dla konfiguracji obciążenia (2), to rozwiązanie ZBTS dla obu konfiguracji jednocześnie jest sumą rozwiązań prostych.

Uwaga: zasada słuszna wyłącznie dla ciał liniowo sprężystych z liniowymi więzami kinematycznymi.



De Saint-Venanta: Intuicyjnie sformułowana przez de Saint-Venanta i wielokrotnie potwierdzona doświadczalnie. Jeśli do bryły na małej powierzchni w porównaniu z całą powierzchnią ($\Delta S \ll S$) przyłożone jest obciążenie wywołujące pewien stan naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia i jeśli na powierzchni ΔS obciążenie zastąpimy innym, ale statycznie równoważnym, to wartości naprężeń, odkształceń i przemieszczeń wywołane drugim obciążeniem, w dostatecznej odległości od miejsca przyłożenia sił, będą różnić się od siebie dowolnie mało różniły.

Zwróćmy uwagę, że teoria sprężystości zasady tej nie akceptuje, natomiast akceptuje ją wytrzymałość materiałów). Skorzystanie z tej zasady nie jest czystym podejściem teorii sprężystości, choć może być akceptowane z punktu widzenia inżynierskiego.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚWIĘTOKRZYSKIEJ BUDOWNICTWO 14

KIELCE 1983

Leszek CHODOR

Politechnika Świętokrzyska

Stefan PIECHNIK

Politechnika Krakowska

UJĘCIE MACIERZOWE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono podstawowe równania kontynuinalnej teorii sprężystości w ujęciu macierzowym. Przez teorię kontynuinalną rozumie się naukę ustalającą prawa mechaniczne, rządzące ciałem zajmującym obszar wypełniony ciągle materią /continuum materialne/.

Równania mechaniki ciała stałego powszechnie zapisywane są w konwencji tensorowej [1,2,3]. Zapis macierzowy staje się praktyczny przy numerycznej analizie, związanej z dyskretnym podziałem obszaru ciała na pewne podobszary /metoda elementów skończonych/ lub dyskretyzacją równań rządzących tym ciałem /metoda różnic skończonych/. W niniejszej pracy zaproponowano formalny sposób ujęcia układów równań różniczkowych teorii sprężystości w równania macierzowe. Ograniczono się do zagadnień statycznych. Podobne przedstawienie równań całkowych teorii sprężystości oraz zagadnień dynamicznych nie powoduje większych trudności;

Przyjęto następujące oznaczenia (jak w pracy [4]):

Jednokolumnową macierz /wektory/ oznaczono za pomocą klawiszy nawiasów

$$\{a\} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

macierz, mającą więcej niż jedną kolumnę i więcej niż jeden wiersz /niekoniecznie kwadratową/ za pomocą nawiasów kwadratowych

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m1} & \varphi_{m2} & \dots & \varphi_{mn} \end{pmatrix}^T$$

8

Symbol T oznacza operator transpozycji macierzy. W ten sposób odróżniono jedno- i wielokolumnową macierz, co wprowadza pewną jasność przy odczytywaniu zapisu.

Rozważane ciało zanurzone jest w 3 wymiarowej przestrzeni euklidesowej, z bazą w kartezjańskim układzie współrzędnych x_1, x_2, x_3 . Symbolem ∂_i oznaczono operator różniczkowania po zmiennej x_i : $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

2. Zagadnienia brzegowe teorii sprężystości

2.1. Statyczne i kinematyczne warunki brzegowe

Niech M będzie punktem w obszarze V zajmowanym przez ciało i ∂V ciągłą powierzchnią przechodzącą przez M i rozdzielającą V na części V_1 i V_2 . Można pokazać, że /przy niektórych założeniach tzn. pominięciu działających na ∂V rozłożonych par /działanie V_2 na V_1 charakteryzuje się gęstością sił $\{p/r, n\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$, przy czym wektor $\{p\}$ zależy od wektora wodzącego r punktu M i wektora normalnej zewnętrznej $\{n\} = \{n_1, n_2, n_3\}^T$ zgodnie z zależnością

$$[S]\{\theta\} - \{p\} = 0 \quad (1)$$

gdzie: $\{\theta\} = \{\theta_{11}, \theta_{22}, \theta_{33}, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}\}^T$ jest wektorem naprężeń /tutaj współrzędne macierzy naprężeń zapisano w postaci wektora o ilości $M = (n/n + 1/2)$ elementów, n - wymiar przestrzeni/

$$[S] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}$$

Jeśli powierzchnia ∂V staje się powierzchnią Σ ograniczającą ciało o objętości V , to równanie (1) stanowi zapis statycznych warunków brzegowych, gdzie $\{p\}$ jest gęstością powierzchniowego obciążenia ciała na Σ_p /część powierzchni Σ na której zadane są statyczne warunki brzegowe/.

Kinematyczne warunki brzegowe zadane są na części Σ_u powierzchni zewnętrznej ciała ($\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_p$), jeśli

$$\{u\}_{\Sigma_u} = \{u^0\}, \quad (2)$$

gdzie: $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ jest wektorem przemieszczeń, natomiast $\{u^0\}$ jest daną wartością tego wektora dla określonego punktu Σ_u . ■

2.2: Równania Naviera i Cauchy'ego

Dla quasiistotnych zadań równanie równowagi Naviera [1] można przedstawić w postaci:

$$[H]\{\sigma\} + \rho\{X\} = 0 \quad (3)$$

gdzie $[H]$ jest operatorem różniczkowym, $\{X\}$ wektorem sił masowych:

$$[H] = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix},$$

natomiast ρ gęstością ciała /dla małych przemieszczeń $\rho = \rho_0$, przy czym zwykle zakłada się $\rho_0 = 1$, przyjmując że w nieodkształconym ciele materiał ma stałą gęstość/.

Wektor naprężenia $\{\sigma\}$ można rozłożyć na dewiator $\{\sigma_D\}$ i aksjator $\{\sigma_A\}$:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_D\} + \{\sigma_A\},$$

gdzie: $\{\sigma_D\} = \{\sigma_{11} - \sigma_m, \sigma_{22} - \sigma_m, \sigma_{33} - \sigma_m, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T$,

$$\{\sigma_A\} = \{\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m, 0, 0, 0\}^T,$$

$$3\sigma_m = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}. \quad \blacksquare$$

Gradient wektora przemieszczeń można rozłożyć na tensor obrotu i tensor małych deformacji. Tensor małych odkształceń przedstawimy w postaci wektora odkształceń $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}\}^T$. Wówczas równanie Cauchy'ego można wyrazić zależnością:

$$\{\epsilon\} = [D]\{u\}, \quad (4)$$

gdzie: $[D] = [H]^T$, natomiast $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ jest wektorem przemieszczeń.

Wektor $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}\}$ rozłożymy na dewiator $\{\epsilon_D\}$ i aksjator $\{\epsilon_A\}$:

10

$$\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon_D\} + \{\epsilon_A\},$$

gdzie: $\{\epsilon_D\} = \{\epsilon_{11} - \epsilon_m, \epsilon_{22} - \epsilon_m, \epsilon_{33} - \epsilon_m, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}\}^T$,

$$\{\epsilon_A\} = \{\epsilon_m, \epsilon_m, \epsilon_m, 0, 0, 0\}^T,$$

$$3\epsilon_m = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}. \quad \blacksquare$$

2.3: Związki konstytutywne

Jeśli rozpatrywać izotermiczne procesy, to można przyjąć, że $\{\sigma\}$ jest operatorem $\{\epsilon\}$ /lub procesu odkształceń/ [2]:

$$\{\sigma\} = \mathcal{F}\{\epsilon\}, \quad (5)$$

gdzie: $\mathcal{F}$ jest pewnym operatorem.

W przypadku procesu izotropowego, jednorodnego, odwracalnego i liniowego zachodzą zależności:

$$\{\sigma_A\} = 3K\{\epsilon_A\} \quad \text{/prawo zmiany objętości/, (6)}$$

$$\{\sigma_D\} = 2G\{\epsilon_D\} \quad \text{/prawo zmiany postaci/, (7)}$$

gdzie: $G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ i $3K = \frac{E}{1-2\nu}$ są stałymi materiałowymi, (E, ν - moduł Younga i współczynnik Poissona).

Prawo Hooke'a można również przedstawić w postaci [2]:

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}, \quad (8)$$

$$\text{gdzie: } [E] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \nu E / (1+\nu)(1-2\nu), \quad \mu = G \quad \text{- współczynnik Lamego.} \quad \blacksquare$$

11

2.4: Sformułowanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości /ZBTS/

Równania (3), (4) oraz (8) wraz ze statycznymi (1) i kinematycznymi (2) warunkami brzegowymi stanowią zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości.

Można udowodnić, że istnieją jednoznacznie określone wektory $\{s\}$, $\{e\}$ i $\{u\}$ spełniające te równania.

3: Metody rozwiązywania ZBTS

3.1: Rozwiązanie w przemieszczeniach lub naprężeniach

Równania ZBTS można sprowadzić do postaci w której niewiadomą będzie tylko wektor przemieszczeń $\{u\}$. Zależności te, zwane równaniami Lamego, otrzymuje się podstawiając (8) do (3) i korzystając z (4). Dla $\varrho_0 = 1$ mamy:

$$[L]\{u\} + \{X\} = 0 \quad (9)$$

$$\text{gdzie: } [L] = [H][E][D] = (\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \partial_1^2 & \partial_1 \partial_2 & \partial_1 \partial_3 \\ \partial_2 \partial_1 & \partial_2^2 & \partial_2 \partial_3 \\ \partial_3 \partial_1 & \partial_3 \partial_2 & \partial_3^2 \end{bmatrix} + \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ - jest operatorem Laplace'a).

Jeśli statyczne (1) i kinematyczne (2) warunki brzegowe wyrazimy przez przemieszczenia:

$$\{u\}|_{\Sigma_u} = \{u^*\}, \quad [S]\{F([D]\{u\})\}|_{\Sigma_p} = \{p\}, \quad (9a)$$

to równania (9) wraz z (9a) stanowią sformułowanie ZBTS w przemieszczeniach.

Dla ZBTS w naprężeniach, t.j., gdy w (2) przemieszczenia wyrażone są przez naprężenia $\{u\}(\{s\})$ można zredukować równania (3), (4) i (8) do postaci zawierającej tylko nieznaną wektor $\{s\}$ /równania Beltrami-Michella/. Uzyskuje się to eliminując $\{u\}$ z (4) poprzez mnożenie obu stron tego równania przez pewien operator róż-

12

niczkowy. Do takiej postaci równania podstawia się (8) i wykorzystując (3) otrzymuje

$$[B_1]\{s\} + [B_2]\{X\} = 0, \quad (10)$$

$$\text{gdzie: } [B_1] = \nabla^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+\nu} \begin{bmatrix} \partial_1^2 & \partial_1^2 & \partial_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2^2 & \partial_2^2 & \partial_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_3^2 & \partial_3^2 & \partial_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 \partial_2 & \partial_1 \partial_2 & \partial_1 \partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2 \partial_3 & \partial_2 \partial_3 & \partial_2 \partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_3 \partial_1 & \partial_3 \partial_1 & \partial_3 \partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 2\partial_1 & 0 & 0 \\ 2\partial_2 & 0 & 0 \\ 2\partial_3 & 0 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-\nu} \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZBTS wyrażone równaniem Lamego (9) lub równaniem Beltrami-Michella (10) można rozwiązać metodą różnic skończonych, metodami iteracyjnymi, w tym szybkobieżną metodą stopniowych przybliżeń czy metodą Monte Carlo.

3.2: Metody wariacyjne

Jeśli istnieje potencjał Φ , taki że

$$\{s\} = \mathcal{F}(\{e\}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \{e\}}, \quad (11)$$

to rozwiązanie ZBTS w przemieszczeniach sprowadza się do określenia punktów stacjonarności funkcjonału Lagrange'a Π

$$\delta \Pi = \delta (W_p - L) = 0, \quad (12)$$

gdzie: $W_p = \int \Phi(\{u\}) dV$ - praca sił wewnętrznych

$$L = \int \{s\}^T \{u\} dV + \int \{p\}^T \{u\} dS - \text{praca sił zewnętrznych}$$

Jeśli operator $\mathcal{F}^{-1}(\{s\}) = \{e\}$ jest potencjalny, to rozwiązanie ZBTS w naprężeniach uzyskać można przez poszukiwanie takich $\{s\}$, na których realizuje się minimum funkcjonału Castigliano Π^*

$$\delta \Pi^* = \delta (W_p^* - L^*) = 0, \quad (13)$$

gdzie: $W_p^* = \int \Phi^*(\{s\}) dV$,

13

$$L^* = \int_{\Sigma_u} ([S]\{\epsilon\})^T \{u\} dA$$

Dla ciała liniowo sprężystych zachodzi $\Phi^* = \Phi$, /gęstość energii komplementarnej jest równa gęstości energii potencjalnej/.

Punktów stacjonarności funkcjonalów Lagrange'a czy Castigliano /lub Reissnera/ poszukuje się metodą Ritza, Filonienko-Borodicz, Galerkina-Pietrowa, Bubnowa-Galerkina, najmniejszych kwadratów lub Kantorowicza-Leibniza.

Rozwiążmy na przykład pierwsze ZBTS metodą Ritza. W tym celu założymy, że wektor przemieszczenia dowolnego punktu ciała można wyrazić liniową kombinacją funkcji dopuszczalnych $\varphi(r)$ /funkcji Ritza/

$$u_i(r) = \varphi_{i0}(r) + \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(r) \cdot a_j,$$

gdzie a_j są stałymi współczynnikami. Równanie (14) można zapisać w postaci macierzowej

$$\{u\} = [N]\{a\}.$$

Równania Cauchy'ego (4) przyjmą postać

$$\{\epsilon\} = [R]\{a\}, \quad ([R] = [D][N]).$$

Stałe $\{a\}$ wyznaczmy z warunku stacjonarności funkcjonalu Lagrange'a (12), wiedząc że:

$$\begin{aligned} W_p &= \int \Phi dV = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{a\}^T [R] \{\epsilon\} dV, \\ L &= \int \{\epsilon\}^T \{x\} dV + \int \{u\}^T \{p\} d\Sigma = \int \{a\}^T [N]^T \{x\} dV + \\ &+ \int \{a\}^T [N]^T \{p\} d\Sigma. \end{aligned}$$

Różniczkując (12) po $\{a\}^T$ otrzymamy algebraiczne równanie macierowe do wyznaczenia wektora $\{a\}$:

$$[k]\{a\} = \{F_V\} + \{F_\Sigma\},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} [k] &= \int [R]^T [E] [R] dV, \\ \{F_V\} &= \int \{\epsilon\} [N]^T \{x\} dV, \\ \{F_\Sigma\} &= \int [N]^T \{p\} d\Sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

14

4. Podsumowanie

Przedstawione ujęcie równań kontynualnej teorii sprężystości w formie macierzowej stanowi usystematyzowanie i uzupełnienie reprezentacji macierzowej tych równań spotykanej w literaturze. Konsekwentne i spójne macierzowe sformułowanie podstawowych równań pozwoliło na otrzymanie rozwiązań ZBTS bez uciekania się do zapisu tensorowego. Zapis macierzowy ma ewidentną przewagę nad zapisem tensorowym, gdy stosujemy metody komputerowe obliczeń.

Zaproponowaną reprezentację macierzową da się rozszerzyć na całą Mechanikę Ciała Odkształcalnego.

Literatura

- [1] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa/Kraków 1980.
- [2] Pobiedrija B.E, Čisliennyye metody w teorii uprugosti i plastičnosti, Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta, Moskwa 1981.
- [3] Shaw F.S., Virtual displacements and analysis of structures, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 1972.
- [4] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.

MATRIX FORMULATION OF BOUNDARY PROBLEM OF LINEAR THEORY OF ELASTICITY

Summary

This work presents an matrix representation of equations of linear theory of elasticity. Methods of solving boundary problem of theory of elasticity has shown. One example is given.