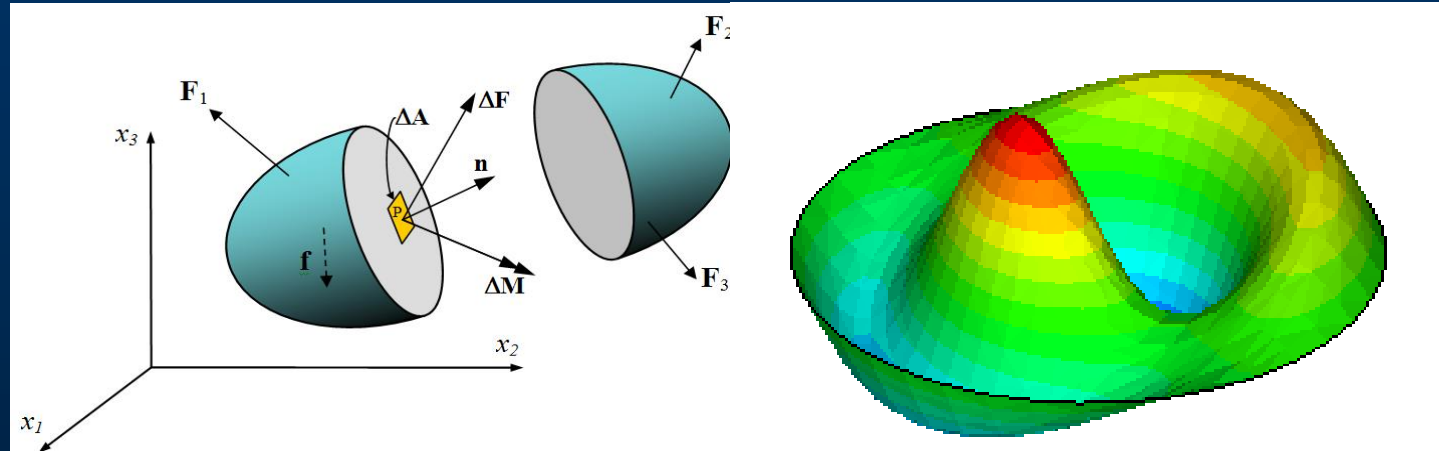


Teoria sprężystości i plastyczności

Wykład 1: Wprowadzenie. Założenia. Macierz i tensor naprężeń



Leszek CHODOR , dr inż. bud, inż.arch.
leszek@chodor.co

Wykłady opracowano na podstawie:

- [1] Timoschenko S. Goodier A.J.N., Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951,
- [2] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów dla wydziałów budowlanych, PWN, Warszawa 1980,
- [3] Rakowski J., Teoria sprężystości, Almamater, Politechnika Poznańska, 2003/2004,
- [4] Bower A., Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University, Spring 2005,
- [5] Lebedev L.P., Cloud M.J., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010,
- [6] Chodor L., publikacje własne - różne.
- [7] Strony www [dostępne na dzień wykładu] - różne

Wykład : *TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI*

Kurs : 4 rok studiów (1 rok II stopień), kierunku Budownictwo.

Wykład 1	<i>Wprowadzenie, Założenia teorii sprężystości. Macierz i tensor naprężeń</i>	<i>tydzień 1,2</i>
Wykład 2	<i>Stan naprężeń i odkształceń, równania fizyczne, ujęcie macierzowe ZBTS</i>	<i>3</i>
Wykład 3	<i>Metody rozwiązywania ZBTS i proste przykłady. Metoda Ritza</i>	<i>4</i>
Wykład 4	<i>Podstawy metod wariacyjnych w TS. Metoda Ritza a MES</i>	<i>5</i>
Wykład 5	<i>Wprowadzenie do MES . Przykład belki na gruncie, belka Timoshenko , tarczy i płyty</i>	<i>6 7,8</i>
Wykład 6	<i>Nieliniowości fizyczne . Typy nieliniowości. Hipotezy. Plastyczność. Teoria nośności granicznej</i>	<i>9 10</i>
Wykład 7	<i>Pręty cienkościenne, Nośność nadkrytyczna</i>	<i>11</i>
Wykład 8	<i>Ośrodki lepko-sprężyste</i>	<i>12</i>
Wykład 9	<i>Implementacje numeryczne TSiP</i>	<i>13</i>
Wykład 10	<i>Wybrane zagadnienia TSiP. Podsumowanie</i>	<i>14,15</i>

Teoria
Sprężysto-
ści ,

a
Wytrzyma-
łość
Materiałów

Teoria sprężystości (TS); Teoria plastyczności (TP) i Reologia (TR), są działami Mechaniki Ciała Odkształcalnego (MCO).

Natomiast:

Wytrzymałość materiałów (WM) jest historyczną nazwą TS – można ją nazwać techniczną MCO, bo stawia sobie zadania takie jak MCO, lecz akceptuje wiele uproszczeń, weryfikowanych tylko przez doświadczenia - nie stanowi uporządkowanej dyscypliny, lecz raczej luźny (przypadkowy) zbiór rozwiązań. Uproszczenia przyjmowane w wytrzymałości materiałów nie mają często podstaw teoretycznych i dopiero po latach przyjęte tam hipotezy inżynierskie są weryfikowane i zastępowane nowymi technikami (Przykład: projektowanie słupów mimośrodowo ściskanych z zastosowaniem współczynnika wyboczeniowego -- w EC3 został zastąpiony metodą wykorzystującą obliczenia II rzędu, model 3D oraz ogólną metodę elementów skończonych - w miejsce współczynników wyboczeniowych w analizie P-delta uzyskuje się momenty zginające II rzędu, co jest już teoretycznie uzasadnione).

TS rozważa problemy, które były zbyt skomplikowane do rozwiązania w historycznej WM i standardowo były rozwiązywane przez badania modelowe. Wraz z rozwojem technik obliczeniowych, klasyczna WM straciła na znaczeniu, a wrosła ranga **teorii sprężystości**, w tym **nieliniowej** oraz **dla ciał niesprężystych** (plastycznych, kruchych, lepkich).

Mechanika budowli (w tym mechanika teoretyczna, dynamika i stateczność) uzupełniają TS, **szczególnie w komputerowej technice** rozwiązania zagadnień brzegowych, choć raczej korzystają z ogólnych praw sformułowanych w MCO i tego powodu można uznać, że współczesna mechanika, wykorzystująca metody komputerowe jest niezależną gałęzią TS.

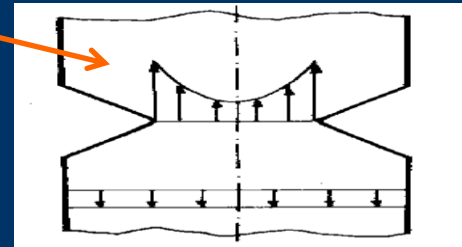
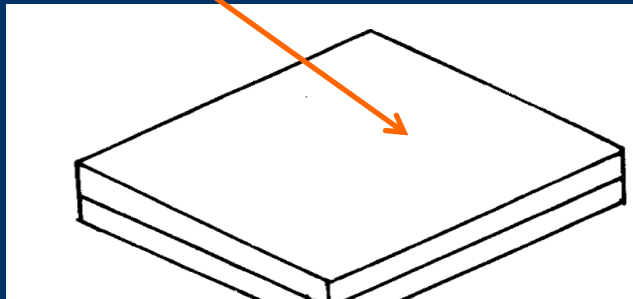
TSiP jest nauką zajmującą się formułowaniem ogólnych praw rządzących zachowaniem ciał odkształcalnych wykonanych z różnych materiałów i o różnych własnościach poddanych różnym obciążeniom i pozostających w środowiskach różnej natury.

TS zajmuje się ciałami sprężystymi, tj. takimi, które powracają do kształtu pierwotnego po zdjęciu obciążenia.

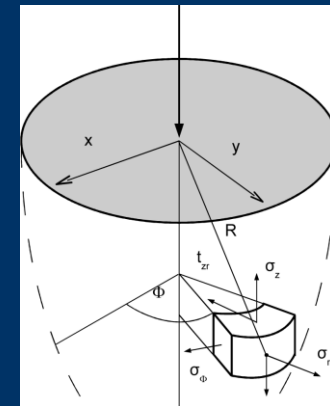
TS pogłębia klasyczne podejście **WM** z pominięciem wielu założeń upraszczających, oraz analizuje nowe zagadnienia, wychodzące poza klasyczny zakres **WM** (np. konstrukcje powłokowe – płyty, tarcze, nieliniowości geometryczne i fizyczne oraz , wprowadzenie czasu (reologia, a ostatnio również losowości (stochastyczna metoda elementów skończonych, itd.)

Przykłady zadań **TS** (nierozwiązywalne przez **WM**):

Zadanie Boussinesqa (półprzestrzeni sprężystej) →
Zagadnienie karbu
Rozwiązanie płyty, powłoki



[3]



[3]

Fundamentalne założenia klasycznej TS:

1. O **środku ciągłym (kontinuum materialnym)** : cząsteczki ciała szczelnie wypełniają daną bryłę;

Kontinuum jest :

jednorodne (stałe materiałowe nie są funkcjami miejsca)

izotropowe (własności mechaniczne nie zależą od kierunku)

Uwaga: **TS** zajmuje się również ciałami niejednorodnymi i anizotropowymi, lecz nie będzie to przedmiotem niniejszego kursu.

2. O **równowadze statecznej**: rozważamy takie układy, które znajdują się w równowadze statecznej

Uwaga: **MCO** zajmuje się również ciałami w ruchu (kinetyka, dynamika), lecz nie będzie to przedmiotem niniejszego kursu.

Fundamentalne założenia klasycznej TS:

3. Zasada zeszywnienia : inaczej założenie małych przemieszczeń.

Uwaga:

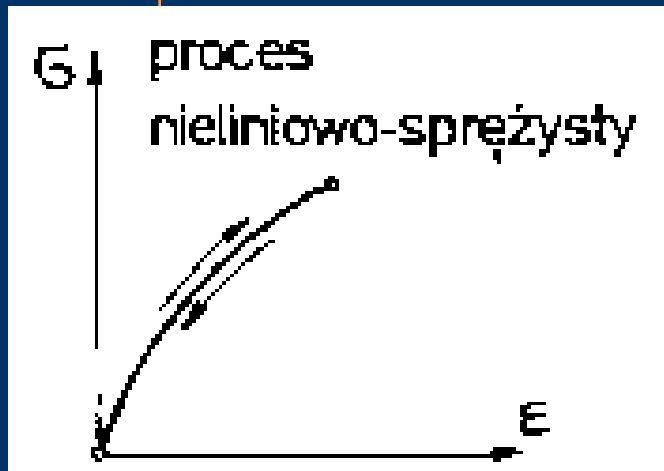
- 1) założenie nieprecyzyjne, lecz potrzebne do linearyzacji zagadnień – dalej będziemy jawnie pokazywać zastosowanie założenia,
- 2) Zasada zeszywnienia nie jest przyjęciem nieodkształcalności ciała (założeniem ciała sztywnego, którym zajmowała się „mechanika teoretyczna”).

3a O małych pochodnych przemieszczeń – rozważamy tylko takie przemieszczenia, których pochodne są małe (i ich potęgi mogą być pominięte jako wielkości małe wyższego rzędu)

Fundamentalne założenia klasycznej TS:

4. **Założenie liniowo sprężystego materiału** klasycznej teorii sprężystości. Materiał, z którego wykonane jest ciało jest **liniowo sprężysty**. Uwaga:

- 1) sprężystość oznacza, że po zdjęciu obciążenia ciało powraca do pierwotnego stanu,
- 2) liniowość oznacza, że zależność między odkształceniem, a naprężeniem jest liniowa (klasyczne Prawo Hooke'a),
- 3) Założenie to pozwala zaniedbać historię obciążania (efekt Baushingera) ← WM



Robert Hooke (1635-1703) pierwszy prezentuje to prawo w formie łacińskiego anagramu **CEIINOSSITTUV = UT TENSIO, SIC VIS**

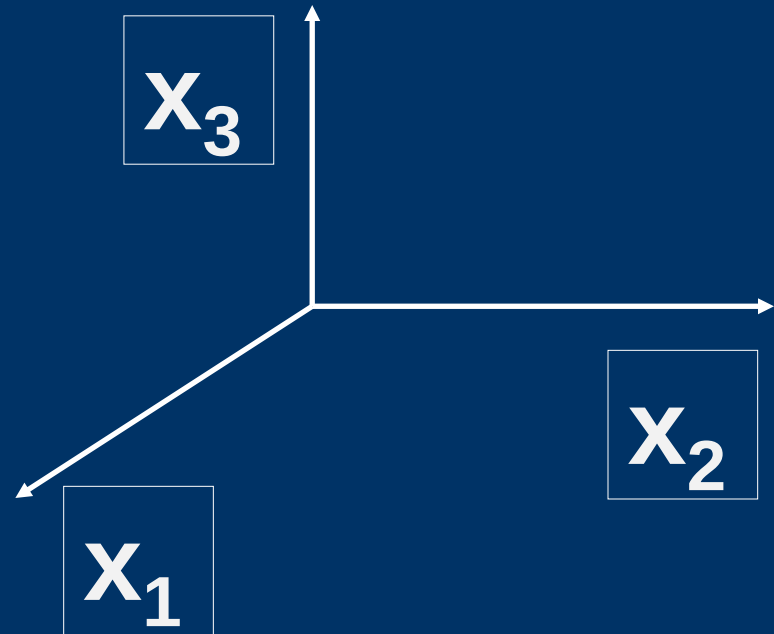
co tłumaczy się “jakie wydłużenie, taka siła” lub „wydłużenie jest wprost proporcjonalne do siły”.

$$\sigma = E \epsilon$$

Uwaga :

Rozważania prowadzimy w układzie współrzędnych „matematycznym”, tzn: kierunki i zwroty osi zgodne z układem z rysunku, czego skutkiem jest podobne znakowanie , a przede wszystkim zwykłe „matematyczne” transformacje (formuły przejścia pomiędzy różnymi układami współrzędnych)

Stosujemy oznaczenia wskaźnikowe i umowę Einsteina sumowania po powtarzającym się wskaźniku $[x_1, x_2, x_3]$, co uprości zapis formuł.



Twierdzenie o równoważności układów sił: jeśli dwa układy są równoważne, to sumy obu układów są równe i równe są momenty obu układów liczone względem tego samego punktu.

Pojęcie sił wewnętrznych jest ogólne, a w analizie poszczególnych typów konstrukcji układy sił, zredukowane specyficznym dla rodzaju analizy też są specyficznym nazywane:

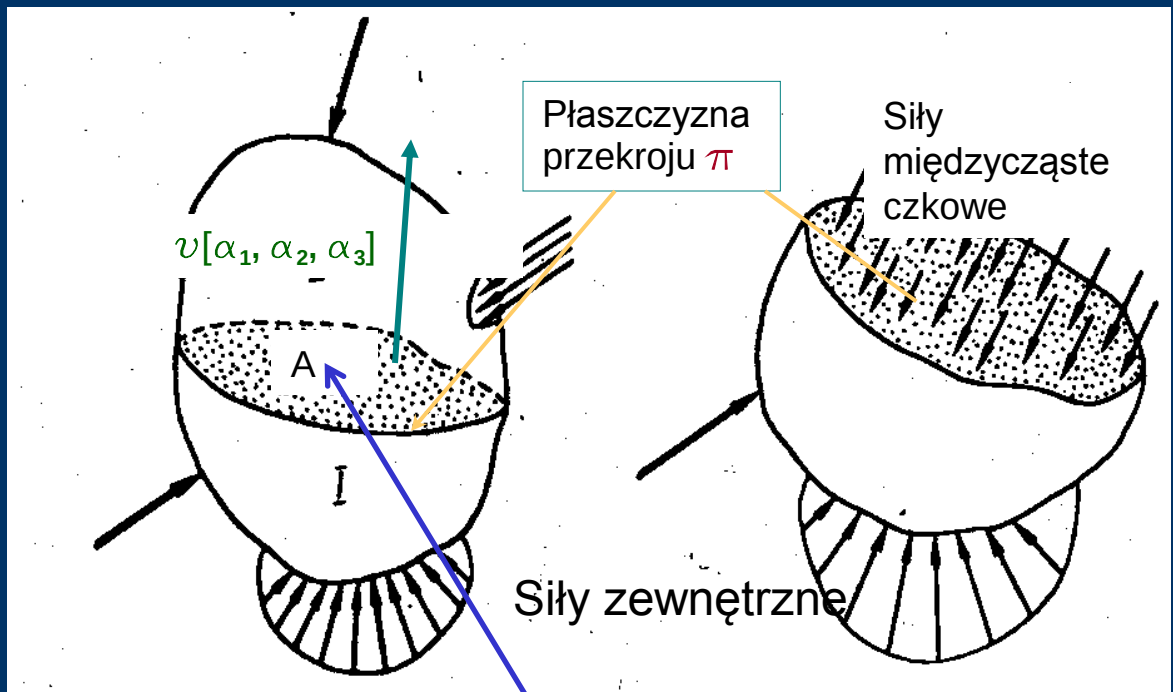
Pręt: → siły wewnętrzne zredukowane do środka pręta nazywamy **siłami przekrojowymi lub prętowymi**. Umawiamy się, że środkiem pręta jest środek ciężkości jego przekroju poprzecznego płaszczyzną prostopadłą do osi pręta. Środek ciężkości leży więc na osi pręta. Siłami przekrojowymi są: **N**=siła osiowa, **Q**=siła poprzeczna, **M_s**=moment skręcający, **M_g**=moment zginający, **B**=bimoment (w prętach cienkościennych)

Płyta → siły wewnętrzne zredukowane do linii środkowej płyty nazywamy **siłami płytowymi**. Linia środkową płyty jest linia środków ciężkości jej przekroju poprzecznego płaszczyzną prostopadłą do powierzchni środkowej płyty.

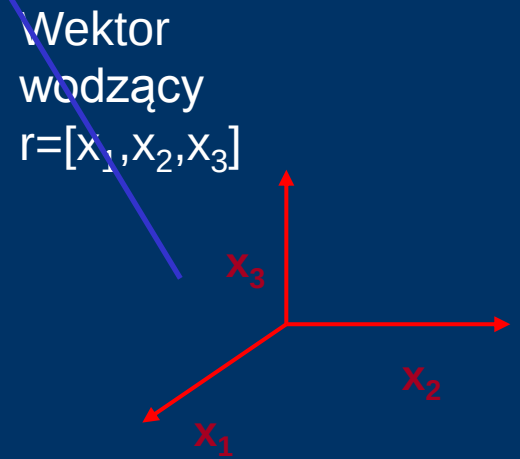
Siła
wewnętrzna,
a siła
przekrojowa

Siła wewnętrzna jako funkcja wektorowa.

Wektor wodzący, normalna zewnętrzna do przekroju



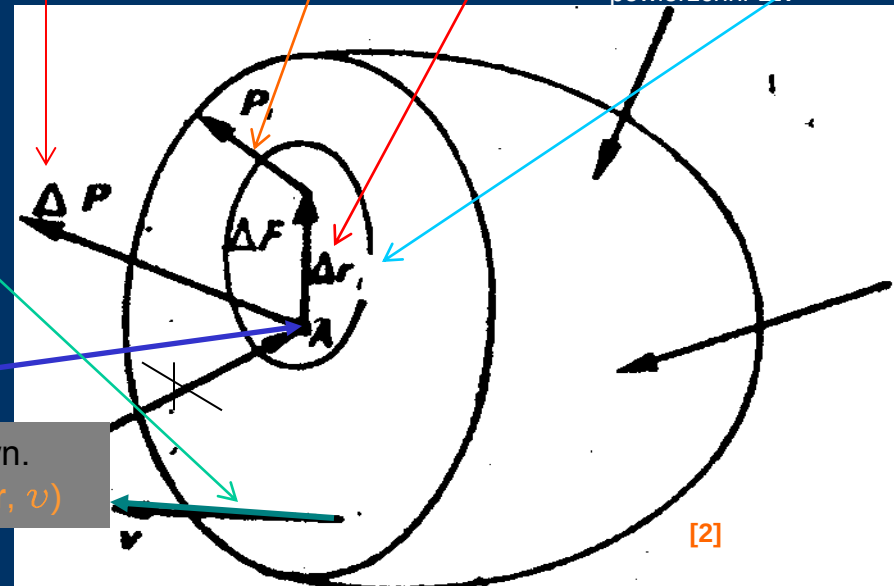
Siła wewnętrzna $\rightarrow$ funkcja wektorowa $P=P(r, v)$ dwóch wektorów $[r \text{ i } v]$ =[wektor wodzący, normalna zewnętrzna], która określa wypadkową sił międzycząsteczkowych z jakimi wszystkie punkty materialne odciętej części ciała działają na punkt materialny A



Stan naprężeń, a macierz naprężeń

P (=gęstość sił wewn.
=naprężenie $p=p(r, v)$)

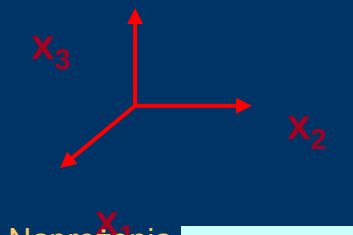
← Suma sił wewnętrznych
przyporządkowanych
powierzchni ΔF


$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(r_0, \nu) = \mathbf{p}(\nu \circ_{(3)})$$

W pierwszym przypadku ustalamy więc wektor normalny do płaszczyzny $v = v_1$. Naprężenie staje się funkcją wektorową tylko wektora wodzącego punktu, czyli funkcja trzech jego współrzędnych – skalarów (x_1, x_2, x_3) . Funkcję t oznaczamy następująco (patrz rysunek $\rightarrow$):

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1) = \mathbf{p}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \circ (4)$$

Naprężenia
w
przekrojach
prostopad-
łych do osi.

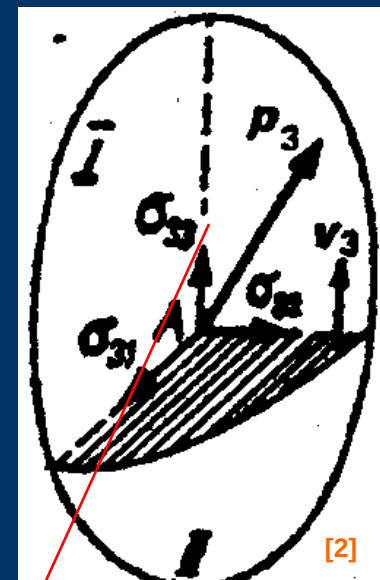
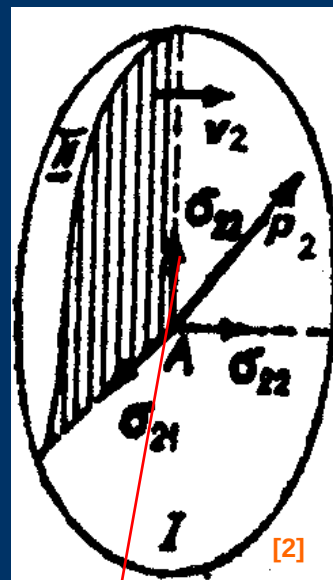
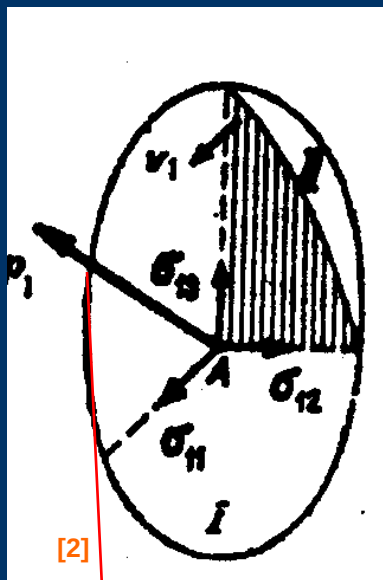


Naprężenia $\mathbf{p}_i(\mathbf{r})$
przekrojem $v_i \rightarrow$

(o normalnej równoległej
do osi układu współrzędnych)
jest wektorem w
przestrzeni o 3-ch
współrzędnych σ_{ij}
(w ogólności niezerowych)

Współrzędna σ_{ij}
jest funkcją skalarną
trzech skalarów $x_1, x_2,$
 x_3 , tzn

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$$



$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1) = \mathbf{p}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_1(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \circ (5)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2(\mathbf{r}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_2) = \mathbf{p}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_2(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \circ (6)$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_3(\mathbf{r}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_3) = \mathbf{p}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_3(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}) \circ (7)$$

Macierz
naprężeń
jest zbiorem
9-ciu
skalnych
funkcji 3.
Skalarów.

Macierz naprężeń jest zbiorem skalarnych funkcji trzech
zmiennych (x_1, x_2, x_3) , które przedstawiają współrzędne
naprężeń w tym samym punkcie o
współrzędnych (x_1, x_2, x_3) uporządkowany w taki sposób,
że wiersze są
współzrędnymi naprężeń przyporządkowanych
płaszczyznom przekrojów
prostopadłych odpowiednio do osi x_1, x_2, x_3 .

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \circ (8)$$

Naprężenie, to gęstość sił wewnętrznych i jest funkcją wektorową dwóch wektorów: $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$

Umowa znakowania

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Indeksy ij : pierwszy jest wskaźnikiem $\mathbf{p}$ (normalnej do płaszczyzny), drugi zaś oznacza kolejną współrzędną układu.

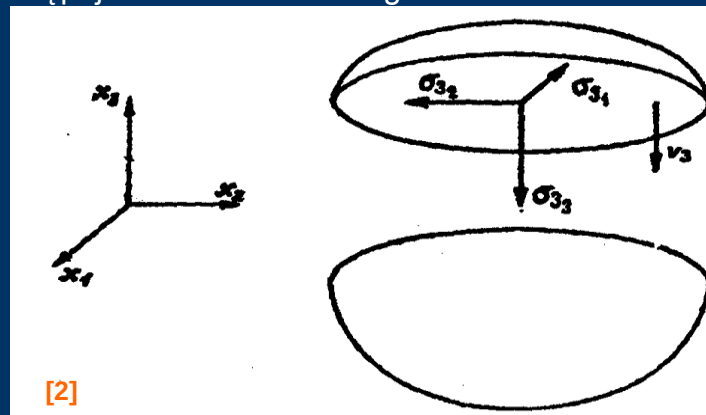
Umowa znakowania:

1. Naprężenia normalne są dodatnie (znak (+)), jeśli zwrot składowej tego naprężenia będzie zgodny ze zwrotem normalnej zewnętrznej płaszczyzny przekroju
2. Naprężenia styczne są dodatnie (znak (+)), jeśli : a) zwrot normalnej zewnętrznej płaszczyzny przekroju jest zgodny ze zwrotem osi współrzędnych, do której normalna jest równoległa, b) zwrot składowej naprężenia stycznego jest zgodny ze zwrotem osi współrzędnych do której ta składowa jest równoległa; naprężenia styczne są dodatnie również w tym przypadku, gdy następuje równoczesna niezgodność zwrotów obu wymienionych par wektorów. →

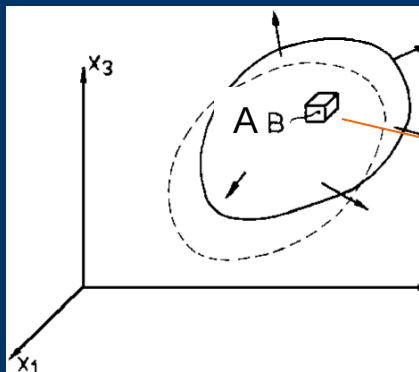
Obraz graficzny macierzy naprężeń na poprzednim slajdzie oddaje istotę macierzy, jaką jest przyporządkowanie naprężeń płaszczyznom z odpowiednim wektorem normalnym, wskazującym, która część działa na którą. Z tej istoty wynika również konieczność specjalnej umowy znakowania, ponieważ zgodność z osiami współrzędnych nie jest jednoznaczna – trzeba byłoby podawać z którą częścią ciała mamy do czynienia.

Własności macierzy naprężeń:

1. Składowe, których długości leżą na diagonalnej macierzy, są prostopadłe do odpowiednich płaszczyzn przekrojów, pozostałe zaś współrzędne w kolejnych wierszach przedstawiają długości składowych, leżących w płaszczyznach podziału. Stąd też, elementy leżące na diagonalnej nazywać będziemy **naprężeniami normalnymi**, pozostałe zaś **naprężeniami stycznymi**
2. Macierz naprężeń jest podstawą określania stanu naprężenia w każdym punkcie i dlatego będzie ona podstawowym przedmiotem poszukiwań TS,
3. Macierz naprężeń staje się uporządkowanym zbiorem liczb, jeśli ustalimy współrzędne punktu.
4. Macierz naprężeń jest macierzą kwadratową, symetryczną, nieosobliwą (istnieje macierz odwrotna) i określoną dodatnio (wyrazy diagonalni są >0 oraz minory wszystkich rzędów >0 (twierdzenie Sylwestra).

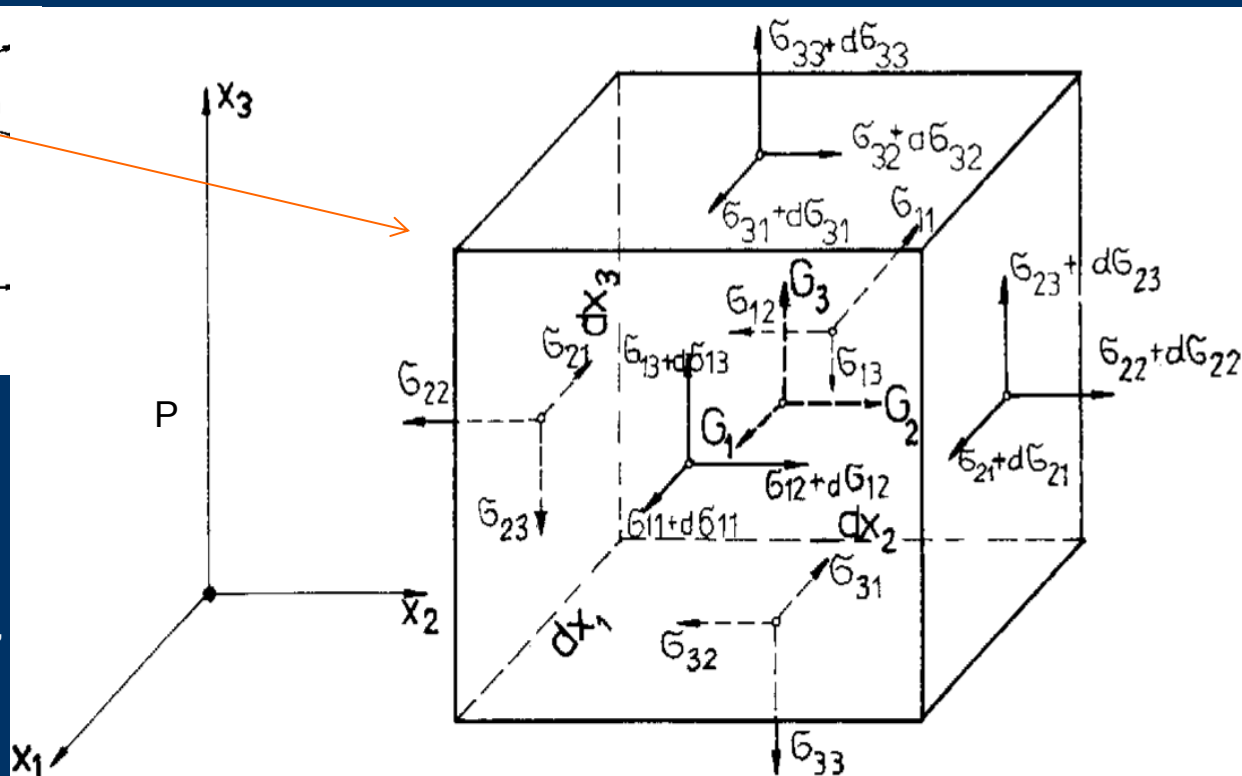


Graficzny obraz macierzy naprężeń na sześcianie „jednostkowym”

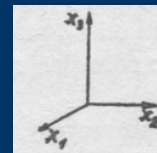


Punkt materialny o wymiarach $dx_1 * dx_2 * dx_3 \rightarrow$
Siły masowe $G_1, G_2, G_3 \rightarrow$

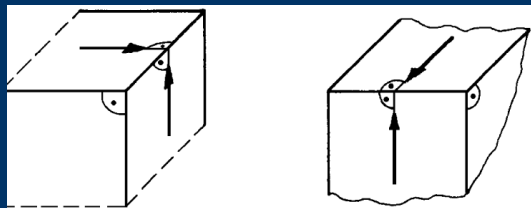
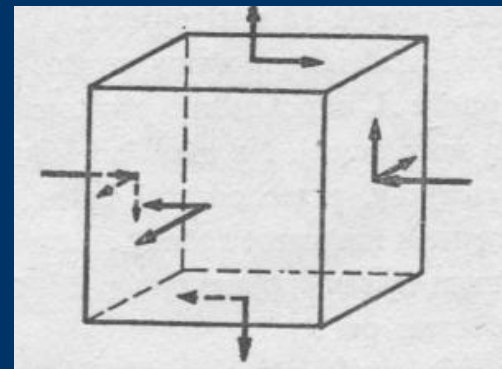
Z symetrii macierzy naprężeń, wynika, że równe są naprężenia styczne na płaszczyznach wzajemnie prostopadłych i prostopadłe do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn.



Przykład obrazu naprężeń



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



Przykład

Tw: Macierz naprężeń jest tensorem – dowód. cz.2

Dowód tw. cz.2.:

Analogicznie założymy w pkt. A_1, A_2, A_3 naprężenia są średnie ze ścian $\Delta F_2, \Delta F_3, \Delta F$ i oznaczmy je:

$$\hat{p}_2 = (\hat{\sigma}_{21}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{23}); \hat{p}_3 = (\hat{\sigma}_{31}, \hat{\sigma}_{32}, \hat{\sigma}_{33}); \hat{p}_v = (\hat{\sigma}_{v1}, \hat{\sigma}_{v2}, \hat{\sigma}_{v3}) \quad (14)$$

Siły wewnętrzne na poszczególnych ściankach uzyskamy przez przemnożenie tego średniego naprężenia przez pole powierzchni ścianki. Ponieważ układ sił wewnętrznych, działających na czworościan jest układem zerowym, więc suma sił S oraz moment względem dowolnego punktu jest równy 0.

$$\begin{aligned} S=0 \rightarrow S_1 &= -\hat{\sigma}_{11}\Delta F_1 - \hat{\sigma}_{21}\Delta F_2 - \hat{\sigma}_{31}\Delta F_3 - \hat{\sigma}_{v1}\Delta F = 0 \\ S_2 &= -\hat{\sigma}_{12}\Delta F_1 - \hat{\sigma}_{22}\Delta F_2 - \hat{\sigma}_{32}\Delta F_3 - \hat{\sigma}_{v2}\Delta F = 0 \quad (15) \\ S_3 &= -\hat{\sigma}_{13}\Delta F_1 - \hat{\sigma}_{23}\Delta F_2 - \hat{\sigma}_{33}\Delta F_3 - \hat{\sigma}_{v3}\Delta F = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{v1} &= \hat{\sigma}_{11}\alpha_{v1} + \hat{\sigma}_{21}\alpha_{v2} + \hat{\sigma}_{31}\alpha_{v3} \\ \hat{\sigma}_{v2} &= \hat{\sigma}_{12}\alpha_{v1} + \hat{\sigma}_{22}\alpha_{v2} + \hat{\sigma}_{32}\alpha_{v3} \quad (16) \\ \hat{\sigma}_{v3} &= \hat{\sigma}_{13}\alpha_{v1} + \hat{\sigma}_{23}\alpha_{v2} + \hat{\sigma}_{33}\alpha_{v3} \end{aligned}$$

$M=0 \rightarrow$ Postępując analogicznie z warunkiem $M=0$ i przechodząc do granicy przy $\Delta x_i \rightarrow 0$, udowadniamy symetryczność macierzy naprężeń, czyli

$$\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32}, \hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{31}, \hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21} \quad (17)$$

Wzory (16) z wykorzystaniem (17) (po opuszczeniu „^”) można zapisać z wykorzystaniem umowy sumacyjnej Einsteina: „powtarzający indeks nakazuje sumowanie po tym indeksie)

$$\sigma_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj} \quad (18)$$

$\rightarrow$ Dzielimy (15) obustronnie przez ΔF ; korzystamy z (11), otrzymujemy (16), a stamtąd w granicy przy $\Delta x_i \rightarrow 0$ (stały wektor normalnej zewnętrznej do ΔF ($v=\text{const}$))
 $\rightarrow$ otrzymamy wyrażenia identyczne jak (16), lecz naprężenia będą teraz w punkcie $A(x_1, x_2, x_3) \rightarrow$ (opuszczamy znak średniej= „^”)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{v1} &= \sigma_{11}\alpha_{v1} + \sigma_{12}\alpha_{v2} + \sigma_{13}\alpha_{v3} \\ \sigma_{v2} &= \sigma_{12}\alpha_{v1} + \sigma_{22}\alpha_{v2} + \sigma_{23}\alpha_{v3} \quad (19) \\ \hat{\sigma}_{v3} &= \sigma_{13}\alpha_{v1} + \sigma_{23}\alpha_{v2} + \sigma_{33}\alpha_{v3} \end{aligned}$$

Wniosek 1: Jeśli dana jest macierz naprężeń w punkcie oraz dane są współrzędne wektora normalnego dowolnej płaszczyzny, którą przecinamy bryłę, to za pomocą wzoru (18) obliczymy współrzędne wektora naprężenia w tym przecięciu

Tw: Macierz naprężeń jest tensorem – dowód. cz.3

Dowód tw. cz.3. :Równanie (18) zapiszmy w postaci macierzowej

$$\sigma_{vi} = \sigma_{ij} \alpha_{vj} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{v1} \\ \sigma_{v2} \\ \sigma_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{v1} \\ \alpha_{v2} \\ \alpha_{v3} \end{bmatrix} \quad (19), \text{ czyli } \mathbf{p}_v = [\sigma] \mathbf{v}$$

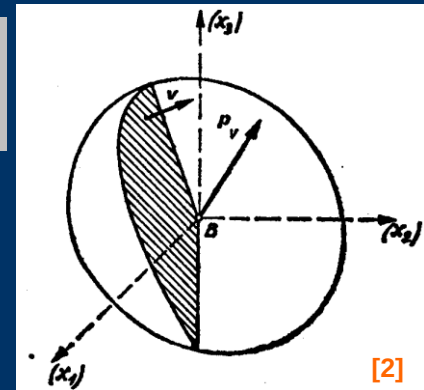
Z (18) można odczytać, że macierz naprężeń jest tensorem drugiego rzędu. Z definicji bowiem, tensorem drugiego rzędu nazywamy macierz, która pomnożona przez wektor, daje w wyniku wektor.

Przykład liczbowy. Niech w ustalonym punkcie B dana jest następująca macierz naprężeń, określona w układzie (x_i)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

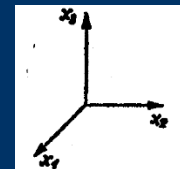
Znaleźć współrzędne wektora naprężenia $\mathbf{p}_v$ przy przecięciu bryły płaszczyzną przechodzącą przez punkt B o normalnej zewnętrznej

$$\mathbf{v} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



Rozwiązanie $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{v1} \\ \sigma_{v2} \\ \sigma_{v3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Wniosek 2: Do określenia stanu naprężenia wystarcza znajomość macierzy naprężeń w każdym punkcie, a więc znajomość funkcji $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$.

Wniosek 3: Macierz naprężeń jest tensorem, co ma ogromne praktyczne znaczenie, ponieważ pozwala wprost wykorzystać cały formalny aparat rachunku tensorowego, w tym umowę sumacyjną Einsteina. Jeśli stosujemy zapis wskaźnikowy. Szczególnie ważny jest wzór transformacyjny do nowego układu.

Macierz przejścia (20) $\rightarrow$ współrzędne wersorów e'_i nowych osi x'_i w układzie starym (x_i)

Kolejne wiersze macierzy przejścia (20) są współrzędnymi wersorów (e'_i) nowych osi, odniesionymi do układu starego (x_i) , kolumny zaś przedstawiają współrzędne wersorów starych osi e_i , określonych w układzie nowym (x'_i) . Macierz przejścia jest więc ortonormalna względem wierszy i kolumn, zachodzą relacje:

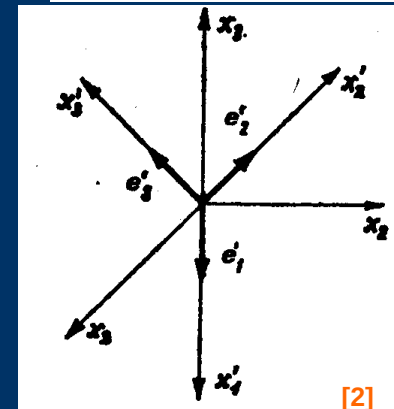
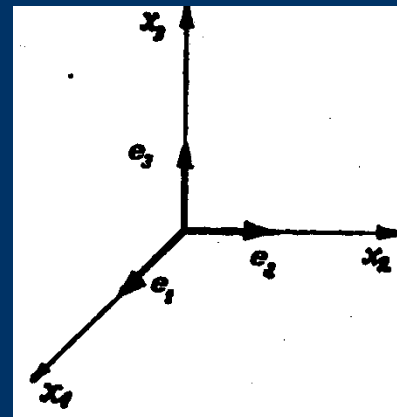
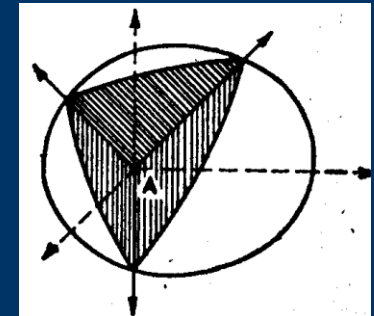
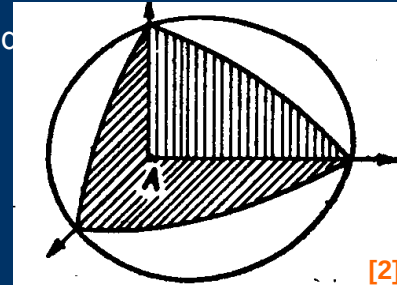
$$\left. \begin{matrix} \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} \\ \alpha_{ki} \cdot \alpha_{kj} \end{matrix} \right\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \circ (20)$$

Przykład liczbowy. W ustalonym punkcie B przy przecięciu bryły

: elementy macierzy naprężeń transformują się do nowego układu wg prawa tensorowego:

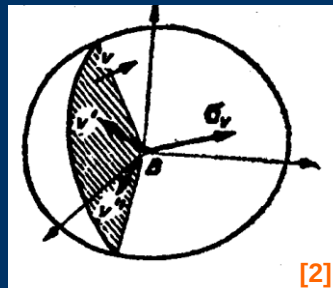
$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jr} \sigma_{kr} \circ (19)$$



Przykład transformacji macierzy naprężeń

$$\sigma'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jr} \sigma_{kr} \quad (19)$$

W pkt B dana jest macierz naprężeń



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć:

- długość naprężenia normalnego w pkt B przy przecięciu bryły płaszczyzną o wersorze normalnym v ,
- Naprężenia styczne leżące w płaszczyźnie jak w (a) i równoległe do wersorów v' , v''

$$v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad v'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad v''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\sigma'_{11} = \alpha_{1k} \alpha_{1r} \sigma_{kr} = \alpha_{11} \alpha_{11} \sigma_{11} + \alpha_{11} \alpha_{12} \sigma_{12} + \alpha_{11} \alpha_{13} \sigma_{13} \{k=1, r=1(1,2,3)\} + \dots =$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \end{aligned} \right\} k=1, r=(1,2,3)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 \end{aligned} \right\} k=2, r=(1,2,3)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{11} 0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{12} 3 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} 1 \end{aligned} \right\} k=3, r=(1,2,3) = -\frac{1}{4} + \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

Rozwiązanie b): zauważmy, że wersory v' , v'' są wzajemnie ortogonalne, ich współrzędne tworzą macierz przejścia

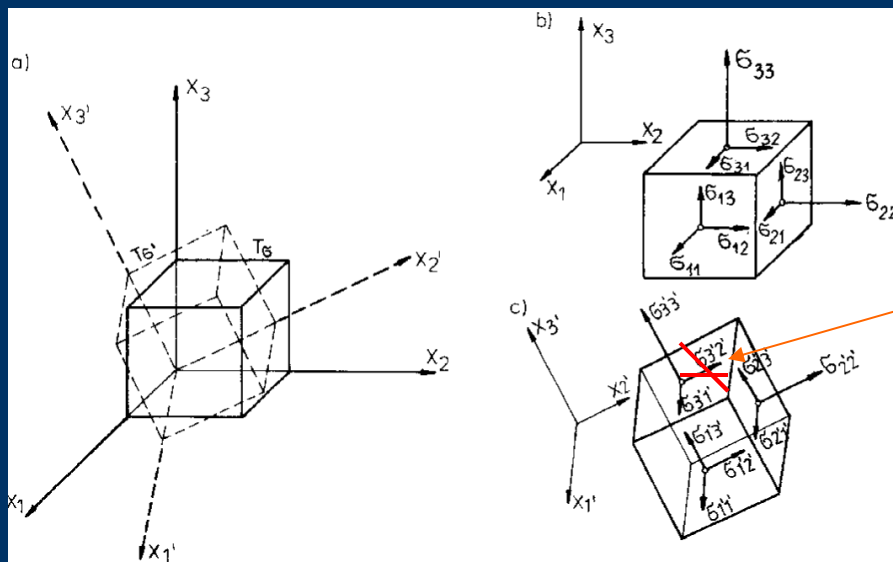
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie sprowadza się więc do znalezienia

$$\sigma'_{12}, \sigma'_{13}$$

co znajdziemy po rozpisaniu wzoru (19) dla (i=1, j=2) oraz (i=1, j=3) odpowiednio

Naprężenia główne i kierunki główne, to wartości i wektory własne



Naprężenie główne są to ekstremalne naprężenia normalne w punkcie ciała. Kierunki główne są to kierunki, na których działają naprężenia główne. Można udowodnić, że w płaszczyznach głównych (stowarzyszonych z naprężeniami głównymi) – naprężenia styczne znikają.

Zadanie: znaleźć takie wektory i liczby aby

$$\mathbf{v}^{(i)} \quad \sigma_{(i)}$$

$$[\sigma] \mathbf{v}^{(i)} = \sigma_{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \quad \circ (21) \sum_i NIE$$

Znalezienie naprężeń głównych i wektorów głównych jest znane w rachunku tensorowym, jako poszukiwanie wektorów własnych i wartości własnych

Zadanie własne (21) możemy zapisać w postaci macierzowej (22)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{bmatrix} = \sigma_{(i)} \begin{bmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad \circ (22)$$

$$\alpha_1^{(i)2} + \alpha_2^{(i)2} + \alpha_3^{(i)2} = 1 \quad \circ (10)$$

Łatwo można zauważyć, że układ równań (22) jest jednorodny ze względu na szukane kosinusy kierunkowe α_j ($j=1,2,3$), a zatem rozwiązanie niezerowe istnieje wtedy, gdy wyznacznik macierzy utworzony ze współczynników przy niewiadomych

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{(i)} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{(i)} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{(i)} \end{vmatrix} \quad \circ (23)$$

Układ równań zadania własnego (22) z warunkiem (10)

Wyznacznik charakterystyczny (23)

Równania charakterystyczne

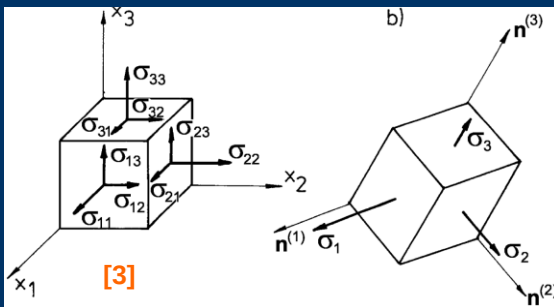
Warunek zerowania wyznacznika (23) po rozpisaniu, przyjmie postać **równania charakterystycznego** (lub sekularnego, wiekowego)
(znanego z algebry liniowej)

Równanie charakterystyczne ma zawsze trzy pierwiastki rzeczywiste (ze względu na symetrię macierzy naprężeń), które oznaczmy

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Macierz naprężeń w układzie (1,2,3) przyjmuje postać

$$[\sigma]_{\text{główna}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Macierz główna

Relacje naprężeń głównych

$$\sigma_{(i)}^3 - I_1 \sigma_{(i)}^2 + I_2 \sigma_{(i)} - I_3 = 0 \quad (24)$$

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{const},$$

$$I_2 = \sum_i M_i \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \text{const},$$

$$I_3 = \det \boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \text{const}$$

Naprężenia główne mogą mieć następujące relacje

- wszystkie różne
- dwa takie same
- wszystkie równe

W zależności od relacji będziemy mieli inną technikę wyznaczania oraz interpretację wektorów własnych:

- dla każdego pierwiastka zeruje się (23) → wektory własne wyznaczamy trzykrotnie z równań (22) po pominięciu dowolnego i zastąpieniu go przez warunek (10)
- wartości własnej pojedynczej odpowiada wektor własny, wyznaczony jak w a), natomiast pierwiastkowi podwójnemu odpowiada cała płaszczyzna wektorów własnych prostopadła do stowarzyszonego z pierwiastkiem pojedynczym → wyznaczamy go najczęściej z iloczynu wektorowego – algebra liniowa. Przypadek występujący w praktyce dość często.
- każdy wektor jest wektorem własnym. Przy przecięciu bryły każdą płaszczyzną otrzymujemy wektor naprężenie prostopadły do tej płaszczyzny.

Naprężenia i kierunki główne w płaskim stanie naprężenia

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

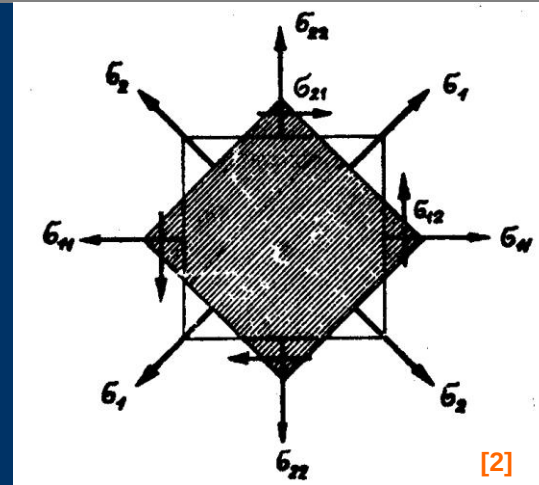
Dla przypadku płaskiego równania i ilustracja graficzna ulegną znacznemu uproszczeniu:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2, I_3 = 0$$

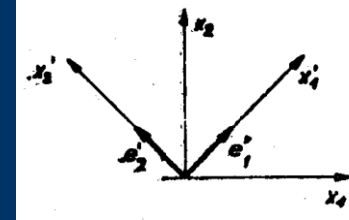
$$\sigma_{(i)}^2 + I_1\sigma_{(i)} + I_2 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$



[2]



$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_1)\alpha_{11} + \sigma_{12}\alpha_{12} &= 0, \\ \sigma_{12}\alpha_{12} + (\sigma_{22} - \sigma_2)\alpha_{22} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} = t \Rightarrow \alpha_{11} &= \frac{\sigma_{22}}{\sigma_1 - \sigma_{11}} t \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + (\sigma_1 - \sigma_{11})^2}}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_{11})^2 + \sigma_{12}^2}}, \alpha_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_{11})^2 + \sigma_{12}^2}} \\ \alpha_{21} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_{11}}{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_{11})^2 + \sigma_{12}^2}}, \alpha_{22} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_{11})^2 + \sigma_{12}^2}} \end{aligned}$$

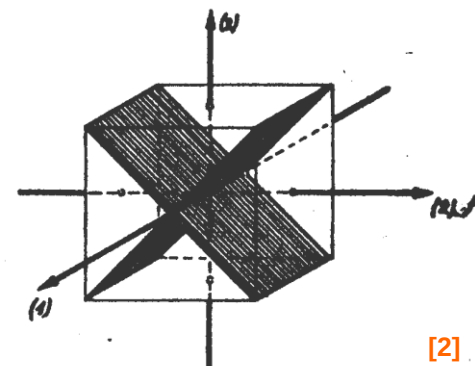
Ekstremalne naprężenia styczne w płaszczyznach nachylonych o 45° do płaszczyzn głównych

Koło Mohra, Nierówności

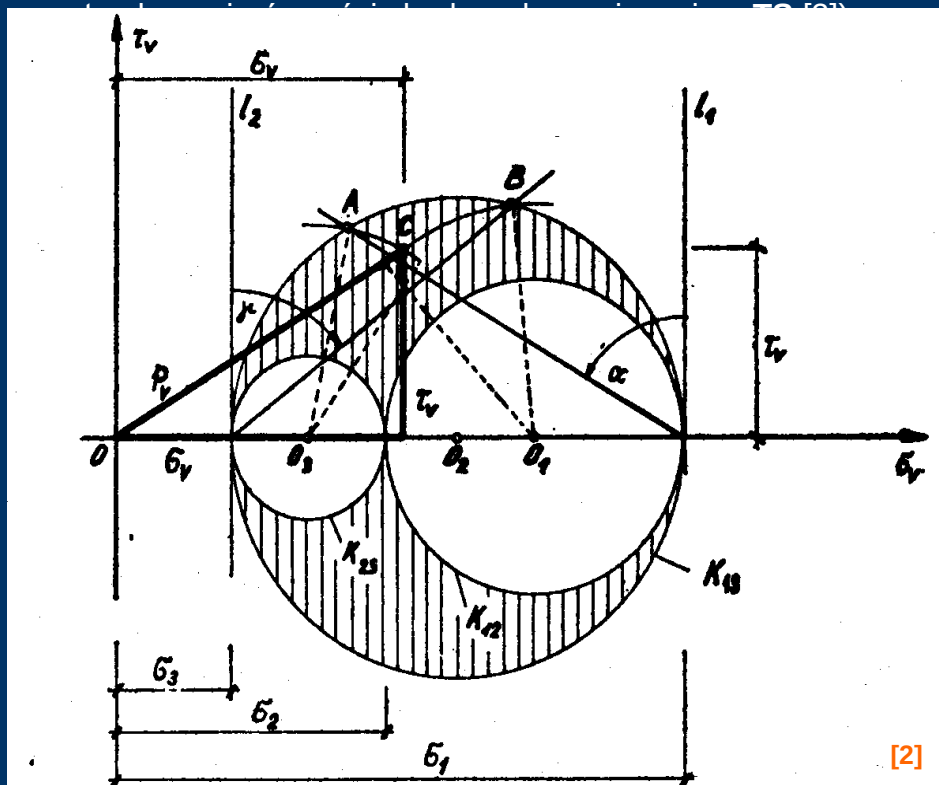
Tw. Płaszczyzny, którym przyporządkowane są ekstremalne naprężenia styczne, przechodzą przez jedną z osi głównych i do pozostałych są nachylone pod kątem 45° : $\rightarrow$

Dowód, np. w [2].

Graficzną analizę stanu naprężenia dokonujemy zwykle w konstrukcji **koła Mohra** (znane z WM; na tym kursie nie prowadzimy głębszej analizy, wskażemy tylko, że koła Mohra



[2]



[2]

$$\left. \begin{aligned} \tau_v \left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_v \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_v \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) &= \tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Nierówności stanu naprężeń $\rightarrow$ podstawa do konstrukcji Mohra

$$\begin{aligned} \left(\sigma_v - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_v^2 &\geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2, \\ \left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_v^2 &\leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2, \\ \left(\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_v^2 &\geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Stefan Piechnik
*Wytrzymałość
materiałów, PWN
1980,*

lub

*Mechanika
techniczna ciała
stałego, 2006*

