

Dr inż. Leszek CHODOR

Dr inż. Roman BIJAK

Politechnika Świętokrzyska, Katedra Budownictwa Metalowego i Teorii Konstrukcji

WRAŻLIWOŚĆ NA IMERFEKCJE PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH Z POŁĄCZENIAMI PODATNYMI

1. Wprowadzenie

Dominującą technologią budowy lekkich konstrukcji budowlanych jest scalanie ich ze stalowych prętów o przekroju cienkościennym za pomocą połączeń śrubowych.

W niniejszej pracy przedstawimy teoretyczne podstawy analizy wrażliwości nośności takich konstrukcji na imperfekcje geometryczne: 1) wstępne wygięcia i skręcenia prętów między węzłami, 2) parametry modelu połączeń półsztywnych prętów w węzłach, 3) błędy montażowe połączeń prętów. W analizie przyjęto model nieliniowego geometrycznie elementu cienkościennego pręta o przekroju otwartym oraz nieliniowy model połączenia odkształcalnego.

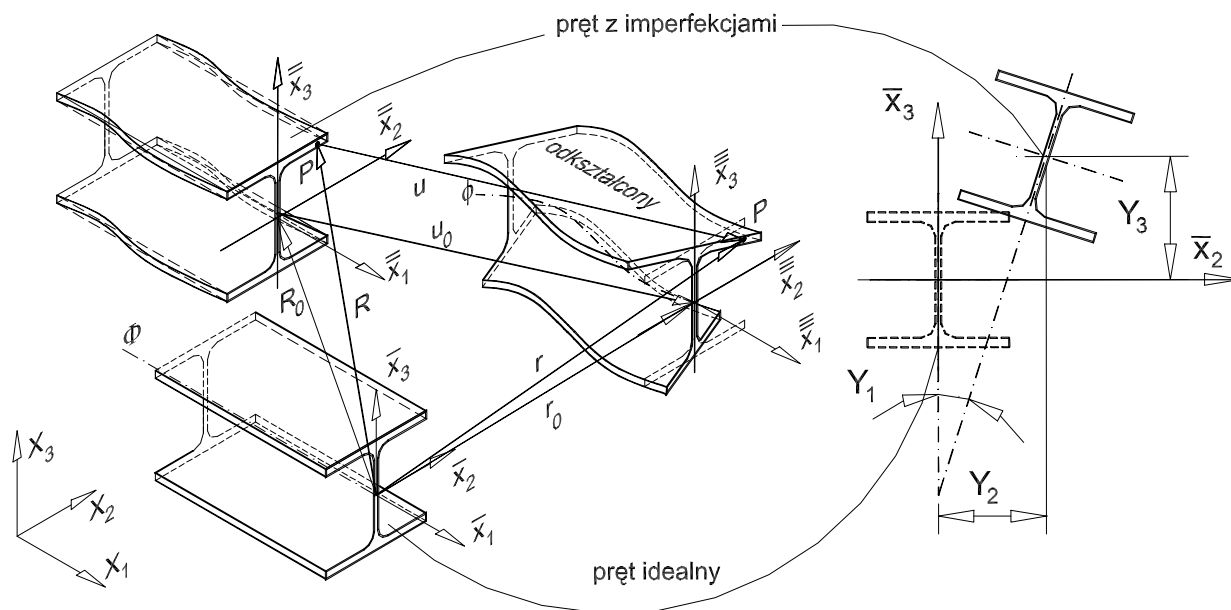
Podatne połączenia prętów mają istotny wpływ na zachowanie konstrukcji stalowych. Rozrzut wyników numerycznych oraz doświadczalnych badań podatności połączeń odkształcalnych wskazuje, że ich analiza uwzględniająca tylko jeden parametr: wartość średnią – jest niepełna i może prowadzić do błędnych wniosków. W literaturze [1,3 i in.] wskazuje się bowiem, że rozrzuty sztywności połączenia danego typu mogą dochodzić do 60%, a więc znacznie przekraczać zmienności innych parametrów konstrukcji.

Przetawione elementy modelu teoretycznego mogą być podstawą budowy procedur i programów numerycznych obliczania wrażliwości. Te z kolei mogą być zastosowane w procedurach obliczania niezawodności konstrukcji za pomocą Stochastycznej Metody Elementów Skończonych.

2. Model elementów systemu konstrukcyjnego z imperfekcjami

2.1 Model pręta cienkościennego z imperfekcjami

W modelu pręta cienkościennego uwzględnijmy imperfekcje geometryczne osi pręta w funkcji względnej długości $\xi (= \bar{x}_1 / l) \in [0,1]$: $\mathbf{Y}^{(p)} = [Y_1(\xi), Y_2(\xi), Y_3(\xi)]^T = [\text{wstępne skręcenie przekroju wokół osi pręta } \bar{x}_1, \text{wstępne wygięcia pręta na kierunku osi } \bar{x}_2, \text{wygięcie na kierunku osi } \bar{x}_3]$ (rys. 1).



Rys.1

Przyjmijmy następujące założenia:

- 1) Założenie geometryczne: a) małe odkształcenia, duże przemieszczenia liniowe i kąty skręcenia, umiarkowane obroty przekroju od zginania (nieliniowości drugiego rzędu), b) hipotezę kinematyczną Bernoulliego dla zginania i Własowa dla pacyenia.
- 2) Założenie fizyczne: materiał sprężysto-plastyczny HMH z izotropowym wzmocnieniem liniowym.

Można pokazać [5], że założenie geometryczne prowadzi do następujących wzorów na składowe tensora odkształcenia Greena-Lagrange'a dowolnego punktu P przekroju pręta (rys.1):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \bar{x}_2 \hat{k}_{03} + \bar{x}_3 \hat{k}_{02} - \omega \hat{k}'_{01} + (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) \frac{k_{Y01}^2 - k_{Y1}^2}{2(1+e_Y)^2}, \quad \gamma = 2r \hat{k}'_{01}, \quad (1a,b)$$

gdzie $(\cdot)' = d(\cdot)/d\xi$, ω - współrzędna wycinkowa, r = odległość od linii środkowej przekroju,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{1+e_U}{1+e_Y} - 1, \quad e_Y \cong \frac{(Y_2')^2 + (Y_3')^2}{2}, \quad e_U \cong u_{01}' + \frac{(U_{02}')^2 + (U_{03}')^2}{2} \quad (2a-c)$$

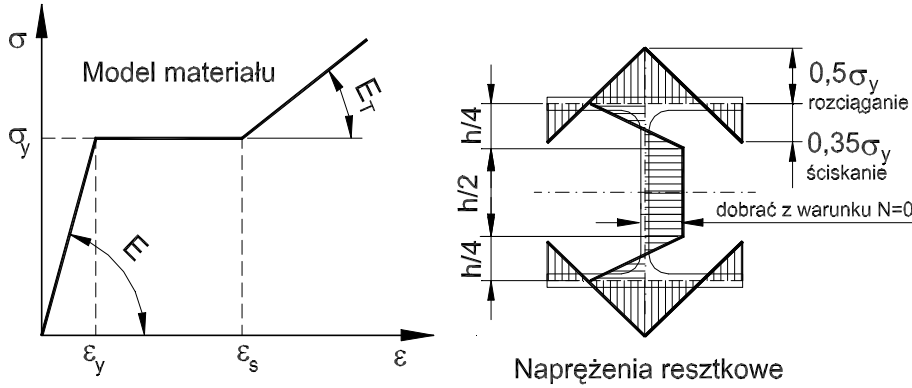
$$U_{0i} = Y_i + u_{0i}, \quad \hat{k}_{0i} = \frac{k_{Y0i} - k_{Yi}}{1+e_Y} \quad (i=1,2,3), \quad \phi_Y = Y_1 + \phi \quad (3a-c)$$

$$k_{Y01} = \phi'_Y + \frac{1}{2}(U''_{02}U'_{03} - U'_{02}U''_{03}), \quad k_{Y1} = Y'_1 + \frac{1}{2}(Y''_2Y'_3 - Y'_2Y''_3), \quad (4a,b)$$

$$k_{Y02} = U''_{02} \sin \phi_Y - U''_{03} \cos \phi_Y, \quad k_{Y2} = Y''_2 \sin Y_1 - Y''_3 \cos Y_1, \quad (5a,b)$$

$$k_{Y03} = U''_{02} \cos \phi_Y + U''_{03} \sin \phi_Y, \quad k_{Y3} = Y''_2 \cos Y_1 + Y''_3 \sin Y_1. \quad (6a,b)$$

Analiza przeprowadzona w [6] wskazuje, że wrażliwość nośności konstrukcji należy szacować



Rys. 2

z uwzględnieniem plastycznych właściwości materiału. Założenie plastyczności można opisać standardowymi zależnościami przyrostowymi pomiędzy przyrostem odkształce-

nia $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\gamma}\}^T$ i naprężenia $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \{\Delta \boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\tau}\}^T$ [8]:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \mathbf{E}^p, \quad (7a,b)$$

$$\mathbf{E}^e = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^p = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \sigma^2 E^2 & 3\sigma\tau EG \\ 3\sigma\tau EG & 9\tau^2 G^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \sigma_e^2 H' + \sigma^2 E + 9\tau^2 G \quad (8a-c)$$

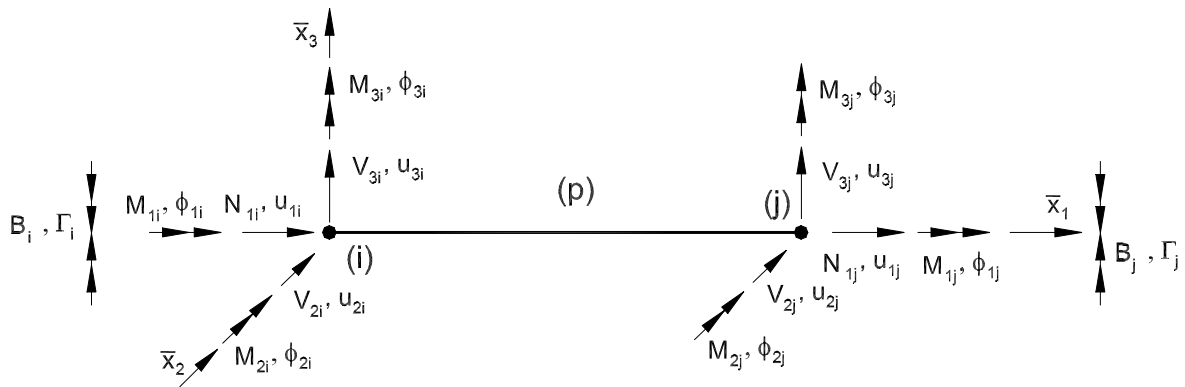
gdzie: $\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$, σ - całkowite naprężenie normalne oraz styczne τ , H' - parametr wzmocnienia. Wykres rozciągania materiału pozwala określić moduł Younga E , parametr wzmocnienia $H' = EE_T / (E + E_T)$, a po uwzględnieniu odkształcalności poprzecznej również moduł Kirchhoffa G .

W analizie należy również uwzględnić naprężenia resztkowe walcownicze w przekroju, np. według rozkładu pokazanego na rys. 2. Mają one istotny wpływ na pracę prętów cienkościennych [7,8] w zakresie plastycznym i są naprężeniami wyjściowymi w iterowaniu warunku (7).

Przemieszczenia węzłowe $\mathbf{a}^{(p)} = \left[(u_1, \phi_1, u_2, \phi_2, u_3, \phi_3, \Gamma)_{(i)}, (u_1, \phi_1, u_2, \phi_2, u_3, \phi_3, \Gamma)_{(j)} \right]^T$ węzłów (i) oraz (j) pręta (p) (rys.3) i siły $\mathbf{f}^{(p)} = \left[(N_1, M_1, V_2, M_2, V_3, M_3, B)_{(i)}, (N_1, M_1, V_2, M_2, V_3, M_3, B)_{(j)} \right]^T$ są związane zależnością przyrostową

$$\mathbf{K}_T^{(p)} \Delta \mathbf{a}^{(p)} = \Delta \mathbf{f}^{(p)}, \quad (9)$$

gdzie macierz sztywności stycznej elementu $\mathbf{K}_T^{(p)}$ należy wyznaczać z wykorzystaniem zależności



Rys. 3

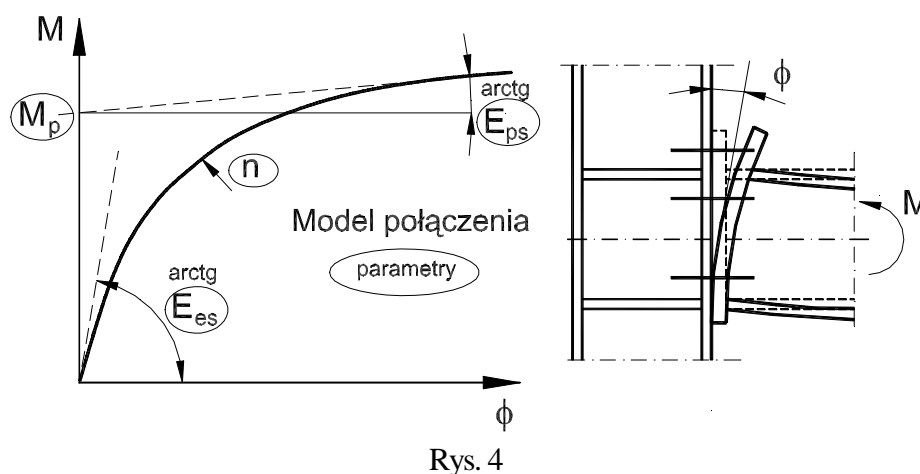
geometrycznych (1) do (6) i z uwzględnieniem plastyczności wyrażonej formułami (7),(8). Należy podkreślić, że konieczność uwzględnienia plastyczności czyni problem bardziej złożonym, bowiem oprócz podziału konstrukcji na elementy po długości należy wprowadzić dodatkowe punkty całkowania po wysokości i szerokości przekroju. Posługiwanie się typowymi charakterystyki geometrycznymi przekroju cienkościennego jest niewystarczające - wymagana jest pełna znajomość wymiarów liniowych przekroju.

2.2 Model połączenia podatnego z imperfekcjami

Na rys. 4 pokazano model połączenia podatnego o czterech parametrach E_{es} , M_p , E_{ps} , n opisany zależnością Ramberda-Osgooda [1,3]:

$$M(\phi) = \frac{(E_{es} - E_{ps})\phi}{\left(1 + \left|\frac{(E_{es} - E_{ps})\phi}{M_p}\right|^n\right)^{1/n}} + E_{ps}\phi \quad (10)$$

Parametry połączenia (otoczone obwódką na rys. 4) należy wyznaczyć doświadczalnie lub numerycznie.



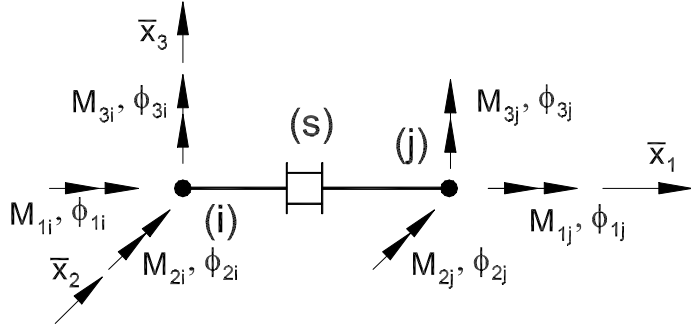
Rys. 4

Bahaari i Sherbourne [1] przeprowadzili analizę numeryczną 38 typów połączeń doczołowych za pomocą programu ANSYS, porównali wyniki z badaniami doświadczalnymi oraz sformułowali

krzywe regresji parametrów modelu w zależności od wymiarów geometrycznych połączeń. Praca połączenia ustalonego typu istotnie zależy od sztywności jego elementów: blach czołowych, średnicy i

rozstawu śrub, żeberk, rozmiarów i typów łączonych profili.

Przyjmujemy, że parametrami imperfekcji połączeń podatnych są zmienne $\mathbf{Y}^{(s)} = [Y_4, Y_5, Y_6, Y_7]^T = [E_{es}, M_p, E_{ps}, n]^T$. Są to globalne parametry połączenia, z których każdy jest nieliniową funkcją wymiarów geometrycznych połączenia (Bahaari i Sherbourne [1] wytypowali 12 istotnych wymiarów geometrycznych dla połączenia czołowego z wysuniętą blachą czołową).



Rys.5

Model połączenia uogólnijmy na przypadek skręcania i zginania w dwóch płaszczyznach. Na rys. 5 pokazano stopnie swobody połączenia wyrażone przez siły i przemieszczenia w węźle (i) oraz (j).

Przy pominięciu wzajemnego sprzężenia sztywności w różnych kierunkach wektor przemieszczeń węzłowych połączenia (s) $\mathbf{a}^{(s)} = [(\phi_1, \phi_2, \phi_3)_{(i)}, (\phi_1, \phi_2, \phi_3)_{(j)}]^T$ jest związany z siłami węzłowymi $\mathbf{f}^{(s)} = [(M_1, M_2, M_3)_{(i)}, (M_1, M_2, M_3)_{(j)}]^T$ macierzą sztywności połączenia $K_T^{(s)}$ jak następuje:

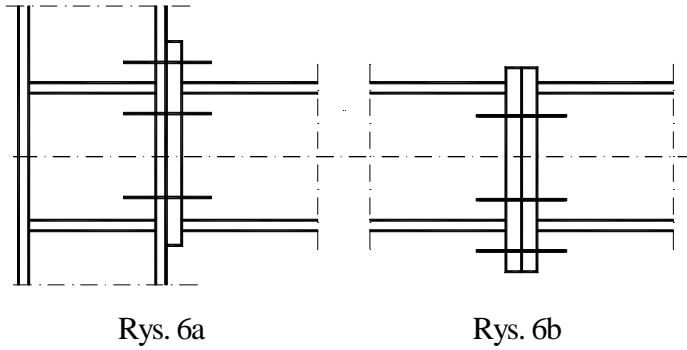
$$K_T^{(s)} \Delta \mathbf{a}^{(s)} = \Delta \mathbf{f}^{(s)}, \quad \text{gdzie} \quad K_T^{(s)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s & -\mathbf{I}_s \\ -\mathbf{I}_s & \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (11a-c)$$

Ze względu na stosunkowo mały (w stosunku do zginania) wpływ skręcania na wyężenie prętów przyjmujemy, że sztywność połączenia na skręcanie jest stała i równa sprężystej sztywności początkowej $E_1 = E_{es1}$. Natomiast dla zginania wokół obu osi głównych przekroju przyjmujemy model (9) odpowiednio o parametrach $(M_p, E_{ps}, E_{es}, n)_i$ ($i=2,3$ – płaszczyzny zginania). Przez zróżniczkowanie tego modelu względem ϕ , otrzymujemy giętą sztywność styczną połączenia

$$E_i = \frac{(E_{esi} - E_{psi})}{\left(1 + \left| \frac{(E_{esi} - E_{psi}) \phi^{n_i}}{M_{pi}} \right| \right)^{(n_i + 1/n_i)}} + E_{psi} \quad (i=2,3), \quad (12)$$

Z przyjętego modelu wynika, że: 1) połączenie ma zerową długość, 2) pomija się osiowe i poprzeczne odkształcenia połączenia, a w rezultacie oba węzły połączenia są kompatybilne.

W dwóch najczęściej spotykanych przypadkach połączeń przyjmujemy następujące warunki na paczenie:



- 1) w połączenia rygla ze słupem (rys. 6a) zerowanie paczenia $\Gamma_j = 0$ (pełne utwierdzenie ze względu na paczenie).
- 2) w połączeniu belek (rys. 6b) do macierzy sztywności na stopniu swobody paczenia węzła należy dodać sztywność żeberka przeciwko paczeniu $E_T = GI_s h$, gdzie I_s - sztywność skrętna przekroju żeberka, h – wysokość belki. W przypadku żeberka lub blachy czołowej o szerokości b i grubości t można przyjąć sztywność skrętną $I_s = 1/3bt^3$.

W przypadku żeberka lub blachy czołowej o szerokości b i grubości t można przyjąć sztywność skrętną $I_s = 1/3bt^3$.

2.3 Błędy montażowe

Sposób wykonstruowania połączeń czołowych na śruby wysokowytrzymałe zachęca wykonawców do likwidacji nieuniknionych odchyłek wykonawczych przez dokręcenie śrub. W wyniku tego konstrukcja może zostać wprowadzona w stan naprężenia dochodzący do kilkunastu procent jej sprężystej nośności (Biegus (1998)[2]).

Wady styków przypiszemy do elementów zakończonych elementami złącznymi. Mogą one objawiać się na każdym stopniu swobody $\mathbf{Y}^{(m)} = [Y_8, Y_9, Y_{10}, Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, Y_{14}]^T = [u_1, \phi_1, u_2, \phi_2, u_3, \phi_3, \Gamma]^T$, więc poprzez: skrócenie (wydłużenie) elementu, kąt skręcenia, przesunięcia i kąty obrotu w dwóch płaszczyznach oraz spaczenie powierzchni przyługowej w przekrojach przywęzłowych elementu.

Zakładamy, że obciążenie konstrukcji błędami montażowymi poprzedza wszystkie inne obciążenia oprócz ciężaru własnego. Stanowią więc one stan wyjściowy do dalszej analizy konstrukcji podobnie jak walcownicze naprężenia resztkowe w przekrojach. Błędy montażowe, podobnie jak wpływy termiczne lub przemieszczenia podpór uwzględnia się w sposób konwencjonalny: równoważnik węzłowy wywołany błędem montażowym na danym stopniu swobody wynosi: $f^{(m)} = K_T^{(p)} Y^{(m)}$.

3. Model systemu konstrukcyjnego i wrażliwość nośności

3.1 Warunek równowagi systemu konstrukcyjnego

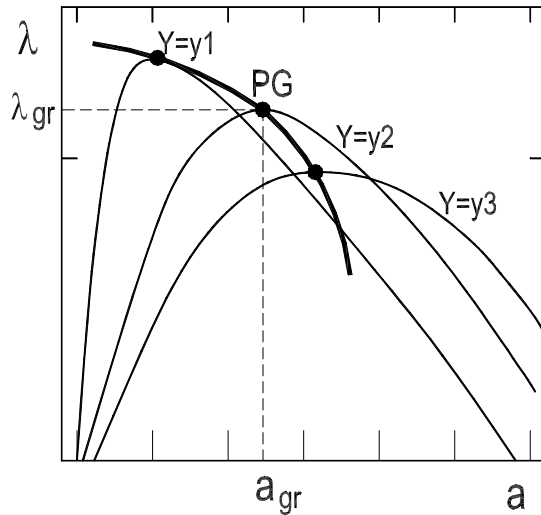
Związki przedstawione w p.2 pozwalają zbudować warunek równowagi systemu konstrukcyjnego złożonego z prętów cienkościennych z połączeniami odkształcalnymi. Warunek ten po zlinearyzowaniu dostosowanym do iteracji metodą Newtona-Raphsona można zapisać w postaci

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{a} = (\lambda + \delta \lambda) \cdot \mathbf{P} - \mathbf{f}(\mathbf{a}), \quad (13)$$

Styczna macierz sztywności systemu $\mathbf{K}_T = \sum \mathbf{K}_T^{(e)}$ jest sumą macierzy sztywności prętów (p) oraz

połączeń (s) ((e)=(p)+(s)) i w przypadku nieliniowym zależy od wektora przemieszczeń węzłowych konstrukcji \mathbf{a} ; \mathbf{f} jest wektorem sił wewnętrznych (sił przywęzłowych), \mathbf{P} jest obciążeniem odniesienia (konfiguracją obciążenia) skalowanym mnożnikiem λ .

3.2 Wrażliwość nośności systemu prętów cienkościennych



Rys. 7

Na rys. 7 grubą linią ciągłą oznaczono linię łączącą punkty graniczne PG obserwowane na ścieżkach równowagi konstrukcji wyznaczonych dla różnych wartości imperfekcji \mathbf{Y} .

Wrażliwość nośności konstrukcji λ_{gr} na zmiany wektora imperfekcji $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}^{(p)}, \mathbf{Y}^{(s)}, \mathbf{Y}^{(m)}]^T$ (imperfekcje prętów $\mathbf{Y}^{(p)}$ (p.2.1), imperfekcje połączeń $\mathbf{Y}^{(s)}$ (p.2.2) oraz błędy montażowe $\mathbf{Y}^{(m)}$ (p.2.3)) wynosi

$$\text{wrażliwość nośności} = \frac{\partial \lambda_{gr}}{\partial \mathbf{Y}} \quad (14)$$

Różniczkując warunek równowagi przed linearyzacją $\mathbf{G} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \lambda \mathbf{P}$ po \mathbf{Y} otrzymujemy

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{Y}} - \mathbf{P} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{Y}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Mnożąc lewostronnie powyższe równanie przez wektor własny Ψ^T macierzy $\mathbf{K}_T = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a}$, uwzględniając symetrię macierzy $(\mathbf{K}_T \Psi)^T = \Psi^T \mathbf{K}_T = \mathbf{0}$ oraz warunek punktu granicznego $d\lambda_{gr}/ds = \mathbf{0}$, $\Psi^T \mathbf{K}_T = \mathbf{0}$, (s – parametr ścieżki równowagi) otrzymujemy wyrażenie na wrażliwość nośności systemu prętów cienkościennych

$$\frac{\partial \lambda_{gr}}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\Psi^T (\partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{Y})}{\Psi^T \mathbf{P}} \quad (16)$$

Wrażliwość nośności jest jedną z podstawowych informacji potrzebnych do wyznaczenia niezawodności konstrukcji [4].

4. Uwagi i wnioski

W pracy przedstawiono podstawy teoretyczne umożliwiające budowę algorytmów numerycznych do analizy ścieżek równowagi, wyznaczania nośności oraz badania wrażliwości nośności konstrukcji zbudowanych z prętów cienkościennych z połączeniami podatnymi obciążonymi imperfekcjami

geometrycznymi osi prętów, imperfekcjami parametrów połączeń podatnych oraz błędami montażowymi w zakresie nieliniowym geometrycznie oraz fizycznie.

Zaproponowany element pręta cienkościennego w sposób jawny zawiera parametry imperfekcji geometrycznych wygięć osi oraz wstępnych skręceń, co umożliwia zastosowanie metody bezpośredniego różniczkowania do wyznaczania wrażliwości nośności.

Model połączenia podatnego potraktowano w sposób zgodny z filozofią metody elementów skończonych, co pozwala na proste modyfikacje standardowych procedur numerycznych.

Przykłady analizy konstrukcji z wykorzystaniem przedstawionego algorytmu są zamieszczone w pracach [4,5].

Literatura

- [1] Bahaari, M.R., Sherbourne, A.N., *Finite element prediction of end plate bolted connection behavior. I: Analytic formulation*, J. Struct.Engng., ASCE, 123(2) (1997), pp. 165-175.
- [2] Biegus A. , Nośność graniczna śrubowych styków doczołowych z imperfekcjami geometrycznymi, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1998,
- [3] Blandford G.E., *Thin-walled space frame analysis with geometric and flexible connection nonlinearities*, J. Comput. & Structures, 35(5) (1990), pp. 609-617.
- [4] Chodor L.: *Reliability of thin-walled imperfect frames with semi-rigid connections*, J.Comput.&Structures (w przygotowaniu)
- [5] Bijak R , Chodor L.: *Thin-walled imperfect frame with geometric and material nonlinearities*, Archiwum Inżynierii Lądowej (w przygotowaniu)
- [6] Chodor L., Bijak R., Kołodziej G. (1997)., *Wrażliwość nośności konstrukcji nieliniowych*, Materiały XLIII Konf. Nauk KILiW i KN PAN, Tom I: Teoria Konstrukcji, Poznań-Krynica, 1997,
- [7] King, W.S., Chen W.F., *Practical second-order inelastic analysis of semi-rigid frames*, J. Struct. Engng., ASCE, 120(7) (1994), pp. 2156-2175.
- [8] Valentino J, Pi Y.-L., Trahair N.S., *Inelastic Buckling of Steel Beams with Central Torsional Restraints*, Journal of Structural Engineering, September 1997, pp. 1180-1185

SENSITIVITY ANALYSIS OF NONLINEAR THIN-WALLED BARS WITH SEMI-RIGID CONNECTIONS

Summary

Sensitivity analysis of 3-D frame consists with thin-walled rods and semi-rigid connections are developed. Rod model incorporates geometric imperfections and material nonlinear is formulated. The nonlinear connection behavior is modeled using Ramberg-Osgood moment-rotation relationship.

An efficient algorithm that may be used to determine sensitivity of load capacity of respect connection parameters is shown.