



IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice

Kraków - Rytno, maj 1989



Leszek Chodor
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

ALGORYTM SZACOWANIA LOSOWYCH ODPOWIEDZI SYSTEMÓW KONSTRUKCYJNYCH PRZY UŻYCIU STOCHASTYCZNEJ METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

1. Wprowadzenie

Z uwagi na topologię rzeczywistych konstrukcji, zbudowanych z powtarzalnych elementów technologicznych, naturalna jest dyskretyzacja na elementy skończone również w losowej analizie konstrukcji. Oprócz konwencjonalnych zasad podziału na elementy skończone należy wziąć pod uwagę wartość i zasięg korelacji cech konstrukcji i obciążenia.

Contreras [1] (1980) używa nazwy "stochastyczna metoda elementów skończonych" w celu oznaczenia sposobu szacowania losowych odpowiedzi konstrukcji znajdującej się w losowym polu obciążeń. Rozpatruje stochastyczne różniczkowe równanie ruchu realizacji systemu zdyskretyzowanego na elementy skończone. Nie bierze jednak pod uwagę losowego pola konstrukcji, a obliczenia prowadzi na globalnych macierzach sztywności systemu.

Vanmarcke [2] (1982) stosuje skalę fluktuacji pola losowego jako integralną miarę korelacji. W tym ujęciu macierz korelacji złożona jest z korelacji między parami lokalnych średnich stowarzyszonych z różnymi obszarami pola. Obszary te nazwano elementami skończonymi a analizę układu stochastyczną metodą elementów skończonych. Vanmarcke i Grigoriu [3] (1981) taką technikę stosują do analizy wolnopodpartej belki z losowymi sztywnościami.

Wong [4] (1986) analizuje liniowe problemy drgań, stosując dyskretyzację losowego równania różniczkowego przy jednoczesnym użyciu standardowych technik elementów skończonych i różnic skończonych. Uwzględnia

losowe wymuszenia i losowe warunki początkowe zadania. Natomiast własności systemu konstrukcyjnego traktuje w sposób deterministyczny.

Langley w pracy [5] (1987) rozpatruje nieliniowy oscylator z jednym stopniem swobody poddany działaniu stacjonarnego lub niestacjonarnego gaussowskiego procesu obciążeń, a w pracy [6] (1987) pokazuje zastosowanie linearyzacji stochastycznej w analizie losowych odpowiedzi konstrukcji. Rozwiązania uzyskuje metodą elementów skończonych, stosując dyskretyzację czasoprzestrzeni po czasie. Nie uwzględnia losowego charakteru materialnego pola konstrukcji.

Dickinson i Savage [7] (1987) zwracają uwagę, że algorytmy numeryczne winny być tak opracowane, aby ujawnić fizyczny sens rozwiązywanych zagadnień i umożliwić skuteczne szacowanie losowych odpowiedzi dużych, złożonych konstrukcji. Model dużego systemu, zdyskretyzowanego na super-elementy w polu losowych obciążeń siłami lub przemieszczeniami formułują przy użyciu teorii sieci. Nie uwzględniają losowych cech konstrukcji.

Kiureghian, Lin i Wang [8] (1987) "stochastyczną metodą elementów skończonych" nazywają sposób analizy zdyskretyzowanego pola losowego konstrukcji i jej otoczenia. Zwracają uwagę, że po dyskretyzacji rozmiar wektora zmiennych wejściowych może być bardzo duży (rzędu wielu setek lub tysięcy). W związku z tym należy dążyć do stosowania szybkich, aproksymacyjnych metod numerycznego całkowania prawdopodobieństwa zniszczenia. Omawiają metody drugiego rzędu aproksymacji niezawoności systemu.

W niniejszej pracy omówiono koncepcję stochastycznej metody elementów skończonych (SMES) dostosowanej do szacowania parametrów losowych odpowiedzi systemów konstrukcyjnych. Zaproponowane sformułowanie umożliwia szacowanie wartości oczekiwanych oraz losowych zmienności każdej wielkości występującej w obliczeniach inżynierskich.

Stochastyczna metoda elementów skończonych jest sposobem analizy losowo odkształcalnej konstrukcji, polegającym na dyskretyzacji systemu konstrukcyjnego na stochastyczne elementy skończone i stosowaniu metod probabilistycznych na etapie budowy systemu [9].

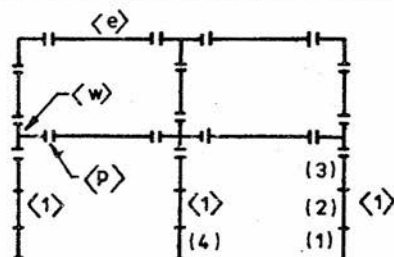
Metoda spełnia dwa postulaty: 1) losowe pole własności konstrukcji jest dyskretyzowane na stochastyczne elementy skończone, 2) analiza probabilistyczna wykonywana jest przed złożeniem konstrukcji z elementów.

W celu przystosowania algorytmu obliczeń do rozwiązywania dużych, złożonych systemów, zastosowano aproksymacyjną metodę całkowania pierwszego rzędu, to znaczy metodę linearyzacji. Stochastyczne pole ciągłe zastąpiono dyskretnym polem losowym, w którym każda zmienna jest charakteryzowana pierwszym i drugim momentem statystycznym.

2. Dyskretyzacja konstrukcji

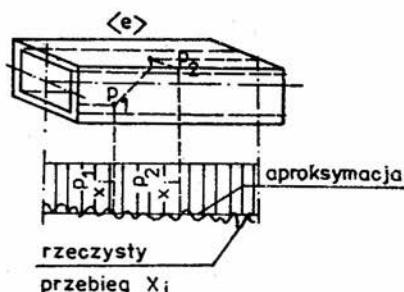
Obszar konstrukcji, będący stochastycznym polem parametryzowanym przez współrzędne punktów konstrukcji zastąpiono dyskretnymi podobszarami, które nazwano stochastycznymi elementami skończonymi (SES).

Przykład dyskretyzacji konstrukcji na SES pokazano na rys.1, gdzie wydzielono stochastyczne elementy prętów $\langle e \rangle$, węzłów $\langle w \rangle$ i połączeń $\langle p \rangle$.



$\langle \cdot \rangle$ elementy stochastyczne
 $(\cdot)$ elementy konwencjonalne

Rys.1



Rys.2

Przyjęto, że losowe właściwości SES są w pełni autokorelowane w jego obszarze. Z założenia tego wynika, że z prawdopodobieństwem równym jedności własność X_i w punkcie P_2 SES jest deterministyczną funkcją liniową X_i w punkcie P_1 : $Pr\{X_i(P_2) = a + bX_i(P_1)\} = 1$, gdzie X_i jest miarą własności X_i , natomiast a i b są deterministycznymi współczynnikami (rys.2).

Dowolna korelacja może zachodzić pomiędzy: 1) różnymi własnościami w obrębie jednego elementu, 2) dowolnymi własnościami dwóch elementów.

Zmienne losowe X_i charakteryzujące SES $\langle e \rangle$ zestawimy w wektor $X^{\langle e \rangle}$.

Dyskretyzację losowych wymuszeń układu, charakteryzowanych przez statyczne oraz kinematyczne warunki brzegowe można przeprowadzić przy założeniu, że zostały wyznaczone integralne parametry statystyczne wymuszeń, pozwalające traktować je jako zmienne losowe w pełni skorelowane na powierzchni każdego elementu skończonego konstrukcji. Stowarzyszone z elementem $\langle e \rangle$ obciążenia powierzchniowe można włączyć do wektora $X^{\langle e \rangle}$. Natomiast więzi podporowe można traktować jako odrębne elementy.

3. Sterowanie liczbą zmiennych losowych

Ze względu na to, że liczba zmiennych losowych wprowadzonych razem z elementami stochastycznymi może być w praktyce bardzo duża, więc istotne znaczenie mają zabiegi zmierzające do jej redukcji.

Sterowanie liczbą zmiennych losowych można prowadzić na drodze:

- 1) zmniejszenia liczby elementów stochastycznych, 2) wprowadzenia

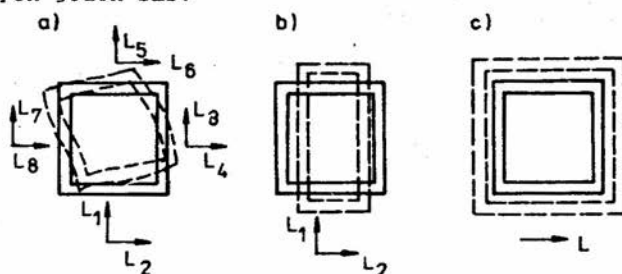
losowych układów miar, 3) zastosowania superelementów stochastycznych.

Zmniejszenia liczby elementów stochastycznych można dokonać, biorąc pod uwagę źródła korelacji własności systemu. Z analizy przeprowadzonej przez Garsona (1980) wynika, że współczynnik korelacji między własnościami elementów wykonanych z tego samego profilu hutniczego, w podobnej technologii może dochodzić do 0.98. Dlatego, prowadząc makroskopową analizę konstrukcji przyjęto, że elementami stochastycznymi są elementy wysyłkowo-montażowe. Elementów SES może być znacznie mniej od elementów konwencjonalnych. Jeden SES może składać się z rozłącznych części konstrukcji. Jeden konwencjonalny element skończony musi być jednak w całości przypisany do jednego z elementów SES.

W losowym układzie miar u każdą zmienną losową X_i zapiszemy multiplikatywnie [9]

$$X_i = x_i \cdot L_u^l \cdot M_u^m \cdot T_u^t, \quad (1)$$

gdzie: x_i - nielosowy moduł wielkości X_i ; l, m, t - nielosowe wykładniki potęg jednostek wymiarów; L, M, T - losowe jednostki reprezentujące kolejno długość, masę i czas. Jednostki L, M, T mają wartości oczekiwane odpowiednio 1m, 1kg, 1s i losowe zmienności integrujące wszystkie losowe fluktuacje X_i . Mówiąc obrazowo: przyjęto, że losowy jest przymiar, którym mierzone są własności X_i . Zapis (1) pozwala uprościć wyrażenia występujące w SMES i w sposób klarowny konstruować algorytmy numeryczne. W radykalny sposób redukuje również liczbę zmiennych losowych opisujących jeden SES.



Rys. 3.

Przykład 1. Korelacja charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego pręta.

Na rys. 3 zilustrowano zmiany przekroju pręta przy przyjęciu różnej liczby losowych układów miar, opisujących losowo-

wymi jednostkami liniowych wymiarów przekroju.

Rozważmy korelację funkcyjną między polem przekroju A , momentami bezwładności I_x, I_y oraz wycinkowym momentem bezwładności I_{ω} w przypadku dwóch losowych układów miar (rys. 3b). Poszczególne losowe charakterystyki geometryczne przekroju można zapisać następująco:

$A = A_1 L_1 L_2$, $I_x = I_x^0 L_1^3 L_2^3$, $I_y = I_y^0 L_1^3 L_2^3$, $I_{\omega} = I_{\omega}^0 L_1^3 L_2^3$. Macierz minimalnych współczynników korelacji między tymi zmiennymi, oszacowana metodą linearyzacji, wynosi:

$$\rho_{\min} = \begin{bmatrix} A & I_x & I_y & I_w \\ 1 & 0.87 & 0.87 & 0.34 \\ & 1 & 0.6 & 0.87 \\ & & 1 & 0.87 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Podkreślmy, że są to minimalne współczynniki korelacji, uzyskane przy założeniu braku korelacji między L_1 i L_2 . Duże wartości współczynników $\rho_{\min}$ świadczą o znacznej korelacji między charakterystykami geometrycznymi nawet przy $\rho_{L_1, L_2} = 0$. Do celów inżynierskich można założyć więc, że losowy kształt przekroju opisuje wystarczająco dokładnie jeden wymiar liniowy. W razie potrzeby założenie to można osłabić i wprowadzić kilka liniowych jednostek wymiarów przekroju pręta.

Hierarchiczne rozwiązywanie konstrukcji za pomocą *superelementów stochastycznych* umożliwia rozłożenie dużego problemu na szereg mniejszych i rozwiązywanie ich niezależnie jeden od drugiego. Po znalezieniu parametrów statystycznych odpowiedzi *superelementów stochastycznych* należy tymi wielkościami obciążyć węzły konstrukcji, traktując te obciążenia jako losowe wymuszenia.

4 Sformułowanie macierzowe równań linearyzacji stochastycznej

Rozważmy system konstrukcyjny złożony z elementów stochastycznych. Załóżmy, że znany jest model matematyczny systemu, uwzględniający odchylenia geometrii konstrukcji od kształtu idealnego, niedoskonałości materiału konstrukcji, odchylenia punktów przyłożenia, kierunków i wartości sił a także inne niedoskonałości:

$$X_{\text{ext}} = K(X_{\text{ext}}, X_{\text{int}}, Y) \cdot Y, \quad (2)$$

gdzie K jest macierzą sztywności/podatności konstrukcji. Równanie systemu (2) można wyprowadzić w sposób tradycyjny (deterministyczny)

Z globalnego wektora wejściowych zmiennych losowych X wydzielono podwektor X_{ext} wymuszeń zewnętrznych oraz podwektor X_{int} własności geometrycznych i mechanicznych konstrukcji.

Parametry statystyczne wektora odpowiedzi Y można oszacować na podstawie znanej wartości oczekiwanej EX oraz kowariancji $\text{cov}X$ wektora X z formuł linearyzacji stochastycznej wokół wartości oczekiwanych X [9]:

$$EY \cong f(EX), \quad \text{cov}Y \cong \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right) \cdot \text{cov}X \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial X} \right)^T, \quad (3a, b)$$

gdzie f jest jeszcze nieznaną wektorową funkcją rozwiązania równania (2). Do oszacowania kowariancji $\text{cov}Y$ potrzebna jest znajomość macierzy czułości $\partial f / \partial X$, którą można wyznaczyć bez znajomości funkcji f (p.5).

Parametry EX oraz $\text{cov}X$ można wyznaczyć podczas statystycznych badań próbek o rozmiarach rzędu wymiarów elementów, lub podczas badań próbek o mniejszych rozmiarach i zastosowaniu *superelementów stochastycznych*.

5. Szacowanie globalnej macierzy czułości systemu konstrukcyjnego

Przyjmijmy, że równanie równowagi systemu (2) zostało ułożone zgodnie z konwencjonalnymi zasadami metody elementów skończonych. Jest więc nieliniowym układem równań algebraicznych z losowymi współczynnikami.

Równanie (2) przepiszmy w następującej postaci

$$(K_o + K_o + K_L)Y = X_{ext}, \quad (4)$$

gdzie macierz sztywności złożono z macierzy sztywności początkowej $K(X_{int})$, macierzy geometrycznej $K_o(X_{int}, X_{ext})$ oraz macierzy dużych przemieszczeń $K_L(X_{int}, Y)$.

W celu oszacowania wartości oczekiwanej wektora Y z formuły (3a) należy rozwiązać równanie (4) dla oczekiwanej sztywności systemu.

W celu oszacowania macierzy czułości systemu przeróżniczkujemy obustronnie równanie (4) po dowolnej współrzędnej X_i wektora $X = [X_{int}, X_{ext}]$:

$$\left[\frac{\partial K_o}{\partial X_i} + \frac{\partial K_o}{\partial X_i} + \frac{dK_L}{dX_i} \right] \cdot Y + [K_o + K_o + K_L] \frac{\partial Y}{\partial X_i} = \frac{\partial X_{ext}}{\partial X_i}, \quad (5)$$

$$\text{gdzie } dK_L/dX_i = \partial K_L/\partial X_i + \partial K_L/\partial Y \cdot \partial Y/\partial X_i. \quad (5a)$$

Jeśli macierz dużych przemieszczeń $K_L = 0$, to równanie do wyznaczania macierzy czułości można zapisać w postaci analogicznej do (4):

$$(K_o + K_o) \partial Y/\partial X_i = B, \quad (6)$$

$$\text{gdzie prawa strona równania } B = \partial X_{ext}/\partial X_i - (\partial K_o/\partial X_i + \partial K_o/\partial X_i) Y. \quad (6a)$$

Zauważmy, że szacowanie macierzy czułości w tym przypadku sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych podobnych do równania realizacji (2). Inny jest tylko wektor prawych stron. Wystarczy więc jednokrotnie ztriangularyzować macierz $(K_o + K_o)$ w oczekiwanym punkcie równowagi i korzystać z niej zarówno przy wyznaczaniu EY jak i $\partial Y/\partial X_i$.

W przypadku uwzględnienia dużych przemieszczeń lub nieliniowości fizycznej prawa strona równania macierzowego do wyznaczania macierzy czułości zależy od iloczynu $\partial K_L/\partial Y \cdot \partial Y/\partial X_i \cdot Y$. Macierz czułości należy wówczas szacować iteracyjnie w oczekiwanym punkcie równowagi systemu.

Występujące we wzorach (5) oraz (6) pochodne globalnej macierzy sztywności $\partial K/\partial X_i$ można składać z pochodnych macierzy sztywności elementów stochastycznych:

$$\partial K/\partial X_i = \sum_{\langle \sigma \rangle} \partial K^{\langle \sigma \rangle}/\partial X_i \quad (7)$$

6. Szacowanie macierzy czułości elementu

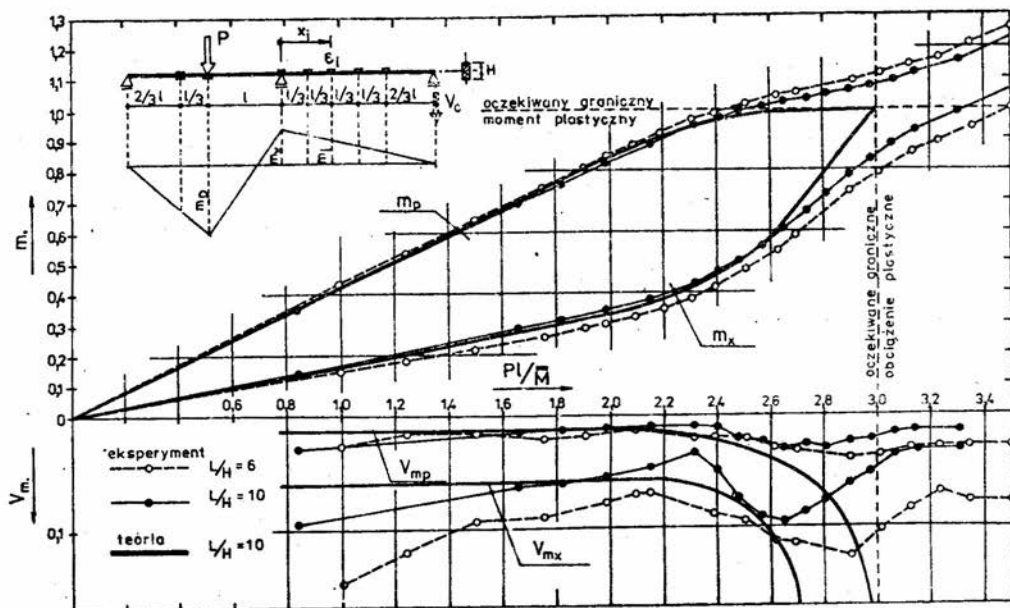
Jeśli znana jest jawna postać macierzy sztywności elementu $K^{(e)}$, to macierz $\partial K^{(e)} / \partial X_i$ (7) można obliczyć przez analityczne różniczkowanie $K^{(e)}$ w układzie lokalnym i przetransponowanie wyniku do układu globalnego.

W przeciwnym razie dobre rezultaty można uzyskać wówczas, gdy możliwe jest analityczne różniczkowanie pod znakiem całki wyrażenia na macierz sztywności elementu. W ten sposób można uniknąć różniczkowania numerycznego i zastąpić je całkowaniem.

Jeśli wymienione powyżej metody uzyskiwania macierzy czułości systemu zawodzą, to różniczkowanie można wykonać numerycznie. Jednakże należy tego unikać ze względu na czasochłonność i małą dokładność metody w dużych systemach konstrukcyjnych.

7. Przykład numeryczny

Na rys.4 pokazano trend oraz współczynnik zmienności względnego momentu przęsłowego m_p i podporowego m_x sprężysto-plastycznej belki dwupręsłowej. Wyniki numeryczne uzyskane z opracowanego programu komputerowego do analizy belek z uwzględnieniem sił poprzecznych, porównano z danymi eksperymentalnymi.



Rys. 4

8. Uwagi i wnioski

Zaproponowany algorytm stochastycznej metody elementów skończonych jest dostosowany do numerycznego szacowania parametrów losowych odpowiedzi złożonych konstrukcji inżynierskich.

Szacowanie globalnej macierzy czułości systemu można prowadzić równolegle z rozwiązaniem realizacji konstrukcji.

Redukcję zmiennych losowych systemu można uzyskać przez zmniejszenie liczby stochastycznych elementów skończonych, wprowadzenie losowych jednostek miar bądź zastosowanie superelementów stochastycznych.

Wykaz literatury

1. Contreras H.: The Stochastic Finite-Element Method, *Comput. Structures*, 12, 1980, s. 342-348.
2. Vanmarcke E.H.: Stochastic Finite Element Analysis, In: *Analysis of Random Capacity of Structures*, ed. A. Murzewski, KILW PAN, Jabłonna-Warszawa, 1982.
3. Vanmarcke E.H., Grigoriu M.: Finite Element Analysis of Beams with Random Rigidity, *J. Engng Mech. Div.*, Proc. ASCE, 1981.
4. Wong F.S.: Finite Element/Difference Methods in Random Vibration, *Computers and Structures*, 23, 1986, 1, s. 77-85.
5. Langley R.S.: A Finite Element Method for the Survival Probability of Nonlinear Oscillators, *Comput. Structures*, 27, 1987, 5, s. 611-617.
6. Langley R.S.: Stochastic linearisation of geometrically Non-linear Finite Element Method, *Comput. Structures*, 27, 1987, 6, s. 721-727.
7. Dickinson R.R., Savage G.J.: Automated Second Moment Analysis of Large Structures with Random Excitations, *Comput. Structure*, 27, 1987, 5, s. 657-669.
8. Kiureghian A., Lin H.-Z., Hwang S.-J.: Second-Order Reliability Approximations, *J. Engng Mech.*, Proc. ASCE, 113, 1987, 8.
9. Chodor L.: Stochastyczna metoda elementów skończonych w zagadnieniach losowej mechaniki konstrukcji, Materiały konferencji Naukowej PZITB i KN PAN, tom 1: Teoria Konstrukcji, Krynica 1988.

EVALUATION OF RANDOM RESPONSE OF STRUCTURES
USING STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD

Summary

The discretization process of the random deforming structures and boundary conditions on the stochastic elements is proposed. Methods of reduction the number of random variables are discussed. The random systems of measures and stochastic superelements are introduced. In the paper are presented: the matrix formulation of the first-order second moment method, the process of estimation sensitivity matrix of structures on the random rearrangement, the mean and covariance matrix of random response of structures. Proposed version of the stochastic finite element method is able to be used for many engineering problems of complex structures.