Dr inż. LESZEK CHODOR
Prof. dr hab. inż. ZBIGNIEW KOWAL
Politechnika Świętokrzyska

Interakcja zginania i ścinania stalowych belek zginanych poprzecznie w świetle badań eksperymentalnych

Interakcja zginania i ścinania stalowych belek zginanych poprzecznie była przedmiotem wielu prac teoretycznych, m.in. [1÷11] oraz eksperymentalnych, m.in. [12÷28]. Cechą charakterystyczną dotychczasowych badań teoretycznych jest różnorodność założeń upraszczających, prowadząca do znacznej rozbieżności wyników. Również badania eksperymentalne cechuje znaczny rozrzut wyników, przekraczający dolne i górne granice oszacowań teoretycznych [18].

Na rysunku 1a pokazano teoretyczne krzywe interakcji zginania i ścinania przekroju prostokątnego, ilustrujące rozbieżność wyników otrzymanych przez różnych autorów, a na rys. 1b — tego rodzaju krzywe dotyczące przekroju dwuteowego, proponowane przez różnych autorów [5, 7, 11, 24]. Krzywe graniczne pokazano w układzie współrzędnych bezwymiarowych, przy czym oznaczono: $M_{pl}=W_{pl}R$ — moment plastyczny przy czystym zginaniu, $Q_{pl}=F_{pl}R_t$ — plastyczna siła poprzeczna przy czystym ścinaniu. Granice plastyczności R i R_t odpowiadają odpowiednio czystemu rozciąganiu i czystemu ścinaniu. Wskaźnik plastycznego oporu przekroju przy czystym zginaniu oznaczono przez W_{pl}, natomiast efektywną powierzchnię ścinania przekroju przez F_{pl}.

Na rysunku 2 przedstawiono wyniki eksperymentalnych badań [7, 12÷27] dwuteowników o różnych stosunkach przekrojów pasów do przekroju środnika. W cytowanych pracach wykorzystano wyniki badań doświadczalnych prowadzonych tzw. metodami deterministycznymi. Graniczną nośność plastyczną ustalano według umownych kryteriów na podstawie „nie dokończonych" ścieżek równowagi obciążenie-przemieszczenie, mimo że najczęściej nie obserwowano wyraźnie zniszczenia [12] (nie obserwowano maksimum ścieżki równowagi).

W pracach [8, 28, 29, 30] wykazano, że krzywe interakcji nie są jednoznaczne dla danego kształtu przekroju poprzecznego belki, a zależą również od obciążenia i geometrii całej belki, tzn. od statycznych i kinematycznych warunków brzegowych. Na przykład *Green* [28] podaje oszacowania wpływu sposobu utwierdzenia wspornika na jego graniczną nośność plastyczną. Natomiast *Roderick* i *Philips* [29] rozważyli wpływ siły skupionej na nośność belki jednoprzęsłowej, bez uwzględnienia wpływu sił poprzecznych. Założyli, że zniszczenie belki następuje wówczas, gdy moment zginający osiąga wartość M_{pl} w odległości $h/2$ od obciążenia skupionego. Odległość $h/2$ przyjęli na podstawie teoretycznych i eksperymentalnych badań tarczy sprężystej. W trakcie eksperymentów pokazali, że nośność belki obciążonej jedną siłą skupioną jest o 5 do 8% większa od nośności belki obciążonej dwiema siłami rozstawionymi symetrycznie powodującymi taki sam ekstremalny moment zginający. *Chen* i *Shomaker* [30] analizowali nośność plastyczną wspornika o liniowo zmiennej wysokości przekroju prostokątnego, obciążonego na swobodnym końcu siłami poprzecznymi rozłożonymi równomiernie lub wg paraboli. Zaobserwowali mały (ok. 1%) wpływ rozkładu obciążenia oraz znaczny wpływ kąta zwężenia na nośność wspornika.

W zastosowaniach technicznych [31, 32, 33] i aktach normalizacyjnych [34÷37] wprowadzono krzywe interakcji zależne od kształtu przekroju poprzecznego prętów, lecz niezależne od statycznych i kinematycznych warunków brzegowych.

W niniejszym artykule podjęto próbę odpowiedzi na następujące pytania:

1) czy można redukować zadania wyznaczania nośności plastycznej belek poprzecznie zginanych do szacowania nośności plastycznej krytycznych przekrojów belki,

2) jaki wpływ na graniczną nośność plastyczną belek zginanych poprzecznie ma przyłożenie obciążenia w sposób skupiony,

3) czy do celów projektowych można zbudować zunifikowaną krzywą interakcji zginania i ścinania przekroju, tzn. taką krzywą, która nie zależy od kształtu przekroju, geometrii belki, warunków podparcia i przyłożenia obciążenia.

Krzywe interakcji nośności plastycznej prostokątnego przekroju krytycznego w świetle badań doświadczalnych

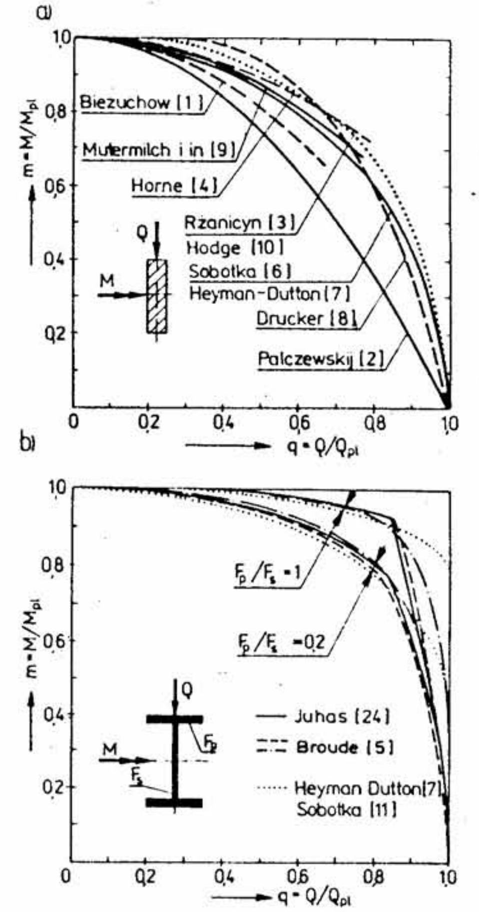
Ze względu na techniczne trudności szacowania nośności belek na podstawie ścieżek równowagi obciążenie—przemieszczenie, przeprowadzono próbę szacowania plastycznej nośności granicznej belek na podstawie badań fotomechanicznych, zamieszczonych w [38]. Analiza tych badań umożliwiła obiektywną ocenę wpływu obciążeń skupionych na nośność plastyczną belek.

Badania opisane w [38] dotyczyły pomiarów propagacji frontów plastycznych w stalowych belkach o przekroju prostokątnym. Zbadano 30 belek jednoprzęsłowych (pięć serii po 6 belek), obciążonych siłą skupioną w środku przęsła. Warunki modeli pokazano na rys. 3a. Grupy belek w poszczególnych seriach miały następujące nominalne długości przęsła $L=2l=4h=160$ mm, $L=6h=240$ mm, $L=8h=320$ mm, $L=10h=400$ mm, $L=12h=480$ mm.

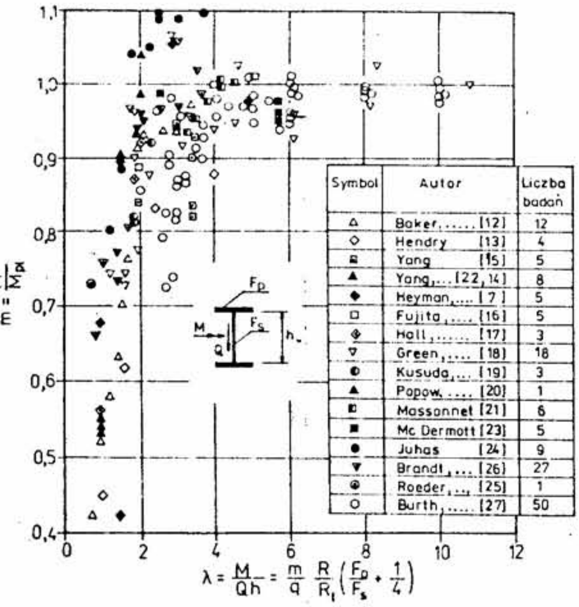
Materiał badanych modeli charakteryzował się statystycznie nieistotnymi różnicami ścieżek równowagi na ściskanie i rozciąganie (rys. 3b) [39]. Dolna granica plastyczności próbek rozciąganych wynosiła 280 MPa, ze współczynnikiem zmienności 7,9%.

Na rysunku 3a kratkowaniem oznaczono fotomechaniczną warstwę powierzchniową wylewaną na powierzchni bocznej badanych modeli. Na podstawie analizy izochrom szacowano fronty plastyczne, położenie rzeczywistych przekrojów krytycznych oraz graniczną nośność plastyczną belek. Nośność tę przyjmowano równą obciążeniu powodującemu całkowite uplastycznienie przekroju krytycznego belki.

Na rysunku 4 pokazano kształtowanie się frontów plastycznych na przykładzie belki o długości 320 mm. Przed wyczerpaniem nośności belki kształtują się fronty plastyczne pokazane na rys. 4a. Natomiast w granicznym stanie plastycznym, fronty plastyczne schodzą się po obydwu stronach jądra sprężystego o szerokości 2t utworzonego pod obciążeniem skupionym (rys. 4b). Fronty plastyczne i jądro sprężyste belki miały jakościowo podobny charakter we wszystkich badanych belkach, niezależnie od ich smukłości $\lambda=l/h$.



Rys. 1. Teoretyczne krzywe interakcji zginania i ścinania przekroju belki: a) przekroju prostokątnego, b) homogenicznego przekroju dwuteowego dla $F_p/F_s = 1,00$ i $F_p/F_s = 0,20$



Rys. 2. Wyniki badań doświadczalnych nośności plastycznej belek o przekroju dwuteowym

W tablicy 1 podano współrzędne nośności plastycznej oraz położenie przekroju krytycznego w belkach poszczególnych serii. Współczynniki zmienności losowej V_x obliczano jako stosunek odchylenia standardowego i wartości średniej w sześciu realizacjach i podano w procentach jako tolerancję wartości średniej X, stosując zapis $X \pm V_X\%$.

W kolumnie 1, 2 i 3 tabl. 1 podano: symbol serii sześciu belek, długość przęsła $L=2l$ oraz stosunek L/h długości przęsła do wysokości przekroju, w kolumnie 4 — nośności plastyczne belek mierzone obciążeniem $P=2Q$, powodującym złączenie dolnego i górnego frontu plastycznego, w kolumnach 5 i 6 — odległości t i t/l rzeczywistych przekrojów krytycznych od przekrojów nominalnie krytycznych, tzn. odległości przekrojów uplastycznionych od obciążenia skupionego.

Nośność przekrojów na czyste zginanie $M_{pl}=Rbh^2/4$ wynosiła 224,3 kN · cm ± 8% (w populacji wszystkich badanych belek), natomiast nośność $Q_{pl}=R_tbh$ wynosiła 112,1 kN ± 7,9%. Granicę plastyczności materiału na ścinanie obliczono z zależności $R_t=0{,}5R$.

W kolumnie 7 tabl. 1 podano bezwymiarowe siły poprzeczne $q=Q/Q_{pl}$, w kolumnach 8 i 9 — nośności plastyczne belek mierzone momentem zginającym w przekroju pod siłą skupioną, w kolumnach 10 i 11 — nośności plastyczne rzeczywistych przekrojów krytycznych występujących w odległości t od siły skupionej. Plastyczny moment zginający przekrój krytyczny $M=Q(l-t)$.

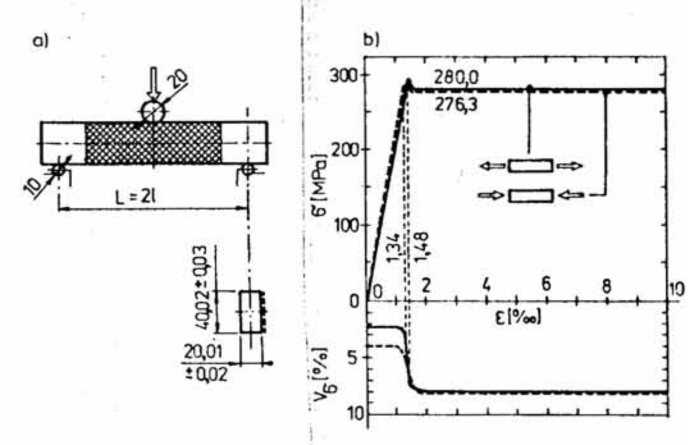
Odsunięcie t/l przekroju krytycznego od siły skupionej jest tym większe im krótsza jest belka. W badanych belkach odległość t jest znacznie mniejsza od połowy wysokości przekroju ($t<h/2$).

Teoretycznymi równaniami krzywych interakcji zginania i ścinania przekroju zajmowało się wielu autorów [1÷11]. Rozwiązanie zgodne z doświadczalnymi obserwacjami rozkładu naprężeń stycznych w przekroju częściowo uplastycznionym [38] podano m.in. w [9] w odniesieniu do dwuteowych przekrojów poprzecznych. W pracy [9] założono rozkład naprężeń normalnych taki, jaki jest powszechnie przyjmowany w technicznej teorii sprężysto-plastycznego zginania belek. Przyjęto, że naprężenia styczne działają tylko w rdzeniu sprężystym nie uplastycznionym przez momenty zginające.

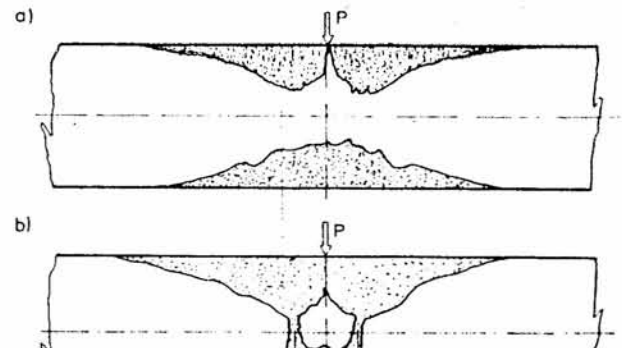
Tablica 1

Wyniki pomiarów oraz współrzędne nośności plastycznej belek Ql/M_{pl} i przekrojów krytycznych $Q(l-t)/M_{pl}$

Seria			Pomiary				Nośność belki		Nośność przekroju	
Symbol	L	L/h	P	t	t/l	q	M	m	M	m
	$2l$	$\frac{2M}{Qh}$	$2Q$			Q/Q_{pl}	Ql	M/M_{pl}	$Q(l-t)$	M/M_{pl}
	mm	--	kN	mm	—	—	kN · cm	–	kN · cm	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	160 ±0,3%	4	62,42 ±4,1%	8,04 ±2,0%	0,101 ±2,0%	0,278 ±8,9%	249,7 ±4,1%	1,113 ±9,0%	224,6 ±4,1%	1,001 ±9,0%
B	240 ±0,2%	6	41,94 ±5,8%	9,80 ±6,3%	0,082 ±6,3%	0,187 ±9,8%	251,6 ±5,8%	1,122 ±9,9%	231,1 ±5,8%	1,030 ±9,9%
C	320 ±0,2%	8	30,97 ±3,3%	11,26 ±4,3%	0,070 ±4,3%	0,138 ±8,6%	247,8 ±3,3%	1,105 ±8,7%	230,3 ±3,3%	1,027 ±8,7%
D	400 ±0,1%	10	24,43 ±6,5%	12,36 ±5,2%	0,062 ±5,2%	0,109 ±10,2%	244,3 ±6,5%	1,089 ±10,3%	229,2 ±6,5%	1,022 ±10,3%
E	480 ±0,1%	12	20,15 ±3,6%	12,41 ±7,2%	0,052 ±7,2%	0,090 ±8,7%	241,8 ±3,6%	1,078 ±8,8%	229,3 ±3,6%	1,023 ±8,8%



Rys. 3. Modele belek: a) warunki brzegowe, b) statyczne ścieżki równowagi na ściskanie i rozciąganie materiału modeli [38]



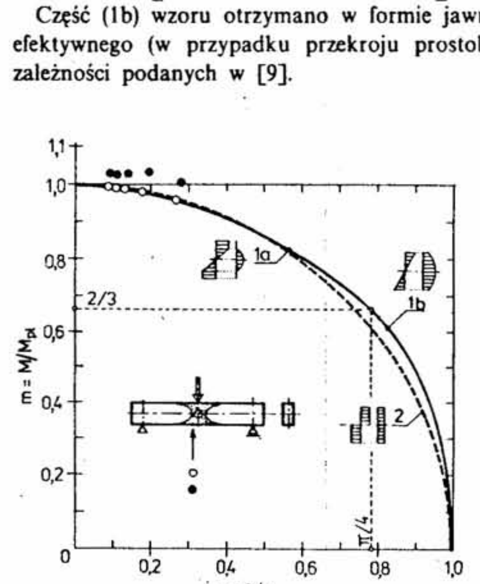
Rys. 4. Fronty plastyczne w realizacji belki o długości $L = 320$ mm: a) przed wyczerpaniem nośności, b) po wyczerpaniu nośności plastycznej [38]

Naprężenia styczne są rozłożone na wysokości rdzenia sprężystego według elipsy tak, aby w każdym punkcie przekroju naprężenia zastępcze obliczone zgodnie z hipotezą wytężeniową były równe granicy plastyczności materiału. Na rys. 5 linią ciągłą pokazano krzywą interakcji wg [9] w zmodyfikowanej przez autorów postaci dla przekroju prostokątnego:

$$m = 1 - \frac{16}{3\pi^2} q^2 \quad \text{przy } 0 \leqslant q \leqslant \pi/4, \tag{1a}$$

$$q = 0{,}5\left[\sqrt{1-(3m/2)^2} + \frac{\arcsin(3m/2)}{3m/2}\right] \quad \text{przy } \pi/4 \leqslant q \leqslant 1. \tag{1b}$$

Część (1b) wzoru otrzymano w formie jawnej dzięki możliwości efektywnego (w przypadku przekroju prostokątnego) scałkowania zależności podanych w [9].



Rys. 5. Zunifikowane krzywe interakcji zginania i ścinania przekroju krytycznego i porównanie z eksperymentem

Tablica 2

Porównanie średnich (w seriach belek) współrzędnych nośności (m_d, q_d) obserwowanych w eksperymencie z odpowiadającymi współrzędnymi (m, q) teoretycznej krzywej (1)

Seria belek	A ($L/h=4$)	B ($L/h=6$)	C ($L/h=8$)	D ($L/h=10$)	E ($L/h=12$)
q_d	0,278	0,187	0,138	0,109	0,090
m_d	1,001	1,030	1,027	1,022	1,023
q	0,267	0,178	0,133	0,106	0,088
m	0,961	0,983	0,990	0,994	0,996
m_d/m*)	1,042	1,048	1,037	1,028	1,027

*) We wszystkich seriach belek: $m_d/m = 1{,}036 \pm 0{,}9\%$.

Z wystarczającą dokładnością krzywą (1) można aproksymować w całej przestrzeni interakcji okręgiem

$$m^2 + q^2 = 1, \tag{2}$$

pokazanym linią przerywaną na rys. 5. Równanie krzywej interakcji (2) otrzymali autorzy prac [6] i [7] przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń stycznych i normalnych na całej wysokości przekroju.

Porównanie średnich doświadczalnych współrzędnych nośności przekroju (m_d, q_d) z odpowiadającymi współrzędnymi (m,q) teoretycznej krzywej interakcji (1) podano w tabl. 2. Współrzędne m krzywej teoretycznej obliczano z warunku $m/q = m_d/q_d$. Średnie (w seriach belek) współrzędne nośności (m,q), szacowane z teoretycznej krzywej (1), są mniejsze o 3,6% od eksperymentalnych nośności względnych, obliczonych na podstawie średniej granicy plastyczności R materiału rozciąganego. Z formalnego porównania wynikałoby, że granica plastyczności materiału przy zginaniu jest większa o 3,6% od granicy plastyczności przy rozciąganiu. Jednak w pracy [38] wykazano, że jest to wynikiem wpływu tarcia w łożyskach, wzmocnienia geometrycznego belki, warstwy fotomechanicznej nałożonej na modele i innych wpływów, które łącznie oceniono na około 4%.

Na rysunku 5 zaczernionymi kółkami naniesiono punkty interakcji o współrzędnych (m_d, q_d), natomiast kółkami — odpowiadające (sprowadzone na krzywą wg [9] — por. tabl. 2) punkty o współrzędnych (m,q).

W tablicy 3 podano równania wybranych teoretycznych krzywych interakcji (kol. 2) oraz odchylenia standardowe wyników eksperymentalnych od tych krzywych. W kolumnie 4 podano względne odchylenie standardowe nośności średnich, natomiast w kol. 5 odchylenia standardowe wszystkich trzydziestu realizacji, ze średnimi sprowadzonymi na krzywą wg [9]. Poszczególne realizacje porównawczych nośności plastycznych przekrojów M_{pl}, Q_{pl} obliczano na podstawie pomierzonych wymiarów geometrycznych

Tablica 3

Dopasowanie wyników doświadczalnych do wybranych teoretycznych krzywych interakcji

Nr	Równanie krzywej	Literatura	Odchylenia standardowe, %	
			średnich	realizacji
1	2	3	4	5
1	$m = 1 - \frac{16}{3\pi^2} q^2$	[9]	0	2,6
2	$m^2 = 1 - q^2$	[6, 7]	0,2	2,6
3	$m = 1 - \frac{3}{4} q^2$	[1]	0,9	2,8
4	$m = 1 - 0{,}502 q^2$	[4]	0,3	2,7

przekroju środkowego danej belki oraz na podstawie realizacji granicy plastyczności z rozciąganej próbki wyciętej z modelu. Dopasowanie wyników eksperymentalnych jest dobre do wszystkich krzywych wymienionych w tabl. 3.

Współrzędne nośności plastycznej przekroju dwuteowego

Zbudowanie zunifikowanej krzywej interakcji zginania i ścinania przekroju krytycznego belki dwuteowej jest możliwe przy powszechnie stosowanym założeniu, że w dwuteowym przekroju zginanym względem osi większej sztywności przekrojową siłę poprzeczną przenosi w całości środnik. Zgodnie z tym założeniem w pasach nie ma interakcji momentu zginającego i siły poprzecznej, natomiast w środniku wystąpi interakcja całkowitej siły poprzecznej Q i części momentu zginającego M_s przypadającego na środnik.

Równanie interakcji środnika można zapisać w takiej postaci, jaką określono dla przekroju prostokątnego. Można korzystać z krzywych interakcji pokazanych na rys. 5 i równań interakcji (1) lub (2). Względne siły przekrojowe występujące w zunifikowanych równaniach interakcji należy obliczać z zależności: $m = M_s/M_{ps}$, $q = Q/Q_{ps}$. Czyste nośności plastyczne środnika $M_{ps} = R_s g h^2/4$ oraz $Q_{ps} = R_{ts} g h$ należy wyznaczyć na podstawie grubości g i wysokości h środnika oraz odpwiednio granicy plastyczności materiału środnika na rozciąganie R_s i na ścinanie R_{ts}.

Wymiarowe współrzędne nośności plastycznej krytycznego przekroju bisymetrycznego belki dwuteowej można wyznaczyć na podstawie znanej przekrojowej siły poprzecznej Q lub znanego przekrojowego momentu zginającego $M = M_s + M_p$ (M_p jest momentem zginającym przenoszonym przez pasy) lub znanego stosunku $l_Q = M/Q$.

Na przykład dla znanej siły poprzecznej Q graniczny moment plastyczny przekroju M można wyznaczyć z zależności

$$M = M_{pp} + mM_{ps}, \tag{3}$$

przy czym m należy odczytać ze zunifikowanej krzywej interakcji dla rzędnej $q = Q/Q_{ps}$, a moment plastyczny pasów $M_{pp} = R_p F_p (h + g_p)$ — wyznaczyć na podstawie znanej granicy plastyczności materiału pasów R_p, pola przekroju pasa F_p oraz wysokości środnika h i grubości pasa g_p.

Często w przekroju krytycznym nie są znane bezwzględne wartości sił M i Q lecz znany jest ich stosunek $l_Q = M/Q$. W takim przypadku plastyczny moment zginający środnik można oszacować z zależności wynikającej z krzywej interakcji (2)

$$m = \frac{\sqrt{1 + r_s^2 - r_p^2} - r_p r_s}{1 + r_s^2}, \tag{4}$$

w której: $r_s = M_{ps}/(l_Q Q_{ps})$, $r_p = M_{pp}/(l_Q Q_{ps})$.

Przykład 1. Wyznaczyć obliczeniowe współrzędne nośności plastycznej hybrydowego przekroju dwuteowego pokazanego na rys. 6a. Przekrój zginany jest względem osi większej sztywności. Stosunek momentu zginającego do siły poprzecznej w przekroju wynosi $l_Q = 300$ cm. Pasy wykonane ze stali 18G2A o obliczeniowej granicy plastyczności (wytrzymałości obliczeniowej) $R_p = 295$ MPa. Środnik wykonany jest ze stali St3S o wytrzymałości obliczeniowej na rozciąganie $R_s = 215$ MPa i na ścinanie $R_{ts} = 125$ MPa.

Obliczeniowe czyste nośności plastyczne środnika wynoszą: $M_{ps} = 0{,}6 \cdot 50^2 \cdot 0{,}215/4 = 80{,}62$ kN · m, $Q_{ps} = 50 \cdot 0{,}6 \cdot 12{,}5 = 375{,}0$ kN. Obliczeniowy czysty moment plastyczny pasów i całego przekroju wynosi: $M_{pp} = 2 \cdot 30 \cdot (50 + 2) \cdot 0{,}295 = 920{,}40$ kN · m, $M_{pl} = 80{,}62 + 920{,}40 = 1001$ kN · m. Z równania (4) dla $r_s = 80{,}62/3 \cdot 375 = 0{,}072$, $r_s = 920{,}40/3 \cdot 375 = 0{,}818$, wyznaczamy $m = 0{,}518$.

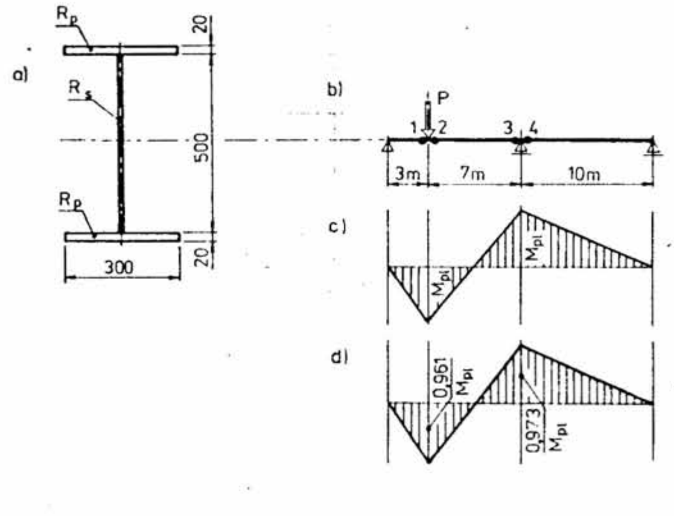
Obliczeniowy moment plastyczny przekroju

$$M = 0{,}518 \cdot 80{,}6 + 920{,}4 = 962 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

natomiast współrzędne nośności plastycznej przekroju wynoszą $(M, Q) = (962$ kN · m, $962/3 = 321$ kN).

Wyznaczanie nośności plastycznej belki na podstawie nośności plastycznej przekrojów krytycznych

Nośność plastyczną belek można wyznaczyć na podstawie krzywych interakcji (m, q) przekrojów krytycznych wykorzystując



Rys. 6. Przykład belki dwuprzęsłowej: a) przekrój poprzeczny b) schemat statyczny, c) pierwsze przybliżenie rozkładu momentów zginających, d) rozkład momentów zginających w granicznym stanie plastycznym belki

warunki równowagi statycznej w granicznym stanie plastycznym belki. Obiektywne oszacowanie nośności plastycznej belek możliwe jest przy znajomości położenia rzeczywistych przekrojów krytycznych.

Odsunięcie t krytycznego przekroju od siły skupionej przyłożonej do ściskanego pasa belki nie użebrowanej można obliczać z empirycznej zależności [38]

$$\frac{t}{h} = 0{,}153 \left[\frac{M_n}{Q_n h}\right]^{0{,}416}, \tag{5}$$

w której: h — wysokość belki (wysokość środnika belki dwuteowej),

M_n — moment zginający,

Q_n — siła poprzeczna działająca w osi siły skupionej.

Względne odchylenie standardowe wszystkich trzydziestu realizacji t/h zaobserwowanych w eksperymencie od odpowiadających punktów krzywej regresji (5) wynosiło 2%. Średnie (w seriach belek) szerokości połowy rdzenia sprężystego podano w tabl. 1.

W przypadku belek statycznie wyznaczalnych ich nośność plastyczną można szacować w sposób pokazany w przykładzie 2.

Przykład 2. Oszacować nośność plastyczną belki swobodnie podpartej o przekroju prostokątnym, obciążonej siłą skupioną w środku przęsła. Obliczeniowe, czyste nośności plastyczne przekroju belki: $M_{pl} = 22$ kN · m, $Q_{pl} = 500$ kN. Długość przęsła belki wynosi $L = 2l = 50$ cm, a wysokość przekroju $h = 10$ cm.

Stosunek konwencjonalnego momentu zginającego do siły poprzecznej pod siłą skupioną wynosi $l_{Qn} = M_n/Q_n = l = 25$ cm. Szerokość jądra sprężystego wynosi $t = 10 \cdot 0{,}153(25/10)^{0{,}416} = 2{,}24$ cm. Przy stosunku sił przekrojowych w przekroju krytycznym $l_Q = M/Q = M_n/Q_n - t = 25 - 2{,}24 = 22{,}76$ cm, jest $r_s = 22/0{,}2276 \cdot 500 = 0{,}193$. Współrzędna m wg równania (4) wynosi 0,982. Nośność plastyczna przekroju krytycznego

$$M = m\,M_{pl} = 0{,}982 \cdot 22{,}60 \text{ kN} \cdot \text{m} = 21{,}60 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Nośność plastyczna belki wyznaczona z warunków równowagi statycznej

$$M = M/(1 - t/l_{Qn}) = 21{,}60(1 - 2{,}24/25) = 1{,}098 \cdot 21{,}60 = 23{,}73 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$
$$P = 4 \cdot 23{,}73/0{,}5 = 189{,}8 \text{ kN}.$$

Tak więc nośność plastyczna belki swobodnie podpartej obciążonej siłą skupioną wg przykładu jest większa o 9,8% od nośności plastycznej przekroju.

W przypadku belek statycznie niewyznaczalnych zadanie jest trudniejsze, gdyż następuje redystrybucja zarówno momentów zginających, jak i sił poprzecznych. W celu uzyskania rozwiązania ścisłego należy zastosować procedurę iteracyjną. Wygodnie jest stosować na każdym kroku iteracyjnym standardowe procedury numeryczne opracowane na użytek teorii nośności plastycznej belek.

Przykład 3. Oszacować nośność plastyczną belki dwuprzęsłowej pokazanej na rys. 6b. Belka ma przekrój dwuteowy o charakterystykach wymienionych w przykładzie 1 (rys. 6a).

Celem przykładu jest pokazanie metody iteracyjnej. Dlatego pominięto przesunięcie przekrojów krytycznych w stosunku do sił skupionych.

Pierwsze przybliżenie. W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy momenty plastyczne przekrojów krytycznych *1, 2, 3, 4*, (rys. 6b) równe czystej nośności plastycznej przekroju na zginanie $M_{pl} = 1001$ kN · m. Z rozwiązania optymalizacji liniowej otrzymujemy pierwsze przybliżenie rozkładu momentów zginających pokazane na rys. 6c oraz obciążenie plastyczne

$$P_I = 619{,}77 \text{ kN}.$$

Drugie przybliżenie. Na podstawie rozkładu momentów zginających uzyskanego w pierwszym przybliżeniu określamy stosunki sił przekrojowych M/Q w przekrojach krytycznych:
$l_{Q1} = 300$ cm, $l_{Q2} = l_{Q3} = 350$ cm, $l_{Q4} = 1000$ cm. Bezwymiarowe momenty plastyczne środnika, obliczone z równania (4) (por. przykład 1) wynoszą: $m_1 = 0{,}518$, $m_2 = m_3 = 0{,}671$, $m_4 = 0{,}964$. Odpowiada to następującym nośnościom plastycznym przekrojów: $M_1 = 920{,}4 + 0{,}518 \cdot 80{,}62 = 962{,}2$ kN · m, $M_2 = M_3 = 974{,}4$ kN · m, $M_4 = 998{,}1$ kN · m. Nośności te określają cztery klasy plastyczne przekrojów krytycznych. Dla tak określonych klas plastycznych z rozwiązania optymalizacji liniowej otrzymujemy rozkład momentów zginających pokazany na rys. 6d i nośność plastyczną belki.

$$P_{II} = 597{,}37 \text{ kN}.$$

Trzecie przybliżenie. Na podstawie rozkładu momentów zginających z drugiego przybliżenia określamy: $l_{Q1} = 300$ cm, $l_{Q2} = 348{,}8$ cm, $l_{Q3} = 352{,}2$ cm, $l_{Q4} = 1000$ cm. Powtarzając procedurę z drugiego przybliżenia, otrzymamy nośność plastyczną belki

$$P_{III} = 597{,}42 \text{ kN}.$$

Tak więc już w drugim przybliżeniu proponowanej metody iteracyjnej uzyskuje się nośność plastyczną belki obarczoną niewielkim błędem (po stronie bezpieczeństwa).

Wnioski

1. Skupione przyłożenie obciążenia poprzecznego, włącznie ze skupionym przyłożeniem reakcji podporowych, powoduje powstanie jądra sprężystego i odsunięcie przekroju krytycznego od miejsca największych momentów zginających.

2. Bezwymiarowe współrzędne ($m = M/M_{pl}$, $q = Q/Q_{pl}$) nośności plastycznej przekroju krytycznego w belce zginanej poprzecznie można z techniczną dokładnością wyznaczyć na podstawie teoretycznej krzywej interakcji wg [9].

3. Oszacowanie współrzędnych nośności plastycznej przekroju krytycznego z krzywej interakcji [6], wyznaczonej teoretycznie dla środnika przekroju dwuteowego, daje równie dobre wyniki, jak oszacowanie z krzywej interakcji [9], wyznaczonej teoretycznie dla przekroju prostokątnego.

4. Współczynniki nośności plastycznej belek zginanych poprzecznie można wyznaczyć teoretycznie z warunków równowagi statystycznej na podstawie nośności plastycznej przekrojów krytycznych, biorąc pod uwagę rzeczywiste położenie przekrojów krytycznych.

5. Uwzględnienie rzeczywistego położenia przekrojów krytycznych w obliczaniu nośności plastycznej belek poprzecznie zginanych praktycznie oznacza uwzględnienie statycznych i kinematycznych warunków brzegowych całej belki.

6. Krzywe interakcji zginania i ścinania krytycznego przekroju prostokątnego mogą być wykorzystane do wyznaczania współrzędnych nośności plastycznej dwuteowych przekrojów krytycznych. W tym celu należy uwzględnić interakcję zginania i ścinania w środniku przekroju dwuteowego, zakładając że tylko środnik przenosi siły poprzeczne.

PIŚMIENNICTWO

[1] *Biezuchow N. I.*: K tieorii plasticzeskogo rasczieta na izgib. „Wiestnik Inżenierow i Tiechnikow", 10, Moskwa 1936.
[2] *Palczewski S.A.*: Opriedielenije nesuszczіej sposobnosti stalnych sterżniej dla niekotorych słuczajow słożnego naprjażennego sostojanija. Sbornik Trudow VIII, Kijevskij Inżenierno-Stroitielnyj Institut, Kijew-Lwow 1948.
[3] *Rżanicyn A.R.*: Rasczet sooruženij z uczietom plasticzieskich swojstv matieriałow, Strojwojenmorizdat, Moskwa 1949.
[4] *Horne M.R.*: The plastic theory of bending of milds steel beams with particular reference to the effect of shear forces. „Proc.Roy.Soc. A.", 1951.
[5] *Broude B.M.*: Priedielnyje sostojanija stalnych balok. Izdatelstwo Literatury po Stroitelstwu i Architekturie, Moskwa 1953.
[6] *Sobotka Z.*: Theorie plasticity a meznich stavu stavebnich konstrukci, t. I, i II. ČSAV. Praha 1954, 1955.
[7] *Heyman J., Dutton U. L.*: Plastic design of plate girders with unstiffened webs. „Welding and Metal Fabrication", July 1954.
[8] *Drucker D. C.*: The effect of shear on the plastic bending of beams. „Journ. Appl.Mech.", 23/1956.
[9] *Mutermilch J., Olszewski E., Lubiński M.*: Wymiarowanie konstrukcji stalowych. Nowe metody. Budownictwo i Architektura. Warszawa 1956.
[10] *Hodge P. G.*: Interaction curves for shear and bending of plastic beams. „Journ.Appl Mech.", 24/1957.
[11] *Sobotka Z.*: Plasticity of steel beams under combined bending, shear and normal load. „Staveb. Čas.", 9/1975.
[12] *Baker J. F., Roderick J. W.*: Investigation into the behaviour of welded rigid structures. Further tests on beams and portals. „Trans.Inst. Welding", Vol. 3, 2/1940
[13] *Hendry A. W.*: An investigation of the strengh of ceratin welded portal Frames in relation to plastic method of design. „Struct. Eng". London, December 1950.
[14] *Yang C. H., Beddle L S.*: Behaviour of I-and W- beams in shear. Report No 205,B.21, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University Bethlehem Pa., 1951.
[15] *Yang C. H.*: Plastic behaviour of continuous beams. Thesis presented to Lehigh University Bethlehem Pa., 1955.
[16] *Fujita Y., Kusuda T., Thürlimann B.* Influence of shear on the full plastic moment of beams. Report No 205, B.23, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem Pa., 1955.
[17] *Hall J., Newmark N. M.*: Shear deflection of wide-Flange steel beams in the plastic range. „Trans. ASCE", Paper No 2878/1955.
[18] *Green A. F., Hundy B. B.*: Plastic yielding of I-beams. „Engineering" July 1957.
[19] *Kusuda T., Thürlimann B.* „Strenght of wide-flange beams under combined influence of moment, shear and axial force. Report No 248.1, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem Pa., 1958.
[20] *Popov E. P., Willis J. A.*: Plastic design of cover-plated continuous beams. „J.Eng.Mech.Div.", Proc. ASCE 84/1958.
[21] *Massonnet C. E., Save M. A.*: Plastic analysis and design, v.I. Blaisdell Publishing Company, New York-Toronto-London, 1963.
[22] *Johnston B. G., Yang C. H., Beedle L S.*: An evaluation of plastic analysis as applied to structural design. „Welding Journal", 32/1963.
[23] *Mc Dermott J. F.*: Plastic bending of A 514 steel beams, „J.St.Div.", No 9, Proc. ASCE. vol 95, 1969.
[24] *Juhas P.*: Plastická únosnost ocelovych nosnikov namahanych ohybom a smykom. „Staveb. Čas.", 10 1975.
[25] *Roeder C. W., Popov E. G.*: Cyclic shear yielding of wide-flange beams. „J.Eng.Div.", Proc. ASCE, vol. 104, 1978.
[26] *Brandt K., Klee S.*: Traglastversuche an gewaltzen Breitflanschprofilträgern. „Der Stahlbau", 7/1979.
[27] *Burth K., Immenkoter K., Reckling K. A.*: Experimentelle Untersuchen über den Einfluss von Querkraften auf die Traglst kürzer Balken. „Der Stahlbau", 3/1980.
[28] *Green A. P.*: A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixed-ended beams. „J.Mech.Phys.Solids.", 3/1954.
[29] *Roderick J. W., Philips I. H.*: The carrying capacity of simply supported mild steel beams. Reserch („Engng. Struct. Suppl.") Colston Papers, 2/1949.
[30] *Chen W. P., Shomaker E. M.*: Collapse loads of centilever beams under end shear. „Acta Mechanica", 13/1972.
[31] Steel designers manual, prepared for the Constructional Steel Research and Development Organisation. Crosby Lackwood Staples, London 1972.
[32] *Mrazik A.*, Škaloud M., Tochaček M.: Navrchovani ocelovych konstrukci podle teorie plasticity. Praha 1980.
[33] *Łubiński M., Giżejowski M.*: Uwzględnienie wpływu naprężeń stycznych na stan graniczny belek zginanych. „Inżynieria i Budownictwo", 9-10/1980.
[34] Britisch Standards Institution: Draft Standard Specification for Structural Use of Steelwork in Building. Part 1, 1977, Part 2, 1978.
[35] ČSN 731401/1976. Navrchovani ocelovych konstrukci.
[36] CTICM: Recommendations pour le Calcul en Plasticité des Constructions en Acier, 1974.
[37] Richtlinien OO8 zur Anwendung des Traglastverfahrens im Stahlbau. Deutscher Ausschaus für Stahlbau, 1973.
[38] *Chodor L.*: Losowa nośność ustrojów zginanych z uwzględnieniem sił stycznych. Praca doktorska. Politechnika Wrocławska, 1986.
[39] *Chodor L., Kowal Z., Sendkowski J.*: Equilibrium paths of stretched and compressed steal samples. 9-th Congress on Material Testing, Budapest 1986.

Wytyczne wykonywania robót budowlano-montażowych w okresie obniżonych temperatur. Instrukcja 282. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa 1988, str. 439, format B5, cena 5150 zł.

Wytyczne zostały zatwierdzone do stosowania 5 października 1988 r. Zastępują one wytyczne nr 156 z 1979 r.

W poszczególnych rozdziałach pracy zawarto wiadomości dotyczące:

1) warunków klimatycznych w Polsce i zasad współpracy ze służbą meteorologiczną,

2) przygotowania budowy do wykonywania robót budowlanych, w okresie obniżonych temperatur,

3) zasad doboru odzieży ochronnej oraz jej użytkowania i konserwacji,

4) składowania materiałów i elementów budowlanych na placu budowy w okresie zimowym,

5) sprzętu, maszyn i urządzeń do robót zimowych,

6) zasad przygotowania układania i pielęgnowania betonów i zapraw z dodatkami przeciwmrozowymi,

7 ÷ 9) wykonywania robót ziemnych, ciesielskich, betonowych i żelbetowych w okresie zimowym,

10 ÷ 14) wykonywania fundamentów i stanu zerowego, montażu budynków z prefabrykowanych, betonowych elementów wielkowymiarowych i sprężonych, wykonywania robót murarskich i tynkarskich, izolacyjnych i pokrywczych oraz robót wykończeniowych w budynkach zamkniętych.

Praca powinna być cenną pomocą przede wszystkim dla wykonawców robót budowlano-montażowych.