XXXV KONFERENCJA NAUKOWA
Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB
Wrocław – 1989 – Krynica

Leszek CHODOR, Wiesław DZIUBDZIELA, Zbigniew KOWAL
Politechnika Świętokrzyska , Kielce

WSPÓŁCZYNNIK BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI PODDANEJ WIELOOKRESOWYM OBCIĄŻENIOM STOCHASTYCZNYM

1. Wprowadzenie

Powszechnie uznaną [np. 1,2,3], globalną miarą bezpieczeństwa konstrukcji jest współczynnik bezpieczeństwa β, zdefiniowany jako [1]

$$\beta \stackrel{df}{=} \mu_g/\sigma_g, \tag{1}$$

gdzie: μ_g i σ_g – wartość oczekiwana i odchylenie standardowe losowego zapasu bezpieczeństwa $g = R - M$; R, M – losowa nośność i obciążenie. Współczynnik ten został wprowadzony jako inżynierska miara bezpieczeństwa wymagająca znajomości w zasadzie tylko dwóch pierwszych momentów statystycznych losowych własności konstrukcji i obciążenia. Warunkiem bezpieczeństwa konstrukcji jest: $\beta > \beta_d$, gdzie β_d jest dopuszczalnym współczynnikiem bezpieczeństwa podawanym w normach (zwykle $\beta_d = 3$). Współczynnik β stosowany jest w miejsce prawdopodobieństwa zniszczenia p_f. Miary β oraz p_f mogą być wzajemnie przeliczone.

Wprowadzone przez Hasofera i Linda [1] (1974) uogólnienie współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji β na wielowymiarową przestrzeń losową nie ujmuje sytuacji, w których obciążenia konstrukcji są zależne od czasu. Zawodzi również w przypadku systemów modelowanych układem szeregowym w sensie teorii niezawodności.

W celu oszacowania współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji pod obciążeniami zależnymi od czasu, Grigoriu i Turkstra [2] (1979) korzystają z teorii przekroczeń granicy przez losowy ciąg lub proces stochastyczny. Stosują metodę Rackwitza (1976) aproksymacji dowolnego nie-gaussowskiego rozkładu ekwiwalentnym rozkładem normalnym.

Kiureghian [3] (1980) podaje sposób szacowania niezawodności konstrukcji poddanych kombinacji obciążeń, z których każde modelowane jest procesem kwadratowych fal Poissona lub filtrowanym procesem Poissona.

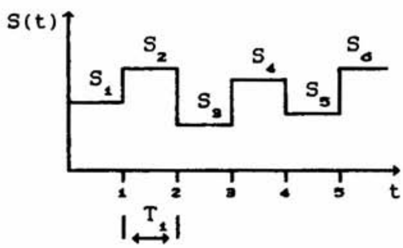
Chodor [4](1988), [5](1989) proponuje *stochastyczną metodę elementów skończonych* do szacowania parametrów losowych odpowiedzi złożonych konstrukcji inżynierskich. W oryginalnej wersji metody, można uwzględnić losowe niedoskonałości konstrukcji poddanej losowym obciążeniom niezależnym od czasu. Nie dostosowywano metody do szacowania współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji.

W niniejszej pracy zaproponowano sposób szacowania parametrów losowych odpowiedzi oraz współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji poddanych obciążeniom zależnym od czasu. Podobnie jak w [2,3,6] ciągły proces stochastyczny obciążenia zdyskretyzowano po czasie ciągiem zmiennych losowych . Obciążenia długotrwałe opisano asymptotycznym modelem teorii wartości ekstremalnych, natomiast w stosunku do obciążeń krótkotrwałych zastosowano podejście Kiureghiana [3]. Wyznaczona wartość oczekiwana oraz wariancja stochastycznego procesu obciążeń może być podstawą szacowania: 1) losowych odpowiedzi konstrukcji przy użyciu stochastycznej metody elementów skończonych, oraz 2) współczynnika bezpieczeństwa poprzez dopasowanie zastępczego rozkładu normalnego.

W celu skupienia uwagi na metodyce wyznaczania parametrów losowych odpowiedzi i współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji poddanych stochastycznym obciążeniom, do analizy nie włączono aspektów kombinacji obciążeń i przyjęto szczególną, liniową postać powierzchni granicznej.

2. Stochastyczny model obciążeń

Załóżmy, że parametryzowane czasem $t \geq 0$, obciążenie konstrukcji jest procesem stochastycznym $S(t)$, generowanym przez ciąg niezależnych zmiennych losowych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (rys.1) o jednakowych dystrybuantach brzegowych $F_1(s)$ i jednakowym deterministycznym okresie trwania T_1. Czas eksploatacji konstrukcji $T = nT_1$ można utożsamiać z liczebnością n ciągu S_i



Rys.1

Konstrukcja w okresie eksploatacji ulega uszkodzeniu, jeżeli obciążenie przewyższy losową nośność R, to znaczy jeśli

$$M_n = \max(S_1,\ S_2, \ldots,\ S_n) > R\ . \qquad (2)$$

Zmienna losowa M_n ma dystrybuantę

$$G_n(s) = \Pr\{M_n \leq s\} = F_1^n(s),\ \text{dla}\ -\infty < s < \infty\ . \qquad (3)$$

oraz wartość oczekiwaną $\mu_n = EM_n$ i wariancję $\sigma_n^2 = VarM_n$. Zmienna ta, w tym jej asymptotyka była badana przez wielu autorów (np [3,6,7,8]).

Ponieważ w stochastycznej metodzie elementów skończonych [4,5], wymagana jest znajomość dwóch pierwszych momentów statystycznych obciążeń, więc zajmiemy się oszacowaniem μ_n oraz σ_n zmiennej M_n w przypadku obciążeń długotrwałych ($n \to \infty$) oraz obciążeń krótkotrwałych ($n \ll \infty$).

W celu oszacowania m_n oraz σ_n <u>obciążeń długotrwałych</u>, wykorzystamy następujące twierdzenie asymptotycznej teorii wartości ekstremalnych [7,8]:

Jeżeli istnieją ciągi stałych normujących $a>0$, b, $n \geq 1$, *takie że*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{M_n \leq a_n + b_n x\} = \lim_{n\to\infty} F_1^n(a_n + b_n x) = G_*(x), \tag{4}$$

w punktach ciągłości dystrybuanty granicznej G_*, *to z dokładnością do liniowej zmiany argumentu* x, *dystrybuanta* G_* *może być tylko jednej z trzech postaci:*

1) $$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \text{ dla } -\infty < x < \infty, \tag{5a}$$

2) $$\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\} \quad \text{dla } x \geq 0, \quad \alpha = \text{const} > 0 \tag{5b}$$

3) $$\Psi_\alpha(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\} \quad \text{dla } x < 0, \quad \alpha = \text{const} > 0 \tag{5c}$$

Jeśli, istnieją granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{EM_n - a_n}{b_n} = \mu_*, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,\frac{M_n}{b_n} = \sigma_*^2, \tag{6a,b}$$

to dla dużych n można przyjąć, że

$$\mu_n \cong a_n + b_n \mu_*, \qquad \sigma_n \cong b_n \sigma_*. \tag{7a,b}$$

W monografii Resnicka [8] pokazano sposób w jaki należy wybierać stałe normujące i warunki przy których istnieją granice (6).

Następujące twierdzenie, jest wnioskiem z Tw.2.1 Resnicka [8].

Jeśli dystrybuantą graniczą G_n *(3) jest* Λ (5a), *oraz* $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 G_n(dx) < \infty$, *to*

$$\mu_* = -\Gamma^{(1)}(1) = C, \quad \sigma_*^2 = \Gamma^{(2)}(1) - [\Gamma^{(2)}(1)]^2 = \pi^2/6, \tag{8}$$

gdzie $\Gamma^{(k)}(1)$, $k=1,2$, *jest k-tą pochodną funkcji gamma w punkcie* $x=1$, *natomiast* $C = 0.5772156649...$ *jest stałą Eulera.*

Podobne twierdzenie można również sformułować, gdy dystrybuantą graniczną G_n jest Φ_α (5b) lub $\Psi_\alpha(x)$ (5c).

<u>Przykład 1</u>. *Asymptotyczne parametry ciągu niezależnych obciążeń* $S_1, S_2, ..$ *o jednakowym rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną* μ *i wariancją* σ.

Dystrybuantą graniczną zmiennej M_n jest Λ (5a), a stałe normujące można przyjąć w postaci [7,8]:

$$b_n = \sigma(2\log n)^{-1/2}, \quad a_n = \mu + \sigma\{(2\log n)^{1/2} - 0.5(\log\log n + \log 4\pi)/(2\log n)^{1/2}\}. \tag{9}$$

Asymptotyczne parametry zmiennej M_n oszacujemy ze wzorów (7) przy wykorzystaniu (8).

W celu oszacowania μ_n oraz σ_n <u>obciążeń krótkotrwałych</u> można również zastosować aproksymację wyrażoną wzorami (6).

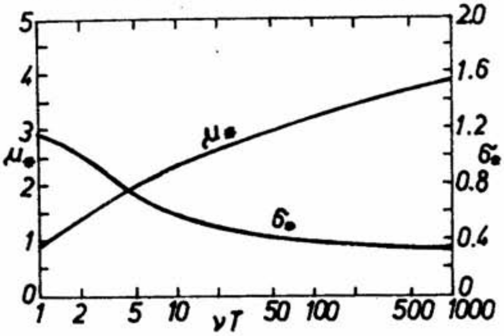
Niechaj stałe normujące będą równe wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowemu jednej ze zmiennych S_i tworzących losowy ciąg obciążeń

$$a_n = ES_i = \mu, \qquad b_n = \sqrt{\mathrm{Var}\, S_i} = \sigma. \tag{10}$$

Wówczas można dobrać μ_* oraz σ_* w zależności od natury i czasu trwania stochastycznego procesu obciążeń. W praktycznie ważnych przypadkach procesów gaussowskich, a także procesów Poissona obliczanie tych parametrów może być sprowadzone do skutecznego numerycznego całkowania. Kiureghian [3] podaje wykresy μ_* oraz σ_* dla procesu kwadratowych fal oraz filtrowanego procesu Poissona przy lognormalnym i gamma rozkładzie prawdopodobieństwa.

Przykład 2. *Parametry μ_* oraz σ_* dla stacjonarnego procesu gaussowskiego o skończonym czasie trwania T (dla obciążeń krótkotrwałych).*

Stacjonarny proces gaussowski stosowany jest jako model ciągłych obciążeń (Bołotin (1969), Bosshard (1975)). Na rys.2 pokazano przebieg μ_* oraz σ_* w funkcji iloczynu νT, gdzie ν jest wyznaczaną eksperymentalnie średnią liczbą przekroczeń wartości oczekiwanej w jednostce czasu, a T jest czasem działania procesu obciążeń. Wykres otrzymano przez numeryczne całkowanie funkcji gęstości procesu.



Rys.2

3. Parametry losowych odpowiedzi konstrukcji

Parametry statystyczne odpowiedzi złożonych konstrukcji poddanych stochastycznemu procesowi obciążeń można oszacować przy użyciu stochastycznej metody elementów skończonych. Wartość oczekiwaną μ_n oraz wariancję σ_n^2 obciążenia należy przyjmować na podstawie formuł (7).

Zasada metody oraz budowa algorytmów numerycznych pozostaje nie zmieniona w stosunku do opisu zawartego w pracach [4,5].

4. Współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji w świetle stochastycznego procesu obciążeń

Nierówność (2) opisuje obszar stanów bezpiecznych przy szczególnej postaci powierzchni granicznej g danej prostą

$$g = R - M_n = 0, \qquad (11)$$

gdzie $R = g_R(\mathcal{X})$ jest nośnością konstrukcji. Nośność jest nieliniową funkcją g_R wektora $\mathcal{X}$ losowych własności konstrukcji. Przyjmijmy, że w trakcie analizy nośności konstrukcji poddanej działaniu ustalonej konfiguracji nielosowych obciążeń, wyznaczono gęstość rozkładu $f_R(R)$ losowej nośności R, w tym jej wartość oczekiwaną μ_R oraz wariancję σ_R^2.

Dla normalnie rozłożonych i losowo niezależnych R i M_n zachodzi [1,2]

$$\beta = \phi^{-1}(-p_f), \quad \text{lub} \tag{12}$$

$$\beta = \mu_g/\sigma_g = (\mu_R-\mu_n)/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_n^2}\ . \tag{13}$$

gdzie ϕ jest standaryzowaną dystrybuantą normalną.
Obliczeniowa nośność R_o oraz obliczeniowe obciążenie $M_{n,o}$, wyznaczone w punkcie styczności prostej granicznej (11) z odpowiednią warstwicą łącznej funkcji gęstości rozkładu $f(R,M_n)$, wynosi

$$R_o = M_{n,o} = [\ \mu_R + \mu_n(\sigma_R/\sigma_n)^2]/[1+\sigma_R/\sigma_n]^2\ . \tag{14}$$

Ponieważ N oraz M_n nie mają rozkładów normalnych, więc prawdopodobieństwo zniszczenia

$$p_f = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r)\ G_n(r)\ dr \tag{15}$$

można wyznaczyć numerycznie. Typy asymptotycznej dystrybuanty G_n wyrażono wzorami (5).

W praktyce zamiast obliczania p_f (15) indeks β wyznacza się z (13) dla parametrów $\tilde{\mu}_{Xi}$, $\tilde{\sigma}_{Xi}$ (X_i= R, M_n) zastępczych rozkładów normalnych aproksymujących rozkłady oryginalne. Zastępcze średnie $\tilde{\mu}_{Xi}$ oraz odchylenia standardowe $\tilde{\sigma}_{Xi}$ można oszacować bazując na : 1) równości zastępczych i oryginalnych średnich i odchyleń standardowych $\tilde{\mu}_{Xi}=\mu_{Xi}$, $\tilde{\sigma}_{Xi}=\sigma_{Xi}$ (Hasofer-Lind [1] (1974)), 2) lokalnego porównania dystrybuant oraz gestości zastępczego rozkładu normalnego i rozkładu oryginalnego w punkcie obliczeniowym (Rackwitz-Fiessler (1978), 3) lokalnego porównania dystrybuant , gęstości oraz pochodnych gęstości zastępczego trójparametrowego rozkładu normalnego i rozkładu oryginalnego w punkcie obliczeniowym (Chen-Lind (1983)). Metody uszeregowano według wzrastającej dokładności aproksymacji współczynnika bezpieczeństwa β.

Można zaproponować również inne sposoby doboru rozkładu zastępczego, byle lepiej przybliżyć współczynnik bezpieczeństwa β. Biorąc pod uwagę wysoką niezawodność konstrukcji budowlanych, a także zastosowania w praktycznych obliczeniach, proponujemy następujący algorytm:
1. Z formuły (12) wyznaczyć pierwsze przybliżenie punktu obliczeniowego $(R,M_n)_o^I$ dla oryginalnych parametrów rozkładów. Wartość oczekiwaną μ_n oraz odchylenie standardowe σ_n maksimum procesu stochastycznego obciążeń należy przyjmować według zasad opisanych w p.2.
2. Punkt porównania $(R,M_n)_*$ dystrybuant oryginalnych i zastępczych przesunąć w stronę obszaru zniszczenia $R_*=R_o^I(1-\varkappa)$, $M_{n,*}=M_{n,o}^I(1+\varkappa)$.
Współczynnik dopasowania $\varkappa$ należy wcześniej wyznaczyć w trakcie prac studialnych dla szeregu najczęściej spotykanych rozkładów nośności oraz obciążeń i dla przyjętego sposobu dopasowania rozkładów.
3. Obliczyć zastępcze parametry rozkładu normalnego z równań wynikających z przyjętego sposobu dopasowania. Można przyjąć na przykład, że wartość oczekiwana lub odchylenia standardowe obu rozkładów

są jednakowe, a brakujący parametr wyznaczyć z lokalnego porównania dystrybuant w punkcie wyznaczonym w kroku 2.

5. Uwagi i wnioski

Parametry losowych odpowiedzi oraz współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji poddanych działaniu obciążeń zależnych od czasu można szacować w sposób pokazany w pracy.
W analizie probabilistycznej konstrukcji można przyjąć, że obciążenia są skalarną zmienną losową o parametrach odpowiednio dobranych w zależności od czasu trwania procesu obciążenia. Zaproponowane formuły asymptotyczne pozwalają oszacować dystrybuantę, wartość średnią oraz odchylenie standardowe maksimum procesu stochastycznego obciążeń długotrwałych.

Współczynnik bezpieczeństwa konstrukcji można oszacować na drodze numerycznego całkowania, lub według zaproponowanego algorytmu dopasowania zastępczego rozkładu normalnego.

LITERATURA

1. Hasofer A.M.,Lind N.C., Exact and Invariant Second-Moment Code Format, *J.Eng.Mech.Div.*,ASCE, Vol.100, No.EM1, Feb. 1974, pp.111-121.
2. Grigoriu M., Turkstra C., Structural Safety Indices for Repeated Loads, *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol.104, No.EM4, Aug. 1978, pp.829-844.
3. Kiureghian A., Reliability Analysis under Stochastic Loads, *J.Struct. Div.*, ASCE, Vol.106, No. ST2, Feb. 1980, pp. 411-429.
4. Chodor L., Stochastyczna metoda elementów skończonych w zagadnieniach losowej mechaniki konstrukcji, *Materiały Konf. KILiW PAN i KN PZITB*, T.1 *Teoria Konstrukcji*, Krynica 1988, s. 151-156.
5. Chodor L., Algorytm szacowania losowych odpowiedzi systemów konstrukcyjnych przy użyciu stochastycznej metody elementów skończonych, *Materiały Konf. Metody Komputerowe w Mechanice*, Kraków-Rytro, 1989
6. Dziubdziela W., Kowal Z., Oszacowanie kwantyli ciągów wielookresowych maksymalnych obciążeń konstrukcji, *Archiwum Inżynierii Lądowej* (w druku).
7. Galambos J., *The asymptotic theory of extreme order statistic*, John Wiley and Sons, N.Y. 1978.
8. Resnick S.I., *Extreme values, regular variation, and point processes*, Springer-Verlag, N.Y. 1987.

THE SAFETY INDEX OF STRUCTURES UNDER MULTIPERIOD STOCHASTIC LOADS

Summary

This papers shows a technique of estimating random parameters of responses and safety index of structures under time-dependent loads. Asymptotic formulae of estimating the distribution of the maximum of the stochastic process of long-term loads are proposed. Furthemore, an algorithm of adjusting a substitute normal distribution is suggested for estimating the safety index of structures.