



## STOCHASTYCZNA METODA ELEMENTÓW SKONCZONYCH W ZAGADNIENIACH LOSOWEJ MECHANIKI KONSTRUKCJI

### 1. Wprowadzenie

Uniwersalną metodą rozwiązywania złożonych zadań losowej mechaniki konstrukcji jest metoda symulacji numerycznej (metoda Monte Carlo). Własne doświadczenia oraz analiza innych prac z tego zakresu (miedzy innymi [1,2]) wskazuje, że ze względu na wysoką niezawodność konstrukcji budowlanych zadawalające rezultaty można uzyskać tą metodą dopiero po wielu symulacyjnych losowaniach realizacji konstrukcji.

Analityczne metody analizy probabilistycznej prowadzą do skomplikowanych rachunków i najczęściej muszą być wspomagane procedurami numerycznymi [2,3]. Mimo wprowadzania licznych uproszczeń i specjalizacji algorytmów - tylko w najprostszych przypadkach ("prymitywna" konstrukcja i mała liczba zmiennych losowych) udaje się obliczyć parametry statystyczne interesujących wielkości "rozsądnym" nakładem pracy.

Metoda symulacji i metody analityczne nie znalazły zastosowania w praktyce inżynierskiej, choć są szeroko wykorzystywane w pracach studialnych. Tymczasem efektywizacja obliczeń projektowych może być osiągnięta dopiero po opracowaniu inżynierskiej metody szacowania wartości oczekiwanych i losowych zmienności każdej z wielkości występujących w obliczeniach.

W niniejszej pracy zaproponowano inżynierską metodę numerycznej analizy probabilistycznej. Metoda ma dwie podstawowe zalety: 1) jest metodą komputerową, więc zwalnia projektanta od zbędnych rachunków i może służyć do rozwiązywania niemal wszystkich praktycznych problemów, 2) zwiększenie czasu obliczeń jest niewielkie w stosunku do obliczeń deterministycznych. Metoda jest wersją stochastycznej metody elementów skończonych opracowaną w 1984 roku na użytek pracy [4] a jej podstawą jest linearizacja stochastyczna.

*STOCHASTYCZNA METODA ELEMENTÓW SKONCZONYCH jest sposobem analizy zagadnień stochastycznej ( losowej ) mechaniki , polegającym na dyskretyzacji konstrukcji przy użyciu elementów skończonych i zastosowaniu metod probabilistycznych na etapie budowy układu.*

Zaprezentujemy pierwotną wersję metody, która dotyczy systemów konstrukcyjnych o nie zmiennych w czasie charakterystykach niezawodnościowych.

## 2. Macierzowe sformułowanie równań metody linearyzacji stochastycznej

Zadania teorii sprężystości i plastyczności, teorii stateczności i drgań oraz innych dziedzin mechaniki konstrukcji można ująć konwencjonalnym równaniem metody elementów skończonych z ułosowionymi zmiennymi

$$\mathcal{X}_{v_0} = K(\mathcal{X}, t)\mathcal{Y}, \quad (1)$$

gdzie  $\mathcal{X}_{v_0}$  jest losowym wektorem zmiennych wejściowych (wymuszeń) a  $\mathcal{Y}$  jest losowym wektorem zmiennych wyjściowych (odpowiedzi systemu). Losowa macierz operatora systemu  $K$  może zależeć od nielosowego parametru wektorowego  $t$  i losowego wektora  $\mathcal{X} = [\mathcal{X}_{v_0}, \mathcal{X}_{sys}]$ , gdzie  $\mathcal{X}_{sys}$  jest wektorem losowych zmiennych systemu (sztywności/podatności). Każda realizacja konstrukcji spełnia równanie (1).

Jeśli istnieje macierz odwrotna  $K^{-1}$ , to rozwiązanie równania (1) można zapisać w postaci

$$\mathcal{Y} = f(\mathcal{X}, t), \quad (2)$$

gdzie funkcja wektorowa  $f$  jest w ogólności nieliniowa.

RÓWNANIA LINEARYZACJI stochastycznej w otoczeniu dowolnego punktu  $\mathcal{X}_0$  otrzymamy po zastosowaniu operatora wartości oczekiwanej  $E$  w stosunku do liniowych członów rozwinięcia funkcji (2) w szereg Taylora. Wartość oczekiwaną  $E\mathcal{Y}$  oraz macierz kowariancji  $cov\mathcal{Y}$  zmiennych wyjściowych można oszacować ze wzorów:

$$E\mathcal{Y} \cong f(\mathcal{X}_0, t) + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}} \Big|_{\mathcal{X}_0} (E\mathcal{X} - \mathcal{X}_0), \quad (3a)$$

$$cov\mathcal{Y} \cong \frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}} \Big|_{\mathcal{X}_0} \cdot cov\mathcal{X} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}} \Big|_{\mathcal{X}_0} \right)^*, \quad (3b)$$

gdzie gwiazdka  $*$  jest operatorem sprzężenia macierzy zespolonej. W populacji konstrukcji najczęściej obserwuje się realizacje stanów bliskich oczekiwanym. Najlepsze (w sensie probabilistycznym) oszacowania (3) można więc otrzymać dla  $\mathcal{X}_0 = E\mathcal{X}$ . W większości praktycznych przypadków macierz  $\partial f / \partial \mathcal{X}$  jest rzeczywista a nie zespolona i operator sprzężenia  $*$  jest równy operatorowi transpozycji  $T$ .

Występujące we wzorze (3b): MACIERZ WPŁYWU  $\partial f / \partial \mathcal{X}$  oraz MACIERZE KOWARIANCJI  $cov\mathcal{X}$  i  $cov\mathcal{Y}$  mają następujące współrzędne:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1} & \frac{\partial f}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f}{\partial X_1} & \frac{\partial f}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial X_m} & \frac{\partial f}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial X_n} \end{bmatrix}, \quad (4a)$$

$$cov\mathcal{X} = \begin{bmatrix} covX_{11} & covX_{12} & \dots & covX_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ covX_{n1} & covX_{n2} & \dots & covX_{nn} \end{bmatrix}, \quad cov\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} covY_{11} & covY_{12} & \dots & covY_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ covY_{m1} & covY_{m2} & \dots & covY_{mm} \end{bmatrix}, \quad (4b)$$

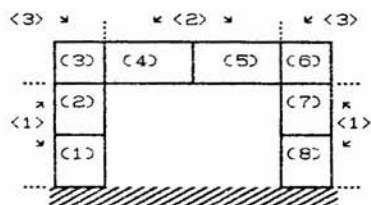
gdzie  $n$  jest wymiarem wektora  $\mathcal{X} = [X_i]$  ( $i=1, \dots, n$ ) a  $m$  jest wymiarem wektora  $\mathcal{Y} = [Y_j]$  ( $j=1, \dots, m$ ).

Macierz wpływu opisuje czułość wektora  $\mathcal{Y}$  na losowe zmiany wektora  $\mathcal{X}$ . Momenty statystyczne pierwszego i drugiego rzędu zmiennych wyjściowych  $\mathcal{Y}$  szacujemy bez zakładania konkretnego rozkładu prawdopodobieństwa wektora  $\mathcal{X}$ .

### 3. Dyskretyzacja konstrukcji. Stochastyczne elementy skończone

Podobszary losowo odkształcalnego ciała nazwiemy *STOCHASTYCZNYMI ELEMENTAMI SKOŃCZONYMI*. Jeśli losowe właściwości są w nich w pełni autokorelowane. Z prawdopodobieństwem równym jedności charakterystyka  $X_i$  w punkcie  $P_1$  elementu stochastycznego jest więc liniową funkcją charakterystyki  $X_i$  w punkcie  $P_2$  elementu:  $P(X_{i,P_1} = aX_{i,P_2} + b) = 1$ , gdzie  $a$  i  $b$  są deterministycznymi współczynnikami.

Założymy, że model konstrukcji został podzielony na  $N$  stochastycznych elementów skończonych tak, że każdy konwencjonalny element skończony ( $e$ ) zawiera się w całości w jednym elemencie stochastycznym ( $e$ ). Jeden element



Rys.1.

stochastyczny może być złożony z rozłącznych elementów konwencjonalnych. Szczególnym przypadkiem jest system zbudowany z wielu elementów konwencjonalnych ale tylko z jednego elementu stochastycznego. Obok konwencjonalnych zasad podziału konstrukcji na elementy należy więc uwzględnić zasięg i wielkość autokorelacji statystycznej. Na rys.1 pokazano przykład dyskretyzacji ramy portalowej.

Stochastyczny element skończony ( $e$ ) może być obarczony *NIEDOSKONAŁOŚCIAMI* (imperfekcjami) *POWIERZCHNI* związanymi z losowym kształtem i wymiarami brzegu elementu oraz *NIEDOSKONAŁOŚCIAMI OBJĘTOŚCI* związanymi z losowymi właściwościami materiału oraz losowymi siłami objętościowymi. Zmienne obciążone takimi niedoskonałościami można zestawić w  $N$  podwektorach  $X_{sys}^{(e)}$  wektora  $X_{sys}$ .

W celu elastycznego sterowania liczbą zmiennych losowych systemu oraz uproszczenia obliczeń numerycznych zapiszemy zmienną losową  $X_i$  w postaci

$$X_i = x_i \cdot L_u^l \cdot M_u^m \cdot T_u^t \quad (5)$$

gdzie  $x_i$  jest nielosowym bezwymiarowym modulem wielkości  $X_i$  w UKŁADZIE MIAR  $u$ . Przyjmijemy, że LOSOWE są JEDNOSTKI MIAR  $L, M, T$  o wartościach oczekiwanych odpowiednio 1m, 1kg, 1s. Jednostki miar występują w nielosowych potęgach całkowitych l, m, t. W zależności od liczby elementów stochastycznych oraz korelacji charakterystyk w elemencie można wprowadzić wiele losowych układów miar  $u$ .

Można pokazać, że z dokładnością do liniowych członów rozwinięcia jednomianu (5) wokół wartości oczekiwanych zachodzi: 1)  $E X_i \cong x_i [m^l kg^m s^t]$ , 2) jeśli  $X_i$  i  $X_j$  są wyrażone w tym samym układzie miar to  $cov(X_i X_j) \cong \sqrt{\text{var} X_i \cdot \text{var} X_j}$  (szacunkowo pełna korelacja), 3)  $E \partial X_i / \partial L_u = 1/x [m^{l-1} kg^m s^t]$ .

Przykład 3.1. Losowe układy miar w stochastycznym elemencie konstrukcji prętowej. Biorąc pod uwagę technologię wykonywania elementów konstrukcji prętowych można wprowadzić cztery losowe układy miar:  $m$  - układ miar własności materiału i naprężeń resztkowych,  $o$  - układ miar charakterystyk geometrycznych przekrojów,  $l$  - układ miar długości elementu,  $a$  - układ miar wstępnych wygięć i skręceń osi elementu. W ten sposób założono na przykład, że wszystkie charakterystyki geometryczne przekroju (pole powierzchni, momenty bezwładności itd.) są szacunkowo w pełni skorelowane.

4. Szacowanie macierzy wpływu

Metody szacowania macierzy wpływu  $\partial f / \partial X$  pokażemy na przykładach.

**Przykład 4.1.** Przemieszczenia i siły przywęzłowe. Wartości oczekiwane przemieszczeń  $u$  węzłów systemu w globalnym układzie współrzędnych oraz wartości oczekiwane sił przywęzłowych  $P_{zev}^{(e)}$  w układzie lokalnym elementu  $(e)$  wyznaczmy z równań przemieszczeniowej metody elementów skończonych [5]:

$$P_{zev} = Ku, \quad P_{zev}^{(e)} = k^{(e)} u^{(e)} \quad (7a,b)$$

dla oczekiwanych: zewnętrznych obciążeń węzłowych  $P_{zev}$ , globalnej macierzy sztywności  $K$ , macierzy sztywności elementu  $k^{(e)}$  i przemieszczeń węzłów elementu  $u^{(e)}$ .

Różniczkując obustronnie po  $X$  równania (7) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$\frac{\partial u}{\partial X} = K^{-1} \left[ \frac{\partial P_{zev}}{\partial X} - \frac{\partial K}{\partial X} u \right], \quad \frac{\partial P_{zev}^{(e)}}{\partial X} = \left[ \frac{\partial k^{(e)}}{\partial X} u^{(e)} + k^{(e)} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial X} \right]. \quad (8a,b)$$

Dla problemów nieliniowych należy uwzględnić zmianę konfiguracji odniesienia lub zmiany macierzy sztywności. Na przykład jeśli  $K$  jest funkcją przemieszczeń, to  $\partial K(X, u) / \partial X = \partial K / \partial X + \partial K / \partial u \cdot \partial u / \partial X$ .

**Przykład 4.2.** Częstotliwości drgań swobodnych/obciążenie krytyczne. Wartości oczekiwane częstotliwości drgań swobodnych  $\omega$  mnożnika obciążenia krytycznego  $\lambda$  oraz stowarzyszone wektory własne  $q$  (formę drgań / formę utraty stateczności) uzyskujemy z rozwiązania uogólnionego problemu własnego [5]

$$(K - \omega^2 B)q = 0, \quad (K - \lambda^2 K^0)q = 0. \quad (9a,b)$$

dla oczekiwanych: liniowej macierzy sztywności  $K$ , macierzy bezwładności  $B(P_{vev})$  i macierzy geometrycznej  $K^0(P_{vev})$ .

Po obustronnym pomnożeniu tych równań przez  $q^T$ , przeróżniczkowaniu po  $X_i$  i uporządkowaniu otrzymujemy wyrażenia na  $i$ -te współrzędne wektora wpływu:

$$\frac{\partial \omega}{\partial X_i} = \left[ q^T \left[ \frac{\partial K}{\partial X_i} - \omega^2 \frac{\partial B}{\partial X_i} \right] q \right] / \left[ 2\omega q^T B q \right], \quad \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} = \left[ q^T \left[ \frac{\partial K}{\partial X_i} - \lambda^2 \frac{\partial K^0}{\partial X_i} \right] q \right] / \left[ 2\lambda q^T K^0 q \right]. \quad (10a,b)$$

gdzie  $B$  i  $K^0$  zależy od  $P_{vev}$ , więc  $\partial B / \partial X_i = \partial B / \partial X_i + \partial B / \partial P_{vev} \cdot \partial P_{vev} / \partial X_i$ ,  
 $\partial K^0 / \partial X_i = \partial K^0 / \partial X_i + \partial K^0 / \partial P_{vev} \cdot \partial P_{vev} / \partial X_i$ .

**Przykład 4.3.** Macierz wpływu wektora  $X^{(e)} = [N_m, L_0, L_l]^{(e)T}$  na macierz sztywności i bezwładności pręta drgającego osiowo. Wprowadzono jednostkę pochodną  $N_m = N_m s^{-2} m^{-1}$  przy czym przyjęto, że sekunda i metr w układzie  $m$  są nielosowe. Losowa macierz sztywności  $k^{(e)}$  i losowa macierz bezwładności  $b^{(e)}$  wynosi [5] (przy pominięciu zapisu wartości oczekiwanych jednostek):

$$k^{(e)} = \langle EN_m \rangle \langle FL_0^2 \rangle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \langle 1/L_l \rangle, \quad b^{(e)} = \langle \rho N_m \rangle \langle FL_0^2 \rangle \langle 1/L_l \rangle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (11a,b)$$

gdzie wartości oczekiwane charakterystyk elementu oznaczono następująco:

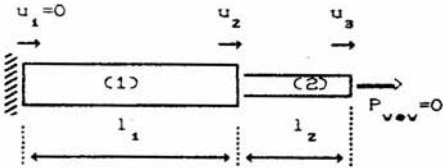
$E$  - moduł Younga,  $F$  - pole przekroju poprzecznego,  $l$  - długość elementu  
 $\rho$  - gęstość materiału.

Wartości oczekiwane macierzy wpływu wynoszą:

$$E \frac{\partial k^{(e)}}{\partial X^{(e)}} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E \frac{\partial b^{(e)}}{\partial X^{(e)}} = \rho F l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14 & 2 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 4 & 11 & 2 \end{bmatrix}. \quad (12a,b)$$

5. Przykłady liczbowe

**Przykład 5.1.** Wartość oczekiwana i współczynnik zmienności najniższej częstotliwości osiowych drgań własnych pręta wspornikowego (rys.2).



Rys. 2.

Pręt podzielono na dwa stochastyczne elementy skończone <1>, <2>, które są jednocześnie elementami konwencjonalnymi (1), (2). Wartości oczekiwane losowych charakterystyk elementu <1> wynoszą:  $l_1=4m$ ,  $F=10cm^2$ ,  $E=200GPa$ ,  $\rho=7800kg/m^3$ ; natomiast elementu <2> wynoszą:  $l_2=2m$ ,  $F=5cm^2$ ,

$E=200 GPa$ ,  $\rho=7800 kg/m^3$ . Współczynniki zmienności wszystkich losowych jednostek miar są równe  $V=5\%$ . Poniżej pominięto zapis wartości oczekiwanych jednostek miar.

**A** Oczekiwana częstotliwość i wektor wpływu.

W wyniku agregacji macierzy (11) dla nietrywialnych stopni swobody  $u_2$ ,  $u_3$  otrzymujemy oczekiwane macierze  $E[K]=\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^7$ ,  $E[B]=\begin{bmatrix} 13.0 & 1.3 \\ 1.3 & 2.6 \end{bmatrix}$ .

Zagregowane oczekiwane macierze wpływu (12) odpowiadające wektorowi

$$X = [N_m^{(1)}; L_o^{(1)}; L_l^{(1)} | N_m^{(2)}; L_o^{(2)}; L_l^{(2)}]$$

$$E \frac{\partial K}{\partial X} = \begin{bmatrix} 5.0 & 10.0 & -5.0 & 5.0 & -5.0 & 10.0 & -10.0 & -5.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -5.0 & 5.0 & -10.0 & 10.0 & 5.0 & -5.0 \end{bmatrix} \cdot 10^7,$$

$$E \frac{\partial B}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0.0 & 20.8 & 0 & 10.4 & 0 & 0.0 & 5.2 & 2.6 & 2.6 & 1.3 \\ 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 2.6 & 5.2 & 1.3 & 2.6 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie równań (9a) i (10a) uzyskujemy: oczekiwaną częstotliwość drgań własnych  $E[\omega] = 1617 [1/s]$ , odpowiadający wektor własny  $[q = [1 \ 1.236]^T$  oraz wektor wpływu  $E[\partial\omega/\partial X] = [765.8 \ 698.6 \ -1182.4 \ 42.7 \ -698.6 \ -434.7]$ .

**B** Współczynniki zmienności  $V_\omega$  częstotliwości drgań własnych.

Przyjęto, że współczynniki korelacji między elementami  $R_{ij}$  w elemencie <1> i <2>  $R_{ij}$  oraz w systemie  $R$  wynoszą:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \text{ dla } i,j \in \{1,2\}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{bmatrix} \text{ dla } i,j \in \{1,2\}$$

Ponieważ dla dowolnej losowej jednostki miar  $J_u$  zachodzi:  $E[J_u] = 1$ ,  $V_{J_u} = V$  to macierz kowariancji wynosi  $cov X = V^2 R$ .

W tab.1 zestawiono współczynniki zmienności  $V_\omega = (var \omega)^{1/2} / E[\omega]$ , gdzie  $var \omega$  obliczono ze wzoru (3b) dla wybranych wartości  $r_{12}$  i  $r_{ij}$ .

Tab.1.

$r_{ij} \backslash r_{12}$	0	0.5	1.0
0	5.5 %	5.5 %	5.6 %
0.5	4.6 %	4.5 %	4.3 %
1.0	3.5 %	3.0 %	2.5 %

Przykłady praktycznego wykorzystania metody podano w pracach [4,6].  
W pracy [4] metodę zastosowano do szacowania parametrów statystycznych nieliniowych fizycznie belek sprężysto-plastycznych zginanych poprzecznie. Konstrukcję złożoną z belkowych elementów skończonych rozwiązywano metodą sił. W pracy [6] pokazano sposób modyfikacji programu komputerowego do analizy stateczności ram złożonych z prętów o przekroju cienkościennym.

## 6. Podsumowanie, uwagi i wnioski

Przedstawiona stochastyczna metoda elementów skończonych może służyć do numerycznego rozwiązywania dowolnie złożonych inżynierskich zadań losowej mechaniki konstrukcji. W tym celu należy zmodyfikować istniejące programy komputerowe przeznaczone do analizy konstrukcji metodą elementów skończonych.

Redukcję liczby zmiennych losowych systemu można uzyskać przez wprowadzenie losowych układów miar.

Do szacowania parametrów statystycznych wielkości wyjściowych zastosowano linearyzację stochastyczną, która jest wystarczająco dokładna w większości zagadnień mechaniki budowli.

### Wykaz literatury

1. Stark M.R., Nicholls R.L.: *Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering Systems*. McGraw-Hill Book Company, N.Y. 1972.
2. Ersvik O.: *Nonlinear Analysis of Beam-column Structures and Influence of Imperfections*, Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1978.
3. Chodor L., Kowal Z.: Teoretyczne oszacowanie integralnej nośności losowej belek zginanych, XXVII Konf. Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1981.
4. Chodor L.: Losowa nośność ustrojów zginanych z uwzględnieniem sił stycznych. Praca doktorska, Inst. Bud. PWr PRE 68/86, Wrocław 1986.
5. Przemieniecki J.S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, N.Y. 1968.
5. Bijak R., Chodor L.: Stateczność systemów złożonych z prętów cienkościennych w ujęciu stochastycznej metody elementów skończonych, V Sympozjum stateczności konstrukcji, Cedzyna 1988.

## STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD IN THE PROBLEMS OF RANDOM THEORY OF STRUCTURES

### Summary

A version of the stochastic finite element method which will be used for many engineering problems of complex structures is proposed. First-order second moment method which gives a good valuation in engineering problems is explored. In order to reduce enough the number of random variables, random system of measures is introduced. Examples are shown.