# V SYMPOZJUM STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

SKRÓTY REFERATÓW CEDZYNA 3–7.X.1988

**ORGANIZATORZY:**

Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej

Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN

Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

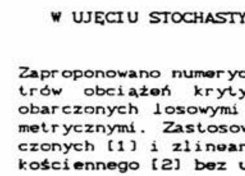
Roman BIJAK, Leszek CHODOR
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

# STATECZNOŚĆ SYSTEMÓW ZŁOŻONYCH Z PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH W UJĘCIU STOCHASTYCZNEJ METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zaproponowano numeryczny algorytm szacowania losowych parametrów obciążeń krytycznych sprężystych ram cienkościennych obarczonych losowymi niedoskonałościami materiałowymi i geometrycznymi. Zastosowano stochastyczną metodę elementów skończonych [1] i zlinearyzowaną macierz sztywności elementu cienkościennego [2] bez uwzględnienia imperfekcji osi prętów.

## 1. ANALIZA LOSOWEJ UTRATY STATECZNOŚCI RAM CIENKOŚCIENNYCH

Rozpatrzmy losowo odkształcalny, płaski układ konstrukcyjny złożony ze sprężystych prętów cienkościennych . Układ obciążony jest ustaloną konfiguracją losowych obciążeń zewnętrznych $\mathbb{P}_{zew}$ przyłożonych w głównej płaszczyźnie zginania. System podzielmy na konwencjonalne elementy (e) oraz na stochastyczne elementy skończone ⟨e⟩ (rys.1). *Stochastycznym elementem* ⟨e⟩ nazywamy fragment konstrukcji w którym losowe właściwości są w pełni autokorelowane [1].




Rys.1. Przykład układu
Fig.1. Example of system

Przyjmijmy, że losowe właściwości elementu ⟨e⟩ jednoznacznie opisują losowe jednostki miar [1] $\mathcal{X}^{\langle e\rangle}=[H^{\langle e\rangle}, P^{\langle e\rangle}, S^{\langle e\rangle}, L^{\langle e\rangle}]$ o wartości oczekiwanej $E\mathcal{X}^{\langle e\rangle}=$ [ 1MPa (jednostka modułów materiałowych E i G ), $1kN/m^2$ ( obciążenia powierzchniowe), 1m (wymiar liniowy przekroju), 1m ( długość elementu )] . Charakterystyki elementu wyrazimy przez te jednostki. Na przykład losowe pole przekroju o wartości oczekiwanej A [$m^2$] można zapisać w postaci $AS^2$.

Z podwektorów $\mathcal{X}^{\langle e\rangle}$ zestawmy wektor globalny $\mathcal{X}=[\mathcal{X}^{\langle 1\rangle}, \mathcal{X}^{\langle 2\rangle}, .. \mathcal{X}^{\langle N\rangle}]=[X_i]_{xN}$. Znane kowariancje jednostek $X_i, X_j$ zestawmy natomiast w macierz kowariancji $\mathrm{cov}\mathcal{X}=[\mathrm{cov}X_iX_j]_{N\times N}$ ( N jest liczbą stochastycznych elementów skończonych w systemie).

Równanie stateczności systemu zapiszmy w postaci [2]

$$(\mathbb{K} + \Lambda\mathbb{K}^{g})q = 0, \tag{1}$$

gdzie $\mathbb{K}$ i $\mathbb{K}^{g}$ są losowymi macierzami sztywności odpowiednio liniową i geometryczną. Dla oczekiwanych sztywności układu z równania (1) można wyznaczyć oczekiwane wartości krytycznego mnożnika $\Lambda$ obciążenia $\mathbb{P}_{zew}$ oraz odpowiadający wektor własny q, opisujący kształt konstrukcji po utracie stateczności. Wariancję var$\Lambda$ można oszacować z równania [1]

$$\mathrm{var}\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\mathcal{X}} \cdot \mathrm{cov}\mathcal{X} \left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\mathcal{X}}\right]^{T}. \tag{2}$$

Oczekiwany wektor wpływu $\partial\Lambda/\partial\mathcal{X}$ obliczymy jawnie po przemnożeniu obu stron równania (1) przez $\bar{q}^{T}$, formalnym przeróżniczkowaniu po wektorze $\mathcal{X}$ i uwzględnieniu zerowych wartości oczekiwanych. Współrzędną $\partial\Lambda/\partial X_i$ wektora wpływu można wówczas zapisać w postaci

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial X_i} = - \frac{q^{T}\left[\partial\mathbb{K}/\partial X_i + \Lambda d\mathbb{K}^{g}/dX_i\right]q}{q^{T}\mathbb{K}^{g}q}, \tag{3}$$

gdzie $d\mathbb{K}^{g}/dX_i = \partial\mathbb{K}^{g}/\partial X_i + \partial\mathbb{K}^{g}/\partial\mathbb{P}_{wew} \cdot \partial\mathbb{P}_{wew}/\partial X_i$. Macierz $\partial\mathbb{P}_{wew}/\partial X_i$ należy obliczać w sposób pokazany w pracy [1].

Macierze wpływu jednostki losowej $X_i$ na sztywność całego systemu konstrukcyjnego $\partial\mathbb{K}^{\bullet}/\partial X_i$ można składać z wpływu $X_i$ na sztywności poszczególnych elementów. Transformacja i agregacja macierzy wpływu przebiega zgodnie z zasadami metody elementów skończonych.

Wykorzystując jawne wyrażenia na oczekiwane sztywności elementu cienkościennego zamieszczone między innymi w pracy [2] można jawnie oszacować macierze wpływu przez formalne różniczkowanie. Na przykład oczekiwaną macierz wpływu jednostki $S^{(e)}$ liniowego wymiaru przekroju poprzecznego na liniową macierz sztywności elementu (e) [2] $k_{(e)} = \mathrm{diag}\ [EAk_o, EI_y k_1, -EI_z k_1, EI_\omega k_1 + GJk_2]$ można zapisać :

$$\partial k_{(e)}/\partial S^{(e)} = \mathrm{diag}\ [2EAk_o\ ,\ 4EI_y k_1\ ,\ -4EI_z k_1\ ,\ 6EI_\omega k_1 + 4GJk_2], \tag{4}$$

gdzie macierze $k_o, k_1, k_2$ oraz inne zmienne są oczekiwanymi wielkościami zdefiniowanymi w pracy [2].

Obliczeniowe siły krytyczne $\Lambda_{obl}$ można szacować jako kwantyle rzędu p rozkładu lognormalnego ze wzoru

$$\Lambda_{obl} = \exp(\ m - k_p\sigma), \tag{5}$$

gdzie: $k_p$ - kwantyl rzędu p standaryzowanej dystrybuanty Gaussa (zwykle przyjmuje się $k_p$=3), $m=\ln(\Lambda/a)$, $\sigma=(\ln a^2)^{1/2}$, $a^2=\mathrm{var}\Lambda/\Lambda^2 + 1$.

Kowariancję losowych sił przekrojowych $\mathbb{P}=\Lambda\mathbb{P}_{wew}$ w stanie krytycznym ustroju należy obliczać ze wzoru [1]:

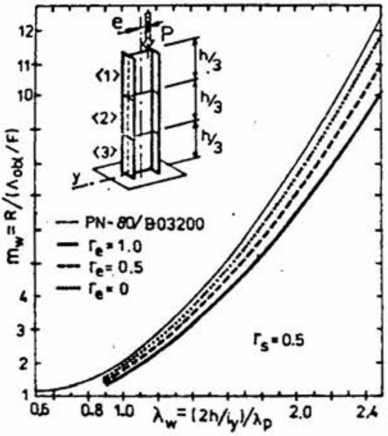
$$\mathrm{cov}\mathbb{P} = \partial\mathbb{P}/\partial\mathcal{X} \cdot \mathrm{cov}\mathcal{X} \cdot (\partial\mathbb{P}/\partial\mathcal{X})^{T}, \tag{6}$$

gdzie $\partial\mathbb{P}/\partial\mathcal{X} = \mathbb{P}_{wew} \cdot \partial\Lambda/\partial\mathcal{X} + \Lambda \cdot \partial\mathbb{P}_{wew}/\partial\mathcal{X}$ .

## 3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Program numeryczny do losowej analizy stateczności dowolnych ram płaskich złożonych z elementów cienkościennych o przekroju otwartym opracowano w języku C na mikrokomputer IBM PC.

<u>Przykład 1</u>. *Probabilistyczna krzywa wyboczenia pręta wspornikowego.*

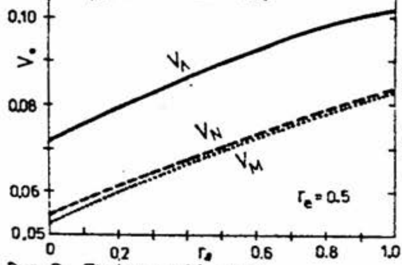



Rys. 2. Wyboczenie słupa
Fig. 2. Buckling of beam-kolumn

Na rys. 2 pokazano zależność współczynnika wyboczeniowego mv od smukłości względnej λv pręta wspornikowego o dwuteowym przekroju bisymetrycznym. Współczynniki losowej zmienności charakterystyk każdego elementu <e> przyjęto o wartościach: wymiar liniowy przekroju poprzecznego- 1%, długość- 3% (uwzględniono losowe warunki brzegowe), moduł E i G - 7% (uwzględniono naprężenia własne). Mimośród działania siły e przyjęto o wartości oczekiwanej 0 ze współczynnikiem zmienności 5%.

Przyjęto stałą korelację między między własnościami każdego elementu re= 0.5, a między elementami zmienną korelację re= 0, 0.5 lub 1.0.

<u>Przykład 2</u>. *Zmienność losowa obciążenia krytycznego i sił przekrojowych w ramie z monosymetrycznym przekrojem rygla.*




Rys. 3. Stateczność ramy
Fig. 3. Instability of frame

Na rys. 3 pokazano wpływ korelacji rs między elementami stochastycznymi ramy na współczynniki zmienności: $V_\Lambda$- krytycznego mnożnika obciążenia zewnętrznego, $V_N$ oraz $V_M$- siły osiowej i momentu zginającego w punkcie A w stanie krytycznym ramy.

Współczynniki zmienności charakterystyk elementow <e> przyjęto jak w przykładzie 1. Założono ponadto współczynnik zmienności zewnętrznego obciążenia vq = 5% oraz stałą wartość współczynnika korelacji re = 0.5 własności każdego z elementów.

## 3. PODSUMOWANIE, UWAGI I WNIOSKI

Prezentowany w pracy algorytm numeryczny umożliwia obiektywne szacowanie losowej nośności krytycznej sprężystych systemów złożonych z prętów o przekroju cienkościennym lub zwartym z uwzględnieniem : 1) wszystkich form utraty stateczności (giętnej, skrętnej i giętno-skrętnej), 2) topologii systemu (rzeczywistych długości wyboczeniowych prętów), 3) losowych niedoskonałości materiałowych i geometrycznych, 4) losowej zmienności obciążenia zewnętrznego, 5) statystycznej korelacji własności elementów stochastycznych.

Stosowanie proponowanego algorytmu w praktyce projektowej pozwala na oszczędności materiału dochodzące do 20% w stosunku do zaleceń normowych, a także umożliwia wyeliminowanie projektów prętów o niewystarczającej wytrzymałości.

Obliczeniowe obciążenie krytyczne istotnie zależy od korelacji własności elementów systemu.

Losowa zmienność sił przekrojowych w stanie krytycznym ram istotnie różni się od zmienności mnożnika obciążeń zewnętrznych.

Wprowadzanie współczynników wyboczeniowych oraz długości wyboczeniowych prętów ram nie jest celowe przy wykorzystywaniu numerycznych metod obliczeniowych losowo odkształcalnych systemów konstrukcyjnych, choć może być przydatne w "ręcznych" obliczeniach mniej ważnych konstrukcji. Potrzebna jest natomiast lepsza znajomość losowych parametrów elementów systemów i obciążeń a zwłaszcza korelacji statystycznej.

Literatura


1. Chodor L.: Stochastyczna metoda elementów skończonych w zagadnieniach losowej mechaniki konstrukcji, Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1988.
2. Hasegawa A., Liyanage K., Ikeda T., Nishino F.: A concise and explicit formulation of aut-of-plane instability of thin-walled members, Proc. of JSCE Structural Eng./Earthquanke Eng., Vol.2, No1., April 1985.


### AUT-OF-PLANE INSTABILITY OF SYSTEMS ASSEMBLED FROM THIN-WALLED MEMBERS IN STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD FORMULATION


This paper p oposes a numerical algorithm of estimating random variability and design values of critical load capacities of frames assembled from elastic thin-walled members with geometrical and material imperfection. A stochastic finite element method presented in [1] and a linearized finite element stiffness matrix [2] are used without taking into account random initial buckling and torsion of the bar axis. The paper is illustrated by examples of the probabilistic curves of stability loss of structural systems.