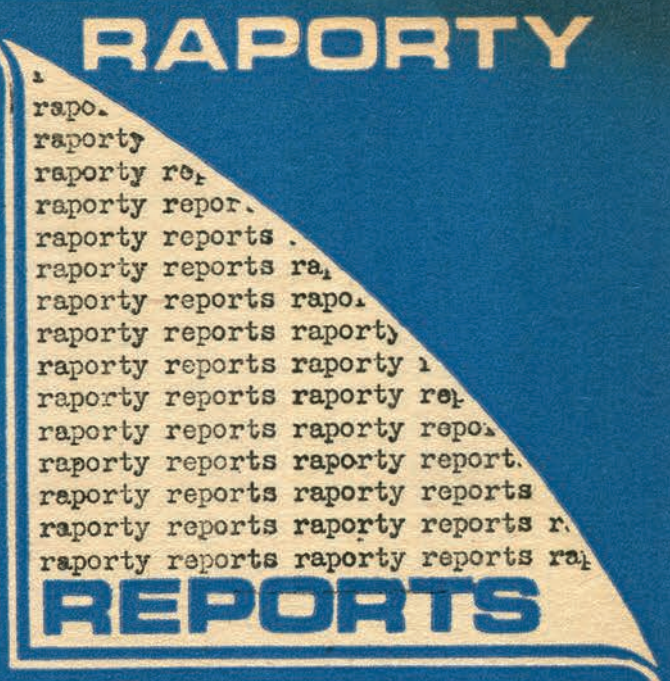


LOSOWA NOŚNOŚĆ USTROJÓW ZGINANYCH Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ STYCZNYCH

Leszek Chodor

Praca doktorska

INSTYTUT BUDOWNICTWA

Politechnika Wrocławska

Technical University of Wrocław

Na prawach rękopisu

INSTYTUT BUDOWNICTWA
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport Serii PRE Nr 68/86

LOSOWA NOŚNOŚĆ USTROJÓW ZGINANYCH Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ STYCZNYCH

Leszek Chodor

P r a c a d o k t o r s k a

Promotor: prof.zw.dr hab.inż. Zbigniew Kowal

Słowa kluczowe: losowy proces niesprężystego zginania poprzecznego, siły poprzeczne, losowa nośność graniczna, przemieszczenia losowe, fotomechanika, metoda elementów skończonych

Wrocław 1986 rok

Mgr inż. Leszek Chodor
Katedra Budownictwa Metalowego i Teorii Konstrukcji
Politechniki Świętokrzyskiej
ul. 1000-lecia Państwa Polskiego 5
25-539 Kielce
tel. 24-577

Raport przygotowano w języku polskim.
Cel przygotowania raportu: praca doktorska

Symbol pracy: „P"

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Instytutu Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej dnia

Spis treści Str.

Wykaz ważniejszych oznaczeń 5

Wprowadzenie 7

1. Stan wiedzy 9

   1.1. Dotychczasowe badania wpływu sił stycznych na graniczną nośność plastyczną belek..... 9

   1.2. Stan wiedzy na temat wpływu sił stycznych na przemieszczenia belek sprężysto-plastycznych 17

2. Tezy pracy wynikające ze stanu wiedzy 21

3. Przedmiot oraz cel własnych badań doświadczalnych i teoretycznych 22

4. Opis eksperymentalnych badań modeli belek na poprzeczne zginanie 23

   4.1. Przygotowanie modeli i stanowiska badawczego..... 23

   4.2. Przygotowanie warstw optycznie czynnych i aparatura pomiarowa w badaniach fotomechanicznych 29

   4.3. Algorytm pomiarów odkształceń i przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych oraz obróbki wyników z wykorzystaniem EMC 31

5. Systematyczne błędy pomiarów 35

   5.1. Obliczanie zaburzeń czasowo-brzegowych oraz stałej pokrycia optycznie czynnego 35

   5.2. Oszacowanie sztywności sprężystej belki 36

   5.3. Oszacowanie nośności plastycznej przekroju 37

6. Bezpośrednie obrazy izochrom 38

7. Kompensacja numeryczna obrazów izochrom 42

8. Oszacowanie plastycznej nośności granicznej belki na podstawie rzędu izochromy 44

9. Doświadczalne określenie kształtów oraz propagacji stref plastycznych 46

10. Oszacowanie trendu frontu plastycznego 48

11. Długość jądra sprężystego pod siłą skupioną i inne parametry geometrii frontu plastycznego 52

12. Wpływ smukłości belki na nośność graniczną 55

13. Krzywe interakcji zginania i ścinania przekroju belek... 58

14. Metoda rozdzielania naprężeń z obrazów izochrom w obszarze plastycznym i sprężystym 61

15. Doświadczalne określenie rozkładów naprężeń w przekrojach belki zginanej poprzecznie w obszarze sprężysto-plastycznym 65

16. Jednowymiarowy model sprężysto-plastycznego elementu belkowego 67

16.1. Budowa zastępczego elementu sprężysto-plastycznego przy wykorzystaniu wyników badań eksperymentalnych 67
16.2. Próba zastosowania metody elementów skończonych do wyznaczenia naprężeń, przemieszczeń i frontów plastycznych w belce zginanej poprzecznie..... 68
16.3. Próba teoretycznego oszacowania naprężeń i przemieszczeń belki na podstawie funkcjonału Castigliano 74
16.4. Formalny opis sprężysto-plastycznego zastępczego elementu belkowego 77
17. Przemieszczenia sprężysto-plastycznej belki jednoprzęsłowej 81
17.1. Wpływ sił stycznych na wartość oczekiwaną i rozproszenie przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek zginanych poprzecznie 81
17.2. Pomiary eksperymentalne przemieszczeń belek jednoprzęsłowych i porównanie z teorią 85
18. Badanie jednoczesności zakończenia procesu formowania się przegubów plastycznych 88
18.1. Wpływ sił stycznych na proces uplastyczniania belek wykonanych z materiału Prandtla 88
18.2. Proces formowania przegubów plastycznych w belkach rzeczywistych 91
18.3. Interpretacja zjawisk w procesie uplastyczniania belek rzeczywistych na podstawie badań fotomechanicznych 94
19. Wpływ sprężystości podpór na przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek statycznie niewyznaczalnych..... 97
19.1. Losowe podatności podpór belek rzeczywistych.... 97
19.2. Proces przemieszczeń badanych belek dwuprzęsłowych i porównanie z teorią 99
20. Kryteria szacowania granicznej nośności belek na podstawie procesu przemieszczeń 102
21. Losowa nośność plastyczna belek zginanych poprzecznie. 103
22. Uwagi i wnioski 107
Literatura cytowana..... 110
Załącznik: Wykaz ważniejszych procedur numerycznych..... 115
Streszczenie 117
Summary 119

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

Oznaczenia ogólne

A, a	- skalary
$\mathbb{A}$, $\mathbb{a}$	- macierze (również wektory),
$Pr[A]$	- prawdopodobieństwo zdarzenia A,
$F_{\mathbb{Y}}(\mathbb{y})$	- dystrybuanta wektora losowego $\mathbb{Y}$ jako funkcja jego wartości $\mathbb{y}$
$E(X) = \mu$, $\overline{X}$	- wartość oczekiwana, estymator wartości oczekiwanej,
$var(x) = \sigma^2$	- wariancja, kwadrat odchylenia standardowego,
$V_x = \sigma/\mu$	- współczynnik zmienności zmiennej X,
ϱ_{X_i, X_j}	- współczynnik korelacji zmiennych X_i, X_j,

Oznaczenia literowe

A	- pole przekroju poprzecznego pręta lub jego części,
b	- szerokość przekroju pręta,
C	- połowa wysokości rdzenia sprężystego przekroju,
E, E_o	- moduł odkształcalności podłużnej, sprężysty moduł Younga,
F	- wartość rzędu izochromy,
f	- stała pokrycia optycznie czynnego,
H	- wysokość przekroju pręta,
I	- moment bezwładności przekroju sprężystego,
K	- stała podatności podpory,
k_M	- współczynnik redukcyjny momentu zginającego,
L	- długość przęsła belki,
l	- długość porównawcza elementu belkowego,
M, $\bar{M}$	- moment zginający, pełny plastyczny moment zginający,
$m = M/\bar{M}$	- względny moment zginający,
N	- nośność konstrukcji,
P	- parametr wymuszeń (obciążenie),
P_{el}, P_{pl}	- eksperymentalnie określone graniczne obciążenie sprężyste, plastyczne,
Q, $\bar{Q}$	- siła poprzeczna, pełna plastyczna siła poprzeczna,
$q = Q/\bar{Q}$	- względna siła poprzeczna,
R	- granica plastyczności materiału,

t - długość odcinka sprawczego działania naprężeń σ_y, pochodzących od docisku sił powierzchniowych,

U - energia komplementarna (energia naprężeń),

W - wskaźnik wytrzymałości przekroju sprężystego,

$\overline{\overline{W}}$ - wskaźnik plastycznego oporu przekroju przeciwko czystemu zginaniu,

Y - przemieszczenia,

α - stosunek granicy plastyczności przy czystym rozciąganiu do granicy plastyczności przy czystym ścinaniu,

ν , ν_o - współczynnik odkształcalności poprzecznej, sprężysty współczynnik Poissona ,

σ_x, σ_y, τ_{xy}, σ_i, σ_1, σ_2, τ_{max}, $\mathbb{T}_\sigma$ - naprężenia normalne w kierunku osi pręta, naprężenia normalne prostopadłe do osi pręta, naprężenia styczne, intensywność naprężeń, naprężenia główne, maksymalne naprężenia styczne, tensor naprężeń,

σ_{yG} - naprężenia normalne σ_y wywołane gradientem naprężeń stycznych bez uwzględnienia docisku sił powierzchniowych.

ε_x, ε_y, γ_{xy}, ε_i, ε_1, ε_2, γ_{max}, $\mathbb{T}_\varepsilon$ - analogicznie jak wyżej w odniesieniu do odkształceń

$\xi = x/l$, $\zeta = 2y/H$ - względne współrzędne położenia punktu.

Wprowadzenie

Przedmiotem pracy są zginane poprzecznie pręty zbudowane z materiału sprężysto-plastycznego /stali niskowęglowej/. Pręty zabezpieczone są przed utratą stateczności i poddane obciążeniom statycznym.

Generalnym celem pracy jest zbudowanie doświadczalnych podstaw do szacowania losowej nośności elementów zginanych z uwzględnieniem sił stycznych. W toku opracowania rozprawy wyłoniło się szereg zagadnień, których ważność nieraz wykracza poza generalny cel pracy. Do nich należą między innymi: badanie jednoczesności zakończenia się procesu formowania przegubów plastycznych; doświadczalne oszacowanie kształtów i propagacji stref plastycznych oraz rozkładu naprężeń w rzeczywistych belkach zginanych poprzecznie; wpływ naprężeń normalnych od docisku sił powierzchniowych na przemieszczenia i nośność belek; zagadnienia teoretycznego wyznaczania przemieszczeń sprężysto-plastycznych belek z uwzględnieniem sił stycznych, losowych sztywności elementów i losowej sprężystości podpór.

Modelowe badania eksperymentalne wskazują zgodnie z oczekiwaniem, że siły styczne, nieodłącznie działające obok momentów zginających, zwiększają odkształcenia i przemieszczenia belek w zakresie pozasprężystym. Jednakże różnice między teoretycznym a doświadczalnym oszacowaniem przemieszczeń są znaczne i losowo różne dla każdej realizacji. Systematyczne rozbieżności w tym względzie, obserwowane w wielu eksperymentach, skłaniają do podjęcia specjalnych badań nad wpływem sił stycznych na stan belek sprężysto-plastycznych.

W niniejszej pracy przeprowadzono podstawowe badania eksperymentalne i teoretyczne wpływu sił stycznych na stany pozasprężyste elementów zginanych. Proces zniszczenia, uplastyczniania i przemieszczeń belek zginanych poprzecznie oszacowano z uwzględnieniem losowych właściwości materiału i konstrukcji. Rozważania prowadzono na możliwie prostych belkach, po to aby wyizolować zjawiska fizyczne, których ujęcie daje możliwość analizy elementów i ustrojów złożonych.

Metoda fotomechanicznej warstwy powierzchniowej pozwoliła eksperymentalnie rozpoznać propagację stref plastycznych, rozkłady naprężeń oraz mechanizm zniszczenia poprzecznie zginanych belek statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych. Zaproponowano przydatny w analizie teoretycznej, zastępczy model sprężysto-plastycznego belkowego elementu zginanego poprzecznie.

Na drodze rozwiązań teoretycznych sprawdzono dopuszczalność uproszczeń w belkowym modelu zastępczym. Numeryczne rozwiązania tarczy pozwoliły ustalić błąd popełniany przy stosowaniu modelu Prandtla materiału oraz określić przydatność elementu zastępczego ze względu na pominięcie naprężeń normalnych od docisku sił powierzchniowych. Oszacowania teoretyczne przemieszczeń i sił przekrojowych, uzyskane na bazie sprężysto-plastycznego elementu belkowego, porównano z pomiarami eksperymentalnymi. Pokazano, że reakcje układu sprężysto-plastycznego należy szacować z uwzględnieniem losowych właściwości materiału i geometrii konstrukcji oraz losowej sztywności podpór. Przedstawiono propozycję szacowania losowej nośności plastycznej belek zginanych poprzecznie przy wykorzystaniu procedur opracowanych na użytek stochastycznej mechaniki zniszczenia belek zginanych bez udziału sił stycznych.

Badania eksperymentalne, analizę wyników pomiarów oraz obliczenia teoretyczne wspomagano szeroko sprzętem komputerowym. Nowoczesne środki pozwoliły uzyskać wiele interesujących rezultatów, których otrzymanie w konwencjonalnej analizie byłoby trudne lub wręcz niemożliwe.

Autor dziękuje wszystkim osobom, które udzieliły pomocy w opracowaniu niniejszej pracy, a szczególnie promotorowi prof. zw. dr hab. inż. Zbigniewowi Kowalowi za zainspirowanie tematu oraz wnikliwe i cenne uwagi wniesione do pracy.

1. Stan wiedzy

1.1. Dotychczasowe badania wpływu sił stycznych na graniczną nośność plastyczną belek

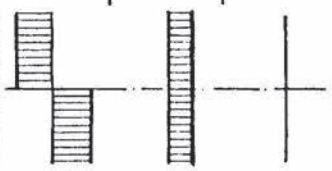
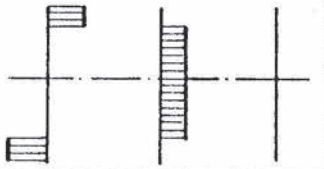
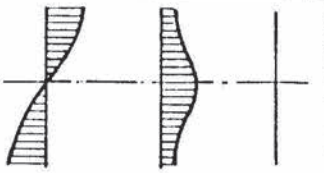
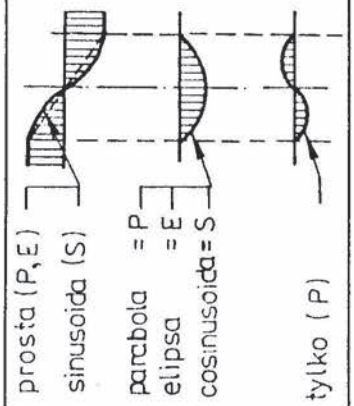
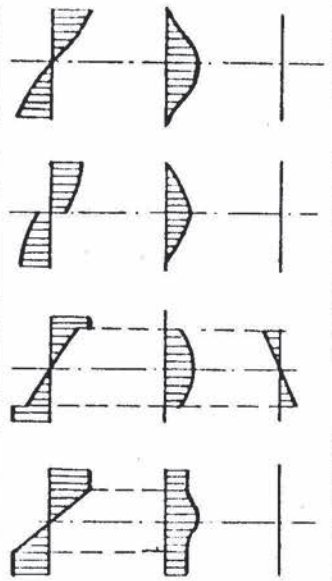
Badania teoretyczne wpływu sił stycznych na nielosową nośność plastyczną belek wykonanych z materiału idealnie sztywno-plastycznego rozpoczął w 1931 roku Stüssi [80]. Nowe prace np. [16, 49, 88] wskazują, że dyskusje nad tym problemem nie są jeszcze zamknięte.

Podstawą prowadzonych analiz były twierdzenia nośności granicznej. Najczęściej wykorzystywano twierdzenie statyczne, szacujące nośność plastyczną od dołu. Jednakże znalezienie w pełni statycznie dopuszczalnego pola naprężeń dla belki zginanej poprzecznie, uzależnione jest od statycznych warunków brzegowych i geometrii całego ustroju [18]. Warunek plastyczności transformowany do przestrzeni przekrojowych momentów zginających i przekrojowych sił poprzecznych, czyli tzw. krzywa interakcji plastycznej, nie jest więc uniwersalna dla danego materiału i kształtu przekroju, lecz zależy również od kinematycznych warunków brzegowych i obciążenia całej belki [24, 57].

Analitycznie nie można spełnić jednocześnie statycznych warunków brzegowych i prawa płynięcia w każdym punkcie przekroju pręta. Postulowano dwa typy rozkładów naprężeń, spełniające tylko jeden z tych warunków [88]: a) w pełni statycznie dopuszczalne (spełnione warunki brzegowe i równowagi), b) częściowo statycznie dopuszczalne (nie zachowane warunki równowagi, lecz w większości hipotez spełnione jest prawo płynięcia).

W tab. 1 zestawiono spotykane w literaturze hipotezy rozkładów naprężeń w granicznym stanie nośności prostokątnego przekroju wspornika obciążonego siłą poprzeczną na końcu. W literaturze omówione są ponadto hipotetyczne rozkłady naprężeń w jednorodnym przekroju dwuteowym [np. 30, 75, 78] lub hybrydowym przekroju dwuteowym [np. 15, 37, 10]. Podkreśla się trudności powstające przy konstrukcji krzywych interakcji dla innych kształtów przekrojów [np. 88].

Tab. 1. Hipotezy rozkładu naprężeń w granicznym stanie nośności przekroju prostokątnego belki zginanej poprzecznie

LP	HIPOTEZA	Rozkład naprężeń σ_x	Rozkład naprężeń τ_{xy}	Rozkład naprężeń σ_y	POLE NAPRĘŻEŃ	Autor, rok, Literatura (uwagi)
1	równomiernie rozłożonych naprężeń				częściowo statycznie dopuszczalne (spełnione tylko prawo płynięcia)	Sobotka, 1954, [77], Heyman - Dutton, 1954, [30], Streĺbitskaja, 1958, [78], Cywiński, 1978, [20].
2	idealnych półek					Paĺčevskij, 1948, [58], Streĺbitskaja, 1968, [79], Chen - Shomaker, 1972, [18],
3	wariacyjna					Papkovič, 1939, [59], Dikovič, 1948, [58], Ržanicyn, 1949, [72], Hodge, 1957, [31],
4	jądra sprężystego				w pełni statycznie dopuszczalne – jeśli $\sigma_y \neq 0$ oraz Druckera, częściowo statycznie dopuszczalne – jeśli $\sigma_y = 0$	Bezuchov, 1936, [10] ($\sigma_y = 0$, P), Mitinskij, 1939, [53] (P), Horne, 1951, [34] (P), Prager-Hodge, 1951, [63], (P), Heyman-Dutton, 1954, [30], (E), Mutermilch-Olszewski-Łubiński, 1956, [55], (E), Langendonck, 1956, [46], (S), Klöppel-Yamada, 1958, [40], (E), Neal, 1956, [57], (P), Reckling, 1967, [69], (P), Życzkowski, 1981, [88], (P), Baker-Horne-Heyman, 1956, [6] (P)
5	mieszane					Snitko, 1952, [75], Broude, 1953, [15] Drucker, 1956, [24], Śmiřák 1967 [74], Chen - Shomaker, 1972, [18], Juhas, 1975, [37].

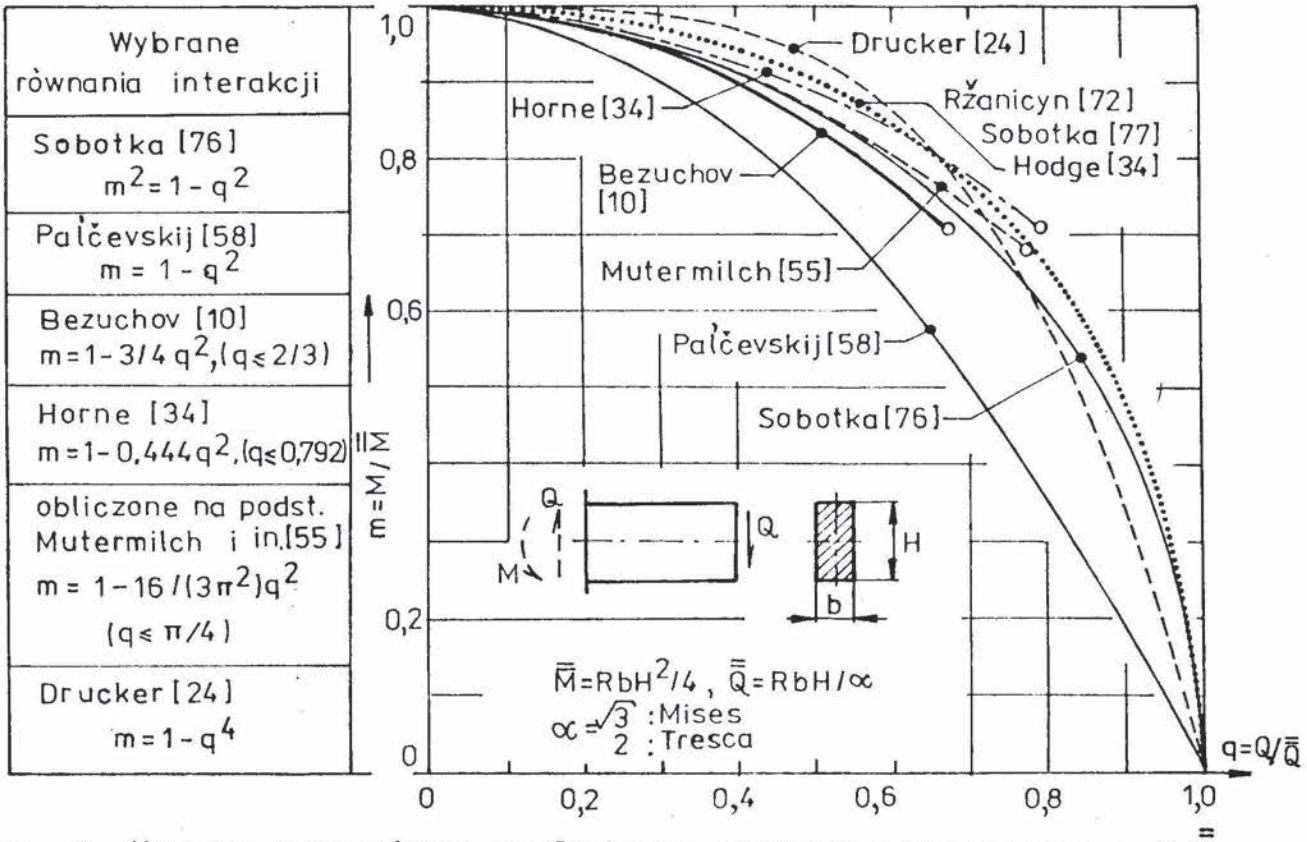
Przedstawione rozkłady naprężeń mogą występować w idealnie sprężysto-plastycznym materiale jednorodnym. W szczególności dotyczą one metali.

W trakcie przeglądu literatury nie natrafiono na próby transformacji tych rozkładów na materiały o różnych granicach plastyczności na rozciąganie i ściskanie.

Z rozkładów naprężeń zestawionych w tab. 1 wynikają różne krzywe plastycznej interakcji zginania i ścinania, zbudowane przez wielu autorów.

Na rys. 1 podano wybrane, stosowane równania krzywych interakcji o prostej analitycznej postaci, reprezentujące cztery spośród pięciu typów hipotez rozkładu naprężeń. Równania analityczne krzywych otrzymane na bazie hipotezy wariacyjnej (na rys. 1 - linia kropkowa) mają bardziej skomplikowaną postać.

Krzywe interakcji wynikające z hipotezy jądra sprężystego mają zakres ważności ograniczony do małych sił poprzecznych. Zakres ten obejmuje jednakże wszystkie praktyczne i ważne przypadki zginania poprzecznego.



Rys. 1. Krzywe interakcji względnego momentu zginającego $m = M/\bar{M}$ z względną siłą poprzeczną $q = Q/\bar{Q}$

Obserwuje się znaczne rozbieżności między krzywymi interakcji, zwłaszcza w stosunku do krzywej idealnych półek Palčevskiego.

Rozbieżne są opinie dotyczące znaczenia poszczególnych hipotez rozkładu naprężeń i wynikających z nich krzywych interakcji [67, 85, 88]. Oceny te formułowane są z punktu widzenia oszacowania statycznego granicznej nośności plastycznej.

W trakcie przeglądu literatury nie natrafiono na próby eksperymentalnej weryfikacji hipotez rozkładów naprężeń przy użyciu metod bezpośrednich. Nie oceniano również przydatności poszczególnych hipotez do opisu naprężeń w przekroju częściowo uplastycznionym.

Badania doświadczalne sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężeń umożliwia opracowana w 1950 roku przez Aleksandrova [2] metoda fotomechanicznej warstwy powierzchniowej. Poczynając od roku 1955, po zastosowaniu żywic epoksydowych na pokrycia optycznie czynne, metodą fotomechaniczną wykonano wiele badań doświadczalnych [22, 48, 44, 83 i in.]. Nie stosowano jednak tej metody do badania frontów plastycznych oraz rozkładów naprężeń w belkach zginanych poprzecznie.

W Polsce metodę optycznie czynnej warstwy powierzchniowej stosował między innymi Abramowicz do badania elementów żelbetowych [1] oraz Kapkowski do badania propagacji stref plastycznych w próbkach rozciąganych z karbem, rozciąganego elementu z wieloma otworami a także innych części maszyn [38, 39].

Pomiary fotomechaniczne dają dobry obraz linii równych różnic odkształceń głównych (izochrom). Mniej dokładnie można określić kierunki odkształceń głównych (izokliny). Jednakże w większości metod rozdzielania odkształceń i naprężeń konieczna jest znajomość izochrom i izoklin [22, 23, 45, 48, 44, 42]. Same izochromy wykorzystywane są w metodzie charakterystyk [39, 81] lub przy całkowaniu równań Laplace'a [23]. Metody te dotyczą obszaru sprężystego. Rozdzielenie odkształceń i wyznaczenie naprężeń w obszarze plastycznym jest przedstawione w tych pracach tylko dla pewnych przypadków szczególnych.

Trudności pomiarowe w obszarze sprężystym powstają przy stosowaniu metody prześwietlania skośnego [22] lub przy pomiarze

odkształceń poprzecznych. Określenie naprężeń w obszarze plastycznym możliwe jest tylko przy dodatkowym założeniu, wynikającym z teorii plastyczności, np.: 1) założeniu zgodności kierunków głównych odkształceń i naprężeń lub 2) założeniu związku między intensywnością odkształceń i naprężeń lub 3) założeniu nieściśliwości.

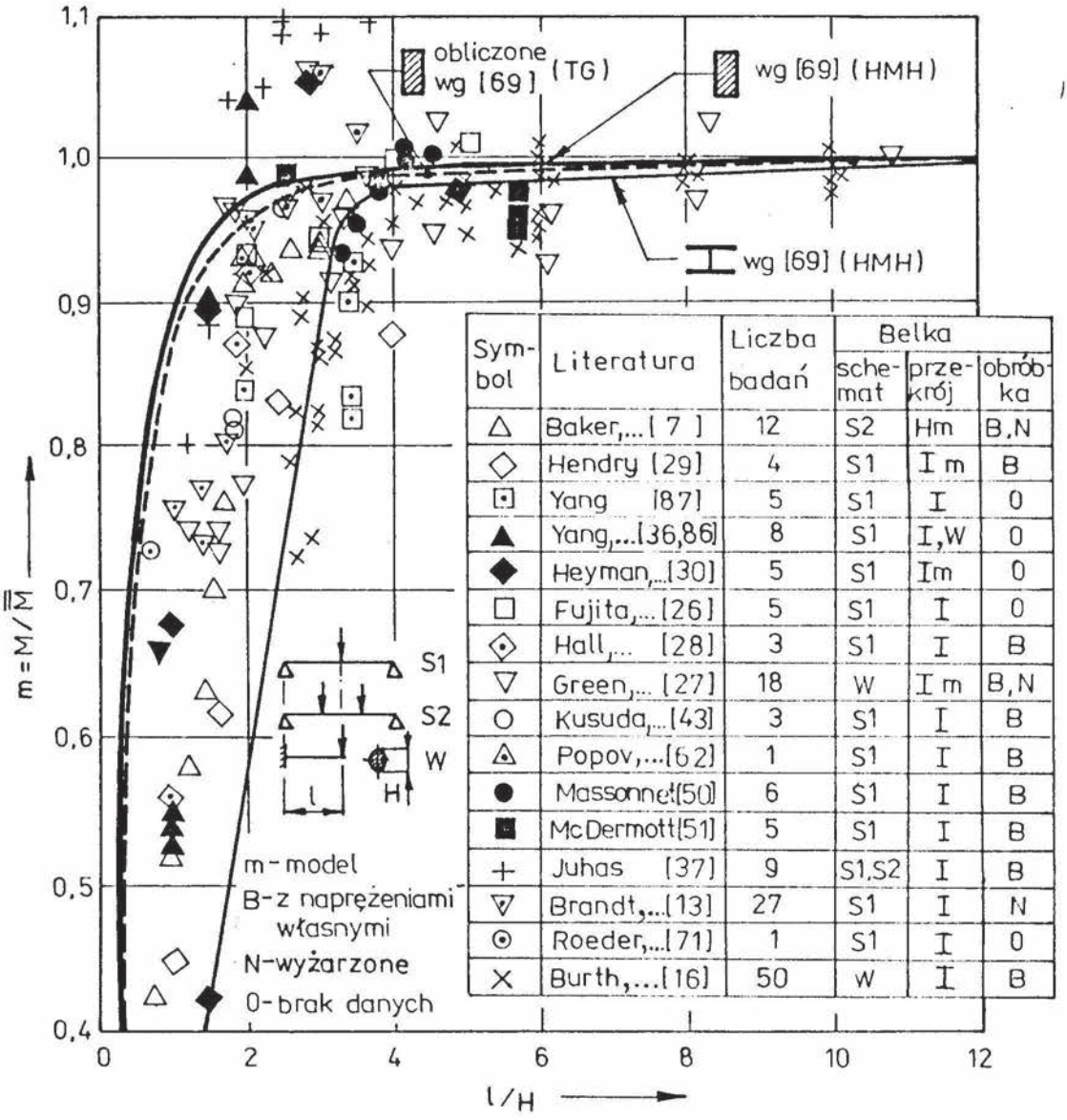
Dla materiałów typu stali niskowęglowej bliskie rzeczywistości i proste w zastosowaniu jest założenie, że ważna jest hipoteza o związku między maksymalnym odkształceniem kątowym a maksymalnym naprężeniem stycznym, czyli hipoteza Treski [82].

Propagację frontów plastycznych w belkach zginanych badał Pindera [55] za pomocą metody kruchych pokryć. Badania nie potwierdziły teoretycznych wymiarów i kształtów stref plastycznych. Rozbieżności tłumaczono znacznym wpływem naprężeń własnych oraz niejednorodnością materiału, mimo że nie określono wartości naprężeń w przekrojach belki.

Dotychczasowe badania eksperymentalne interakcji zginania i ścinania oparte były na analizie procesu przemieszczeń belek o znanym stosunku sił Q:M w przekroju krytycznym. Na rys. 2 zestawiono oszacowaną w doświadczeniach zależność względnego momentu plastycznego $M/\bar{M}$ w funkcji smukłości belki l:H. Smukłość belki można interpretować jako stosunek M:Q we wsporniku lub belce swobodnie podpartej obciążonej siłą skupioną.

Przedstawione na rys. 2 wyniki dotyczą badań doświadczalnych prowadzonych na stalowych belkach normalizowanych lub z naprężeniami walcowniczymi i spawalniczymi [27, 7]. Eksperymenty prowadzono na dwuteownikach normalnych i szerokostopowych, belkach spawanych lub walcowanych. Zróżnicowane były warunki badań: obciążenie, podparcie, prowadzenie boczne belek, prędkość obciążania. Różny był również sposób oceny nośności plastycznej. Wpływ poszczególnych czynników na wyniki doświadczeń trudno ocenić ze względu na brak podstawowych informacji o przeprowadzonych badaniach w większości cytowanych prac.

Za eksperymentalną nośność uznawano z reguły takie obciążenie, przy którym nie było stabilizacji przemieszczeń. Kryterium to nie jest ściśle sprecyzowane w warunkach eksperymentu



Symbol	Literatura	Liczba badań	Belka: schemat	Belka: przekrój	Belka: obróbka
△	Baker,...[7]	12	S2	Hm	B,N
◇	Hendry [29]	4	S1	I m	B
⊡	Yang [87]	5	S1	I	0
▲	Yang,...[36,86]	8	S1	I,W	0
◆	Heyman,...[30]	5	S1	Im	0
□	Fujita,...[26]	5	S1	I	0
◈	Hall,... [28]	3	S1	I	B
▽	Green,... [27]	18	W	I m	B,N
○	Kusuda,...[43]	3	S1	I	B
◬	Popov,...[62]	1	S1	I	B
●	Massonnet[50]	6	S1	I	B
■	McDermott[51]	5	S1	I	B
+	Juhas [37]	9	S1,S2	I	B
▽	Brandt,...[13]	27	S1	I	N
⊙	Roeder,...[71]	1	S1	I	0
×	Burth,...[16]	50	W	I	B

Rys. 2. Badania doświadczalne nad wpływem smukłości belki l/H na względny moment plastyczny $M/\bar{M}$ *) i porównanie z teorią

*) Teoretyczny moment plastyczny $\bar{M}=\bar{W}\cdot R$ jest szacowany na podstawie pomiarów geometrycznych przekroju oraz granicy plastyczności materiału z jednoosiowego rozciągania.

i umożliwia subiektywną interpretację. Niewątpliwie lepsza jest metoda stycznej*), opisana między innymi w pracach [16, 61], lub metoda ekstremów wariancji przemieszczenia**) [11].

Nawarstwienie się wpływów systematycznych oraz losowych powoduje znaczny rozrzut wyników badań eksperymentalnych.

W cytowanych pracach ocenia się generalnie nośność graniczną belki zginanej poprzecznie jako mniejszą od nośności plastycznej belki poddanej czystemu zginaniu. Objawia się to szczególnie dla belek bardzo krótkich, występujących w praktyce przeważnie w postaci wsporników.

W celu porównania teorii z eksperymentami, na rys. 2 naniesiono krzywe teoretyczne. Linią grubą oznaczono krzywą dotyczącą przekroju prostokątnego, natomiast linią cienką szerokostopowego dwuteownika. Krzywe uzyskał teoretycznie Reckling [69] przy zastosowaniu prawa płynięcia Hubera-Misesa-Hencky (HMH).

Zmniejszenie nośności plastycznej belki na skutek działania sił stycznych jest tym większe im kształt przekroju odbiega bardziej od prostokąta a upodabnia się do idealnego dwuteownika. Kształt przekroju ma jednak niewielki wpływ na nośność belek o smukłościach $l:H > 4$, a jednocześnie wpływ sił stycznych jest mały.

Na rys. 2 linią przerywaną oznaczono zależność teoretyczną $l:H \rightarrow m$ dla przekroju prostokątnego, obliczoną przy użyciu prawa plastyczności Treski-Guesta (TG). Porównanie tej krzywej z odpowiadającą krzywą (HMH) wskazuje na praktycznie nieistotną różnicę nośności belek.

Wobec małego wpływu naprężeń stycznych na nośność długich belek, autorzy [32, 57] postulują uniwersalne zastosowanie krzywej

---

*) W metodzie stycznej przyjmuje się, że graniczne obciążenie plastyczne odpowiada punktowi przecięcia dwóch prostych na ścieżce równowagi obciążenie P → przemieszczenie Y. Jedna prosta jest styczną do nieliniowej części ścieżki równowagi wystawioną w punkcie $3Y_e$, gdzie Y_e jest składową sprężystą ugięcia. Druga prosta jest przedłużeniem liniowej, sprężystej części ścieżki równowagi.

**) Metoda ekstremum wariancji przemieszczenia wykorzystywana jest w badaniach statystycznych serii konstrukcji. Graniczną nośność plastyczną szacuje się jako obciążenie odpowiadające n-temu maksimum rozproszenia przemieszczenia sprawczego. Wielkość n jest liczebnością minimalnego zbioru krytycznego elementów konstrukcji.

plastycznej otrzymanej dla belki wspornikowej. Fakt ten znajduje odzwierciedlenie w przepisach normalizacyjnych niektórych krajów, między innymi Wielkiej Brytanii [14], Republiki Federalnej Niemiec [70] i Czechosłowacji [21].

Próby praktycznego uwzględnienia zmniejszenia nośności plastycznej belek na skutek działania sił stycznych czynione były w ostatnich latach również w Polsce: w 1980 roku przez Łubińskiego i Giżejowskiego [49] i w 1985 r. przez Merunowicza i Strzeleckiego [52].

W podsumowaniu stanu wiedzy na temat wpływu sił stycznych na graniczną nośność plastyczną belek, można sformułować następujące wnioski:

1. W literaturze brak obiektywnego oszacowania wpływu losowych właściwości materiału i konstrukcji na graniczną nośność plastyczną belek zginanych poprzecznie.
2. Z analizy przedstawionych w literaturze hipotez rozkładu naprężeń wynika, że opisu składowych naprężenia w częściowo uplastycznionym przekroju poszukiwać należy w zbiorze hipotez jądra sprężystego.
3. W związku z tym, że wyniki dotychczasowych doświadczalnych badań przedstawionych na rys. 2 mają duży rozrzut, nie mogą one stanowić podstawy do wyboru hipotezy rozkładu naprężeń i krzywej interakcji.
4. Pomiary fotomechaniczne umożliwiają badanie propagacji frontów plastycznych oraz szacowanie granicznej nośności plastycznej elementów konstrukcyjnych.
5. Brak jest uniwersalnej metody rozdzielania naprężeń tylko z obrazów izochrom w obszarach plastycznych i sprężystych.
6. Nie przeprowadzono dotychczas udanej próby doświadczalnej weryfikacji rozkładu naprężeń w przekroju belki zginanej i ścinanej w obszarze sprężysto-plastycznym.
7. Oszacowanie granicznej nośności plastycznej na podstawie badań fotomechanicznych umożliwi weryfikację pośrednich metod szacowania nośności plastycznej na podstawie procesu przemieszczeń.

1.2. Stan wiedzy na temat wpływu sił stycznych na przemieszczenia belek sprężysto-plastycznych

Wpływ naprężeń stycznych na przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek jest skąpo naświetlony w literaturze światowej.

Nie zaprogramowano dotychczas i nie przeprowadzono eksperymentu zmierzającego do odseparowania wpływu sił stycznych na prze-mieszczenia belek sprężysto-plastycznych nawet w ujęciu deterministycznym.

Natrafiono tylko na jedną pracę teoretyczną, w której uwzględniono wpływ odkształceń postaciowych na deterministyczne ugięcie belki sprężysto-plastycznej. Pracę przedstawiła Rachimbekova [66] w roku 1980. Zastosowała analityczną, iteracyjną metodę rozwiązań sprężystych Iljušina do całkowania zgiętej osi belki ze sztywnością zmniejszoną przez siły styczne. Otrzymała skomplikowane, przybliżone formuły, dotyczące tylko belki swobodnie podpartej poddanej działaniu ciągłego obciążenia poprzecznego lub skupionej siły. Wynika z nich, że siły styczne znacznie zwiększają ugięcia analizowanego ustroju w obszarze pozasprężystym.

Kilkuset autorów analizowało nieliniowe fizycznie tarcze lub powłoki metodą elementów skończonych. Istnieje przekonanie, że metoda elementów skończonych może zastąpić modelowe badania eksperymentalne. Jednakże kosztowność metody, ogranicza jej stosowanie zasadniczo do celów poznawczych.

Nie natrafiono na próby zastosowania metody elementów skończonych do analizy przemieszczeń, propagacji frontów plastycznych czy granicznej nośności plastycznej elementu zginanego poprzecznie z punktu widzenia wpływu sił stycznych.
Wydaje się, że powodem tego jest przybliżony charakter rozwiązań, nie pozwalający na wyciąganie precyzyjnych wniosków odnośnie wpływu sił stycznych.

W innych pracach pomijano wpływ sił stycznych na siły przekrojowe i przemieszczenia belek sprężysto-plastycznych. W pracach wskazanych w [41, 54] wykazano znaczny wpływ skończonych stref plastycznych na przemieszczenia belek poddanych prostemu zginaniu. Efektywne algorytmy, uwzględniające rozszerzanie się obszarów plastycznych, uzyskano tylko dla szacowania przemieszczeń w granicznym stanie plastycznym.

Istniejące algorytmy numeryczne [12] umożliwiają obliczenie sił przekrojowych i przemieszczeń w statycznie niewyznaczalnych prętowych ustrojach belkowych przy wielu upraszczających założeniach. Głównym założeniem jest pominięcie wpływu sił stycznych i przyjęcie zastępczego przekroju idealnego. Pierwsze uplastycznienie w przekroju zastępczym traktuje się jednocześnie jako uplastycznienie całkowite. Sprowadza się to do klasycznej metody punktowych przegubów plastycznych, w której schemat statyczny ustroju zmienia się skokowo wraz z pojawieniem się kolejnych przegubów. Uwzględnienie zmienności sztywności ustroju jest podstawowym problemem w standardowych procedurach numerycznych.

Zasada kolejnego tworzenia się pełnych przegubów plastycznych w konstrukcjach sprężysto-plastycznych jest szeroko rozprzestrzeniona w literaturze. Tymczasem L'Hermite [47] już w roku 1942 na drodze ogólnych rozważań teoretycznych pokazał, że w granicznym stanie plastycznym konstrukcji wykonanej z materiału Prandtla - przeguby plastyczne powstają jednocześnie.

W pracy [55] podjęto próbę uzasadnienia jednoczesności powstawania przegubów plastycznych w zastosowaniach teorii plastyczności do obliczeń inżynierskich. Rozważania prowadzono na belkach obciążonych siłami skupionymi przy pominięciu naprężeń stycznych. W p. 18.1 niniejszej pracy autor pokazał, że rozważania te są nieścisłe. Również nieścisłe są wyniki obliczeń numerycznych przeprowadzonych w pracy [52].

Losowe parametry procesu stochastycznego przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych szacowano teoretycznie tylko w pracach autora i tylko bez uwzględnienia sił stycznych. Stosowano metodę linearyzacji [41] lub transformacji [19] w stosunku do kilku belek prostych. Pokazano, że przemieszczenia sprężysto-

-plastycznych belek poddanych prostemu zginaniu cechuje rozrzut losowy kilkakrotnie przekraczający rozproszenie granicy plastyczności.

Rozwiązania teoretyczne potwierdziły fakt zaobserwowany w eksperymentach przez Kowala i zespół [11]. Stwierdzono, że przebudowie struktury wewnętrznej materiału konstrukcji towarzyszy znaczne zwiększenie rozproszenia przemieszczeń.

W podsumowaniu stanu wiedzy na temat szacowania przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych należy stwierdzić, że:

1. Dotychczas nie określono doświadczalnie deterministycznego procesu przemieszczeń belek z odseparowaniem wpływu sił stycznych.
2. W literaturze nie rozpatrzono teoretycznie wpływu losowych właściwości materiału i konstrukcji na przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek zginanych z udziałem sił poprzecznych. Stochastyczny proces przemieszczeń bez uwzględnienia sił stycznych określono teoretycznie tylko dla kilku belek statycznie wyznaczalnych.
3. W celu prawidłowego oszacowania realizacji przemieszczeń należy uwzględnić skończony zasięg stref plastycznych oraz siły styczne. Dotyczy to również szacowania sił przekrojowych w belkach statycznie niewyznaczalnych.
4. Niedoskonały jest model matematyczny realizacji belki wykonanej z materiału Prandtla, w którym przyjęto działanie tylko naprężeń normalnych oraz małe przemieszczenia i odkształcenia. W stanie granicznym nośności belki obciążonej siłami skupionymi występują skończone ugięcia [32, 60, 72, 54], a pełne przeguby plastyczne powstają w kolejności początków uplastyczniania przekrojów. Jest to niespójne z definicją mechanizmu plastycznego. Zjawisko powyższe nazwiemy paradoksem belek idealnie sprężysto-plastycznych.
5. Istniejące teoretyczne metody umożliwiają szacowanie deterministycznych przemieszczeń belek statycznie niewyznaczalnych z uwzględnieniem skończonych stref plastycznych tylko w granicznym stanie plastycznym. Oszacowania te obarczone są błędem wynikającym z paradoksu belek idealnie sprężysto-plastycznych (wniosek 4).

6. W literaturze nie ma przykładu, w którym oszacowanoby proces przemieszczeń sprężysto-plastycznej belki statycznie niewyznaczalnej przy uwzględnieniu skończonych stref plastycznych. Dotyczy to nawet belki obciążonej tylko momentami zginającymi.

7. Brak jest ogólnej teoretycznej metody obliczania belek sprężysto-plastycznych, uwzględniającej ciągłą zmianę sztywności. Istniejące metody nie umożliwiają takich obliczeń, bo:
   a) całkowanie równania różniczkowego osi sprężysto-plastycznej belki w ogólnym przypadku (np. w przypadku statycznie niewyznaczalnych belek) jest trudne do realizacji nawet przy użyciu iteracyjnych metod numerycznych,
   b) w istniejących algorytmach numerycznych dokonano wielu uproszczeń nie pozwalających na taką adaptację tych procedur, aby uwzględnić skończone strefy plastyczne.

8. Należy poszukiwać metody szacowania przemieszczeń sprężysto-plastycznych belek, w której uwzględnione będą postulaty wniosku 3. Opracowanie takiej metody umożliwi określenie nośności konstrukcji ze względu na ograniczenie przemieszczeń.

2. Tezy pracy wynikające ze stanu wiedzy

Dotychczasowy stan wiedzy na temat wpływu sił stycznych na przemieszczenia i nośność belek poprzecznie zginanych a także stan wiedzy na temat stochastycznej mechaniki zniszczenia konstrukcji daje przesłanki do sformułowania następujących tez, które udowodniono w tekście pracy:

1. Przemieszczenia i nośność belek poprzecznie zginanych należy szacować z uwzględnieniem losowych właściwości materiału i konstrukcji.
2. Przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek są istotnie zwiększane przez naprężenia styczne.
3. Na skutek redystrybucji sił stycznych występuje jednoczesność tworzenia się pełnych przegubów plastycznych w chwili plastycznego zniszczenia belki wykonanej z materiału Prandtla.

W pracy sformułowano i udowodniono ponadto szereg tez nie wynikających ze stanu wiedzy, a istotnych dla teorii nośności granicznej belek poprzecznie zginanych a także istotnych dla praktyki projektowej i normalizacyjnej.

3. Przedmiot oraz cel własnych badań doświadczalnych i teoretycznych

Generalnym celem prowadzonych przez autora badań eksperymentalnych było określenie teoretycznego modelu elementu sprężysto-plastycznego, przydatnego do wyznaczania ścieżek równowagi sprężysto-plastycznych belek zginanych poprzecznie oraz oszacowania nośności granicznej belek.

Przeprowadzono badania fotomechaniczne, które umożliwiły określenie: kształtów, wymiarów i propagacji stref plastycznych, rzeczywistego rozkładu naprężeń w belkach, mechanizmu zniszczenia oraz granicznej nośności sprężystej i plastycznej. Badania umożliwiły ponadto: oszacowanie interakcji zginania i ścinania w obszarze plastycznym; ustalenie kryteriów szacowania granicznej nośności plastycznej belek zginanych na podstawie procesu stochastycznego przemieszczeń; określenie losowego procesu przemieszczeń oraz procesu sił przekrojowych w belkach statycznie niewyznaczalnych z uwzględnieniem losowej sprężystości podpór.

Wymienione zagadnienia mają znaczenie podstawowe przy budowie teoretycznych algorytmów, służących do rozwiązywania sprężysto-plastycznych układów elementów belkowych. Tymczasem znane z literatury badania doświadczalne z reguły nie poruszają tych zagadnień. Badania dotychczasowe dotyczyły zasadniczo interakcji zginania i ścinania, a ich ograniczoną przydatność do zastosowań omówiono w p. 1 niniejszej pracy.

Celem badań teoretycznych była ocena przydatności zastępczego elementu sprężysto-plastycznego do szacowania przemieszczeń oraz nośności granicznej belek zginanych z udziałem sił stycznych. Opracowanie metody teoretycznej uwzględniającej wpływ sił stycznych na stan belek umożliwiło odseparowanie i ocenę tego wpływu na losową nośność belek rzeczywistych z warunku ograniczenia przemieszczeń (stan graniczny użytkowania) i z warunku zniszczenia plastycznego (stan graniczny nośności plastycznej).

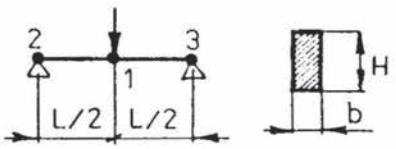
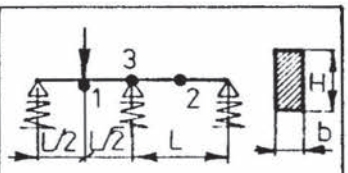
4. Opis eksperymentalnych badań modeli belek na poprzeczne zginanie

4.1. Przygotowanie modeli i stanowiska badawczego

Badania doświadczalne na zginanie poprzeczne przeprowadzono na belkach o nominalnym przekroju prostokątnym 40 mm x 20 mm, uzyskanych przez obróbkę skrawaniem handlowych płaskowników stalowych ⌀ 45x25.

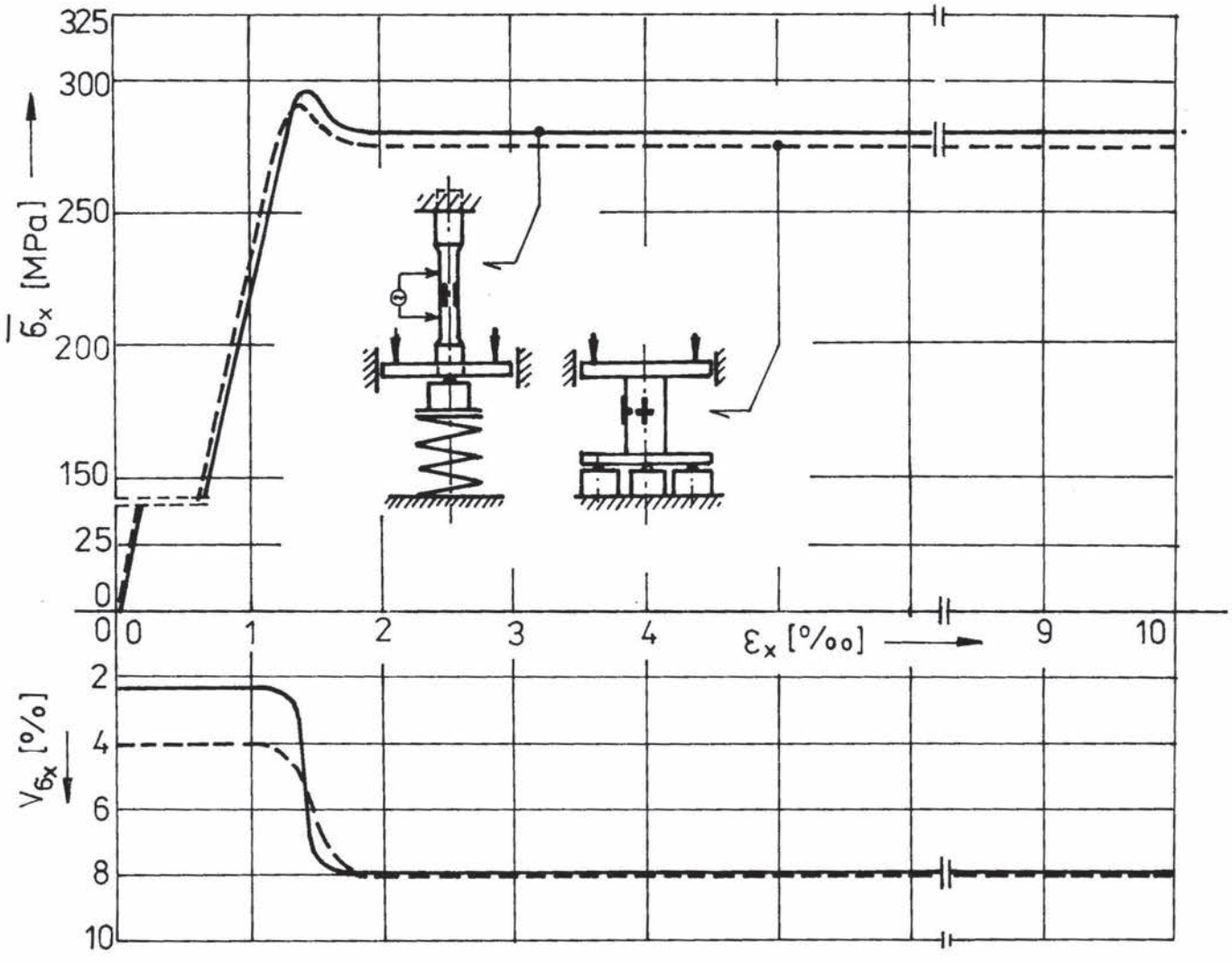
Obróbką skrawaniem usunięto wpływ powierzchniowego zgniotu walcowniczego, a jednocześnie przygotowano powierzchnię pod optycznie czułą warstwę powierzchniową. Pozostały rdzeń nie poddawano dodatkowej obróbce cieplnej.

Tab. 2. Asortyment badanych belek

Schemat statyczny								
Symbol serii	A	B	C	D	E	F	G	H
Stosunek L/H	4	6	8	10	12	6	8	10
Il.szt.serii	6	6	6	6	6	5	5	5
Nom. długość L [mm]	160	240	320	400	480	240	320	400
Wymiary przekroju [mm]*) wysokość H przekrój 1	40,03 ±0,02	40,03 ±0,03	40,01 ±0,02	40,01 ±0,02	40,01 ±0,02	40,00 ±0,02	40,01 ±0,02	40,00 ±0,02
przekrój 2	40,03 ±0,03	40,04 ±0,01	40,00 ±0,03	40,01 ±0,02	40,00 ±0,01	40,00 ±0,01	40,00 ±0,02	40,00 ±0,02
przekrój 3	40,02 ±0,02	40,03 ±0,03	40,02 ±0,02	40,00 ±0,02	40,02 ±0,02	40,00 ±0,01	40,00 ±0,02	40,01 ±0,01
po długości	40,03 ±0,02	40,03 ±0,03	40,01 ±0,03	40,01 ±0,02	40,01 ±0,02	40,00 ±0,01	40,00 ±0,02	40,00 ±0,02
szerokość b przekrój 1	20,01 ±0,03	20,05 ±0,02	19,99 ±0,01	20,00 ±0,02	20,00 ±0,02	19,98 ±0,05	20,00 ±0,01	20,00 ±0,01
przekrój 2	20,00 ±0,02	20,05 ±0,01	19,99 ±0,01	20,00 ±0,02	20,01 ±0,01	19,98 ±0,04	20,01 ±0,01	19,99 ±0,02
przekrój 3	20,02 ±0,03	20,04 ±0,02	20,00 ±0,01	20,00 ±0,01	20,00 ±0,02	19,98 ±0,05	20,01 ±0,00	20,00 ±0,02
po długości	20,01 ±0,03	20,05 ±0,02	19,99 ±0,01	20,00 ±0,02	20,00 ±0,02	19,98 ±0,05	20,01 ±0,01	20,00 ±0,02

*) $X \pm \Delta X$ - średnia i odchylenie standardowe w próbie obliczone na podstawie 6 pomiarów mikrometrem o dokładności 0,01 mm dla każdego przekroju każdej belki.

Badaniom poddano 5 serii po 6 belek jednoprzęsłowych o stosunku długości przęsła do wysokości przekroju L:H=4, 6, 8, 10, 12, oznaczonych jako seria A,B,C,D,E (tab. 2) oraz 3 serie po 5 belek dwuprzęsłowych o smukłości L:H=6, 8, 10, oznaczonych jako seria F,G,H. Belki obciążano jedną siłą skupioną w środku przęsła.



Rys. 3. Trend $\bar{\sigma}_x$ i rozproszenie $V_{\sigma x}$ statycznej ścieżki równowagi prób ściskanych (linie przerywane) i rozciąganych (linie ciągłe)

Przeprowadzono badania prób stali na rozciąganie i ściskanie z automatycznym przetwarzaniem wyników pomiaru. Wykorzystano opracowane przez autora, komputerowe programy pomiarowe „PRASA1'LCH" i „PRASA2'LCH", dostosowane do pracy w zintegrowanym systemie pomiarowym SOLARTRON z minikomputerem PDP-11/04. Oszacowano statyczne ścieżki równowagi (ε_x, σ_x) z wyeliminowaniem wpływu prędkości odkształceń. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 3 i w tab. 3.

Tab. 3. Wybrane parametry statycznych ścieżek równowagi prób ściskanych i rozciąganych (rys. 3.)

	rozciąganie					ściskanie				
	E_o^+	R_H^+	R_g^+	R_d^+	ε_g^+	E_o^-	R_H^-	R_g^-	R_d^-	ε_g^-
	[GPa]	[MPa]			[‰]	[GPa]	[MPa]			[‰]
$\bar{X}$	223,7	284,3	295,3	280,0	1,48	229,7	280,1	291,6	276,3	1,34
V_x	0,023	0,035	0,077	0,079	0,080	0,041	0,058	0,060	0,079	0,070

Zidentyfikowano stal jako niskowęglową grupy St3 o długim przystanku plastycznym oraz o nieznacznych różnicach na rozciąganie i ściskanie. Średnie z rozciągania i ściskania parametry oczekiwanych statycznych ścieżek równowagi wynoszą: sprężysty moduł Younga E_o=226,7 GPa, górna granica plastyczności R_g=293,5 MPa, dolna granica plastyczności R_d=278,2 MPa, graniczne odkształcenie sprężyste ε_g=1,41‰, sprężysty współczynnik Poissona ν_o=0,288.

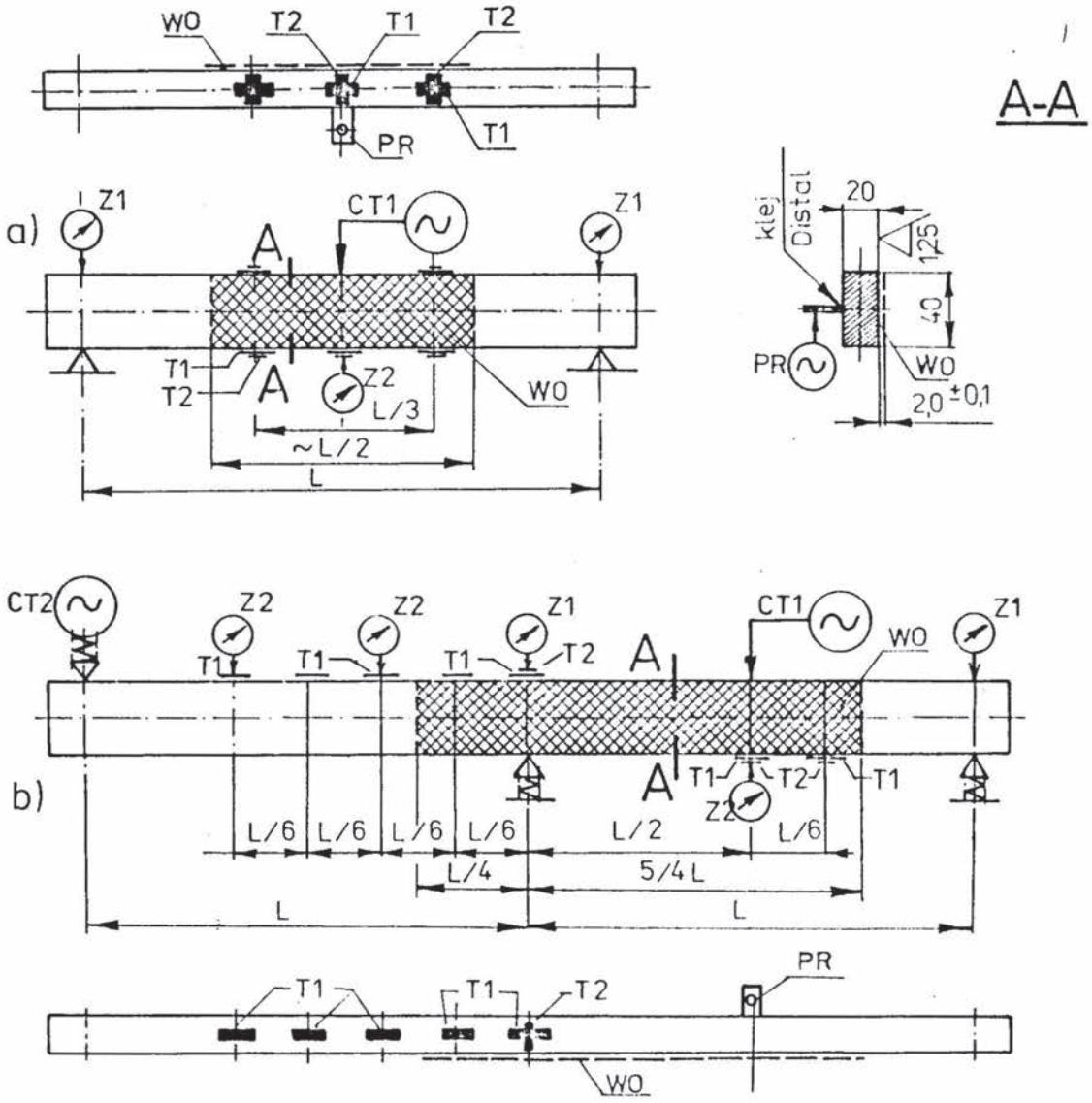
Spełniono warunek konieczny, aby rozkład statystyczny cech mechanicznych z próby przeznaczonej do badań materiałowych był rozkładem z próby materiału modeli belek. Mianowicie ścieżki równowagi przy rozciąganiu i ściskaniu określono dla próbek wyciętych ze wszystkich trzymetrowych handlowych odcinków płaskowników. Jednocześnie zadbano o to, aby każdy model pochodził z innego odcinka handlowego.

Rozmieszczenie czujników i przyrządów pomiarowych na badanych modelach pokazano na rys. 4.

Na krawędzi górnej i dolnej belki klejono po 10 tensometrów. Zastosowano tensometry podłużne T1 i poprzeczne T2 typu RL 120 o bazie 10 mm. Przemieszczenia mierzono za pomocą

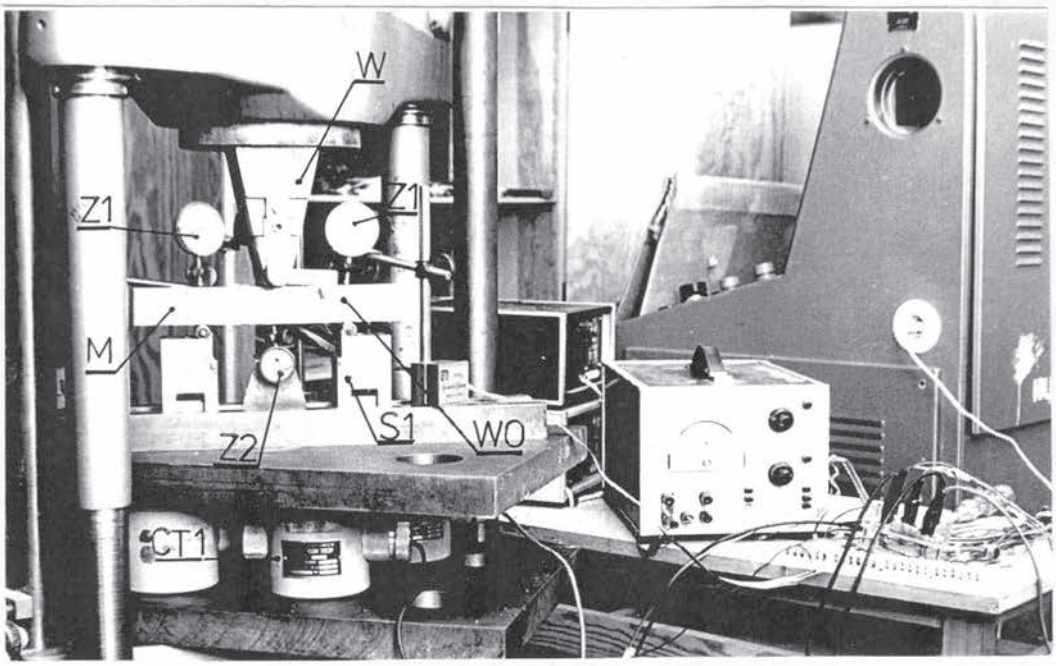
mechanicznych czujników zegarowych Z1 o dokładności 0,001 mm (osiadania podpór) oraz czujników zegarowych Z2 o dokładności 0,01 mm (pod siłą i w przęśle). Niezależnie od tego, do pomiaru przemieszczenia osi belki pod siłą obciążającą zastosowano indukcyjny czujnik przemieszczeń PR typu PR14/20 firmy PHILIPS. Całkowitą siłę obciążającą mierzono układem czterech siłomierzy CT1 typu CT 2,5 t, natomiast reakcję hiperstatyczną siłomierzem CT2 typu 1 t produkcji węgierskiej.

Na rys. 4 kratkowaniem oznaczono optycznie czynną warstwę powierzchniową WO, wylewaną na połowie ściany bocznej belki. W serii belek A warstwą optyczną pokryto całą powierzchnię boczną belek.



Rys. 4. Rozmieszczenie czujników na modelach: a) jednoprzęsłowych (seria A-E), b) dwuprzęsłowych (seria F-H)

Dużą dokładność pomiaru siły oraz przemieszczenia uzyskano przez wielokrotne w okresie badań skalowanie czujników napięciowych. Do wyznaczania stałej czujników używano, opracowanej przez autora, procedury komputerowej „STALA'LCH". Pomiary sygnału napięciowego, wykonywane w systemie SOLARTRON, porównywano ze wskazaniami przyrządu skalującego. Automatycznie obliczane stałe czujnika podlegały obróbce statystycznej, a ewentualną nieliniową charakterystykę interpolowano wielomianową krzywą regresji. Używano wielomianów potęgowych lub wielomianów Czebyszewa stopnia nie większego od 30. Jakość interpolacji mierzono współczynnikiem regresji oraz odchyleniem standardowym krzywej regresji od wyników empirycznych.

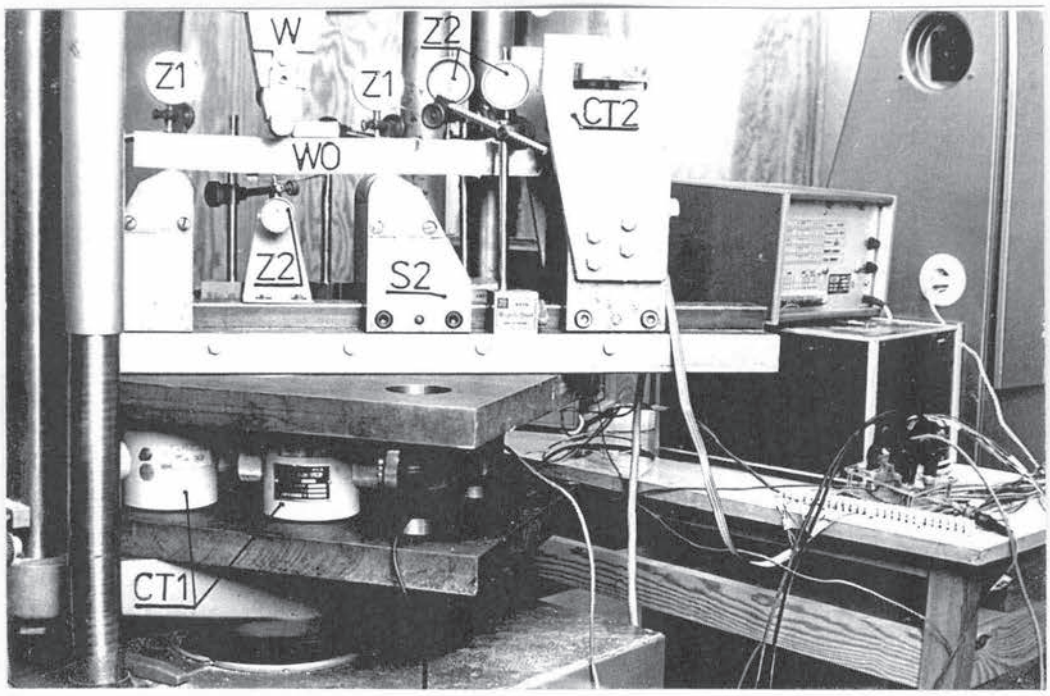


Rys. 5. Stanowisko do badań belek jednoprzęsłowych (seria A-E)

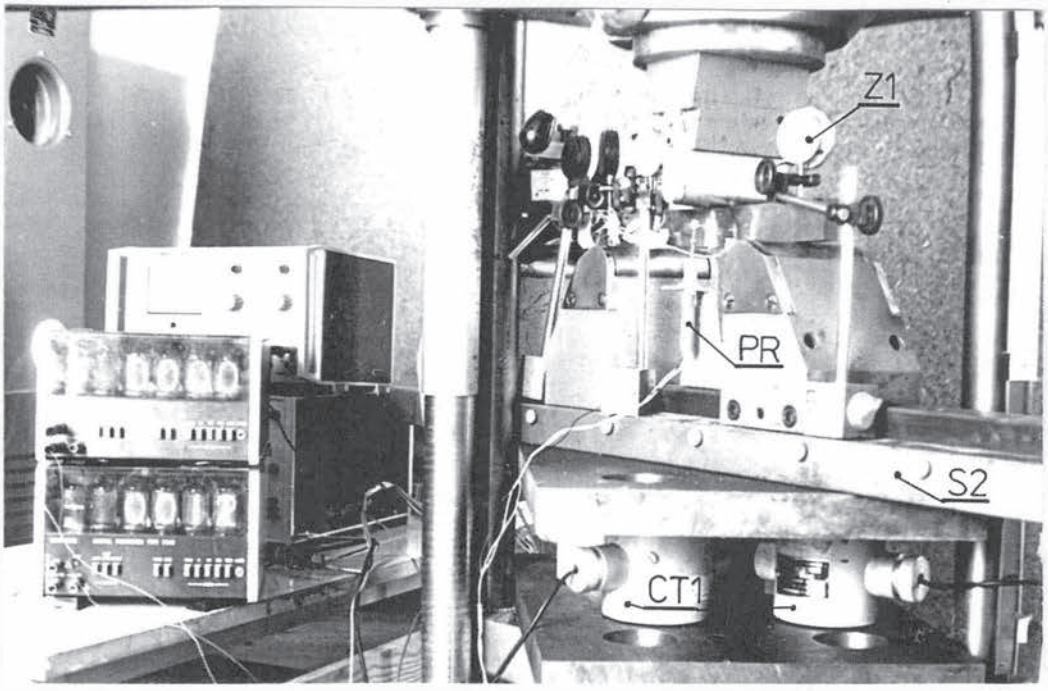
Obciążenie skalujące siłomierze CT realizowano w zakresie 0-1 t. Używano normalizowanych odważników. Zależność: wyjściowe napięcie - obciążenie była praktycznie liniowa. Jednakże stałe poszczególnych siłomierzy były zróżnicowane, mimo tego samego typu czujników. Proces skalowania pozwolił na pomiar siły z dokładnością ± 0,01 kN.

Specjalne stanowisko, skonstruowane do skalowania czujnika przemieszczeń, pozwoliło na uzyskanie dokładności skalowania ± 0,005 mm. Ograniczenie dokładności skalowania było wymuszone

a)



b)



Rys. 6. Stanowisko do badań belek dwuprzęsłowych (seria F-H):
a) widok z przodu, b) widok z tyłu

przez przyrząd skalujący - śrubę mikrometryczną. Charakterystyka czujnika była nieliniowa. Interpolowano ją wielomianami potęgowymi, których współczynniki stanowiły dane do komputerowego programu pomiaru odkształceń i przemieszczeń belek zginanych oraz wstępnego ich przetworzenia (patrz p. 4.3 pracy).

Belki jednoprzęsłowe H ustawiano na specjalnej podporze S1 (rys. 5). Wałki podporowe o średnicy 10 mm można było rozsuwać na żądaną odległość. Obciążenie wywierane stemplem maszyny wytrzymałościowej W typu ZD-20 mierzono za pośrednictwem siłomierzy CT1. Podziałka na zegarze maszyny wytrzymałościowej służyła jedynie do orientacyjnego ustawienia obciążenia.

Podporę belek dwuprzęsłowych S2 (rys. 6) stanowiła odpowiednio adaptowana podpora, stosowana w konwencjonalnych próbach udarnościowych. Adaptacja polegała na umocowaniu dodatkowego punktu podparcia belki w postaci siłomierza CT2 (rys. 6a) oraz umocowaniu czujnika indukcyjnego PR (rys. 6b).

4.2. Przygotowanie warstw optycznie czynnych i aparatura pomiarowa w badaniach fotomechanicznych

Powierzchnie badanych płaskowników obrobione były frezowaniem i szlifowaniem do stosunkowo małej chropowatości ze średnim odchyleniem profilu R_a=0,32 μm. Ściana boczna badanych płaskowników wymagała więc zmatowienia, po to aby zapobiec odblaskom światła w trakcie badania. Dokonano tego przez przetarcie powierzchni płaskowników drobnoziarnistym płótnem ściernym.

Warstwę fotomechaniczną odlewano z kompozytu na bazie żywicy epoksydowej Epidian 5 z dodatkiem styrenu jako plastyfikatora i utwardzacza Tecza, biorąc wagowo na 100% żywicy - 4% styrenu i 12% utwardzacza. Przygotowanie kompozytu wraz z obróbką termiczną i odpowietrzaniem przeprowadzono zgodnie z instrukcją [35].

Dno formy wykonano z wypoziomowanej płyty szklanej. Na warstwę oddzielającą zastosowano grubą folię z Estrafolu. Boki formy kształtowano z plasteliny. Po starannym wymieszaniu, wylewano kompozyt do formy, przestrzegając reżimu czasowego. Drobne pęcherzyki usuwano tuż po wylaniu za pomocą grubej igły. Górną powierzchnię formy stanowiła zmatowiona, oczyszczona acetonem

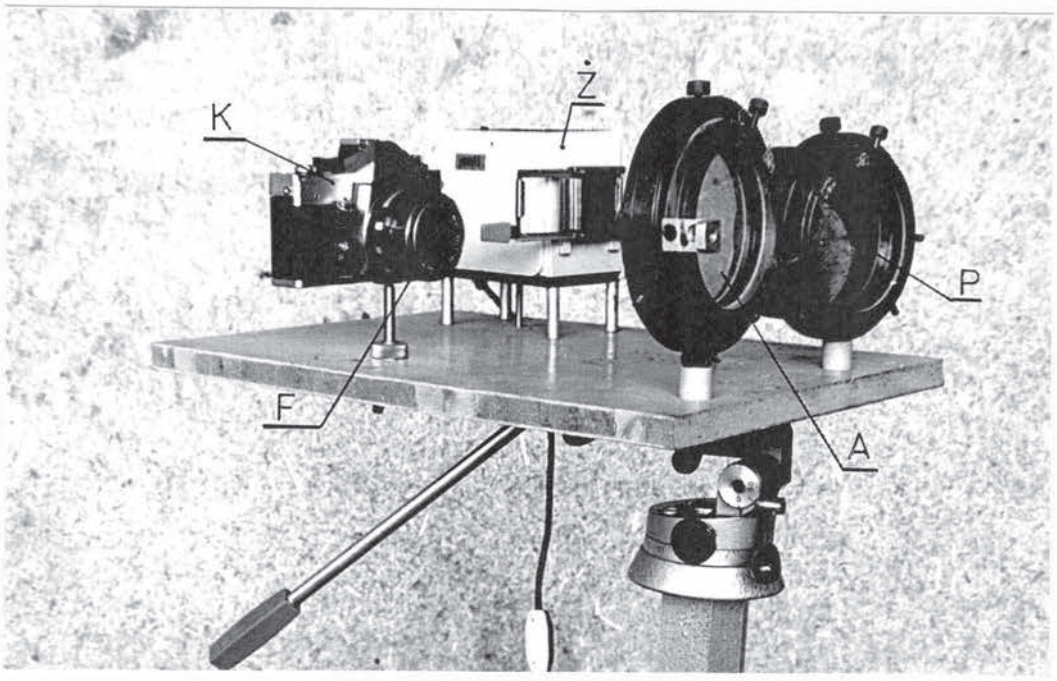
i wysuszona powierzchnia badanego elementu. Model bardzo ostrożnie opuszczano na wylany kompozyt.

Jednakową grubość warstwy: 2 mm uzyskano przez oparcie próbki na odpowiednio dobranych płytach szklanych. Utwardzanie żywicy prowadzono w temperaturze pokojowej przez około 36 godzin.

Obróbkę mechaniczną (obcięcie i wyrównanie brzegów płytki) wykonano ręcznie, tak aby warstwa optycznie czynna nie wykazywała wstępnych naprężeń, powstałych wskutek skrawania.

Metoda bezpośredniego odlewania warstwy optycznie czynnej na próbce pozwoliła uniknąć kłopotliwego klejenia i pozwoliła jednocześnie dostatecznie silnie związać warstwę z podłożem.

W badaniach użyto przenośnego polaryskopu odblaskowego, pokazanego na rys. 7.



Rys. 7. Widok polaryskopu użytego w badaniach

Polaryzator P oraz analizator A ustawiano tak, aby światło spolaryzować kołowo, przez co w warstwie optycznie czynnej uzyskiwano obrazy izochrom.

Na źródło światła Ż zastosowano żarówkę wolframowo-halogenową o mocy 150 W. Do rejestracji izochrom użyto aparatu fotograficznego K typu Praktica LLC z teleobiektywem. Stosowano standardowe błony fotograficzne ORWO NP22, a czas naświetlenia

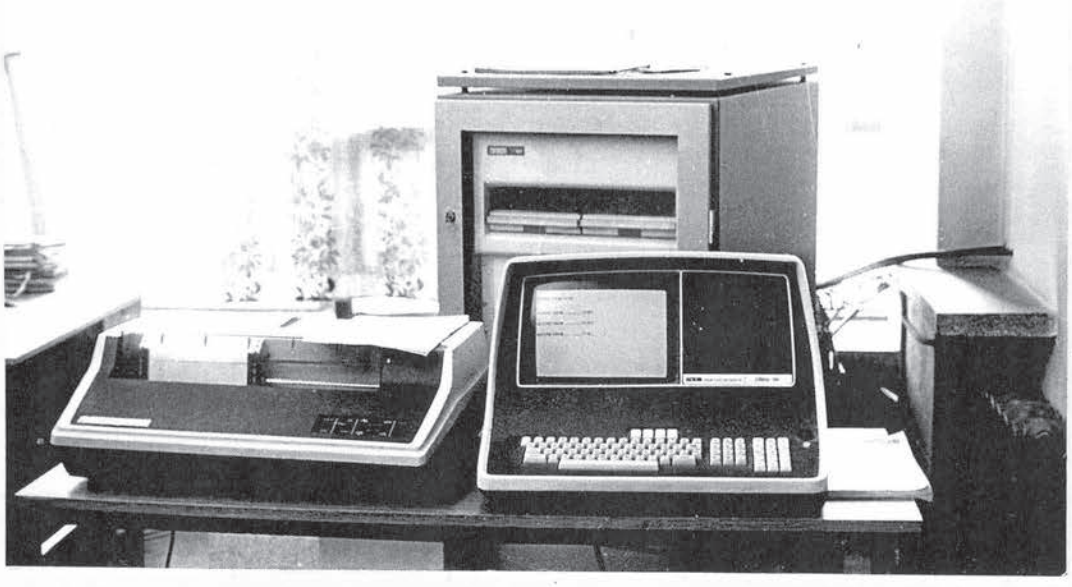
nie przekraczał kilku sekund. W trakcie wykonywania zdjęć czarno-białych na obiektyw F kamery nakładano filtr interferencyjny dla uzyskania światła monochromatycznego λ=447 nm.

4.3. Algorytm pomiarów odkształceń i przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych oraz obróbki wyników z wykorzystaniem EMC

Pomiary wielkości mechanicznych dotyczyły: przemieszczeń, odkształceń oraz sił. Należało opracować metodę, która umożliwiałaby jednoczesny odczyt stanu różnych wielkości w trakcie niestatecznego zachowania się elementu (płynięcia całej belki lub tylko niektórych jej obszarów).

Zagadnienie jednoczesności pomiarów rozwiązano przy użyciu EMC. Komputerowy proces pomiarów stosowano w odniesieniu do czujników o wyjściu napięciowym. Zegarowe czujniki przemieszczeń stosowano tylko do zwielokrotnienia wiadomości o badanych modelach.

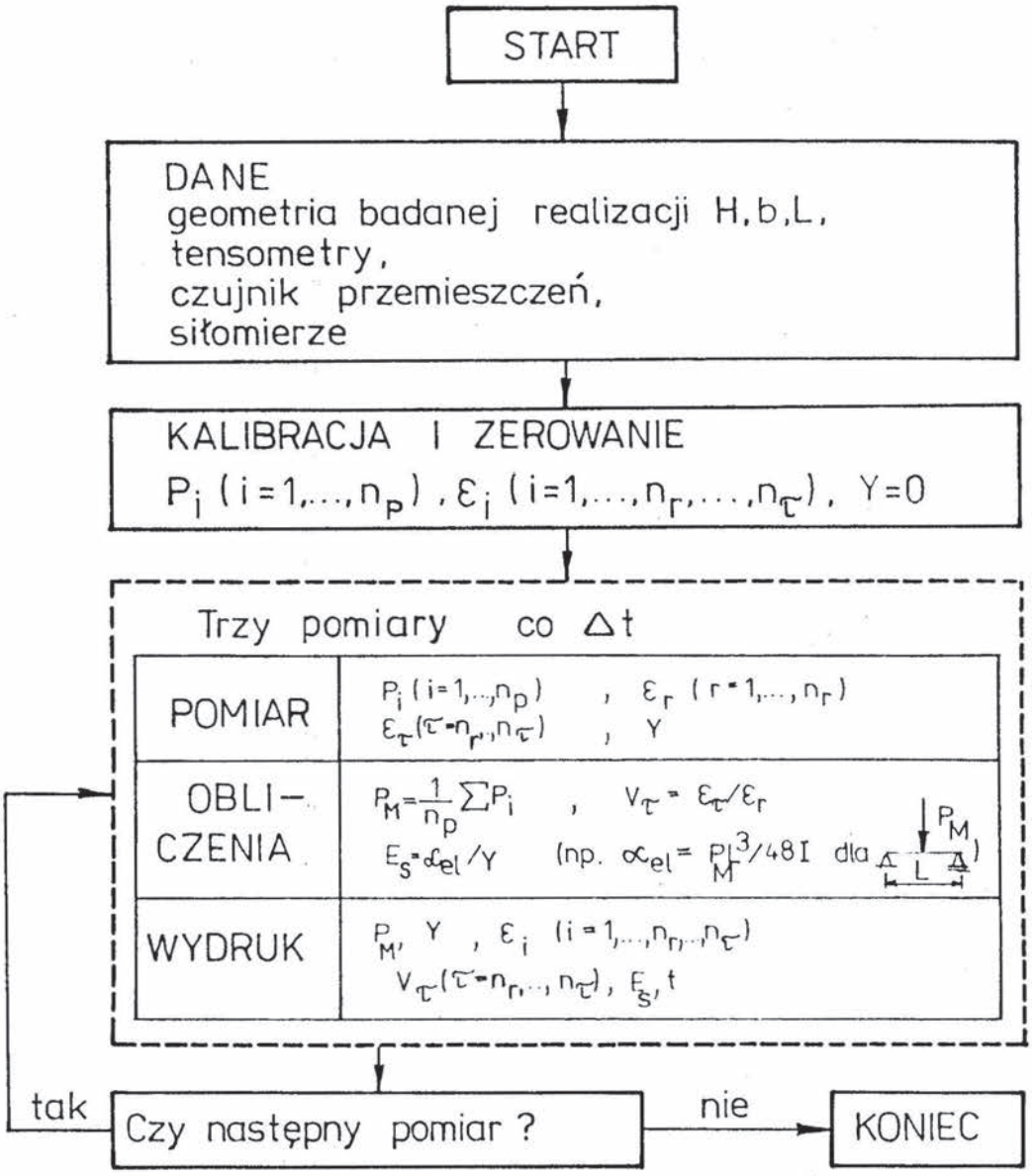
Wykorzystano zintegrowany system pomiarowy SOLARTRON, pokazany na rys. 8.



Rys. 8. Zintegrowany system pomiarowy SOLARTRON

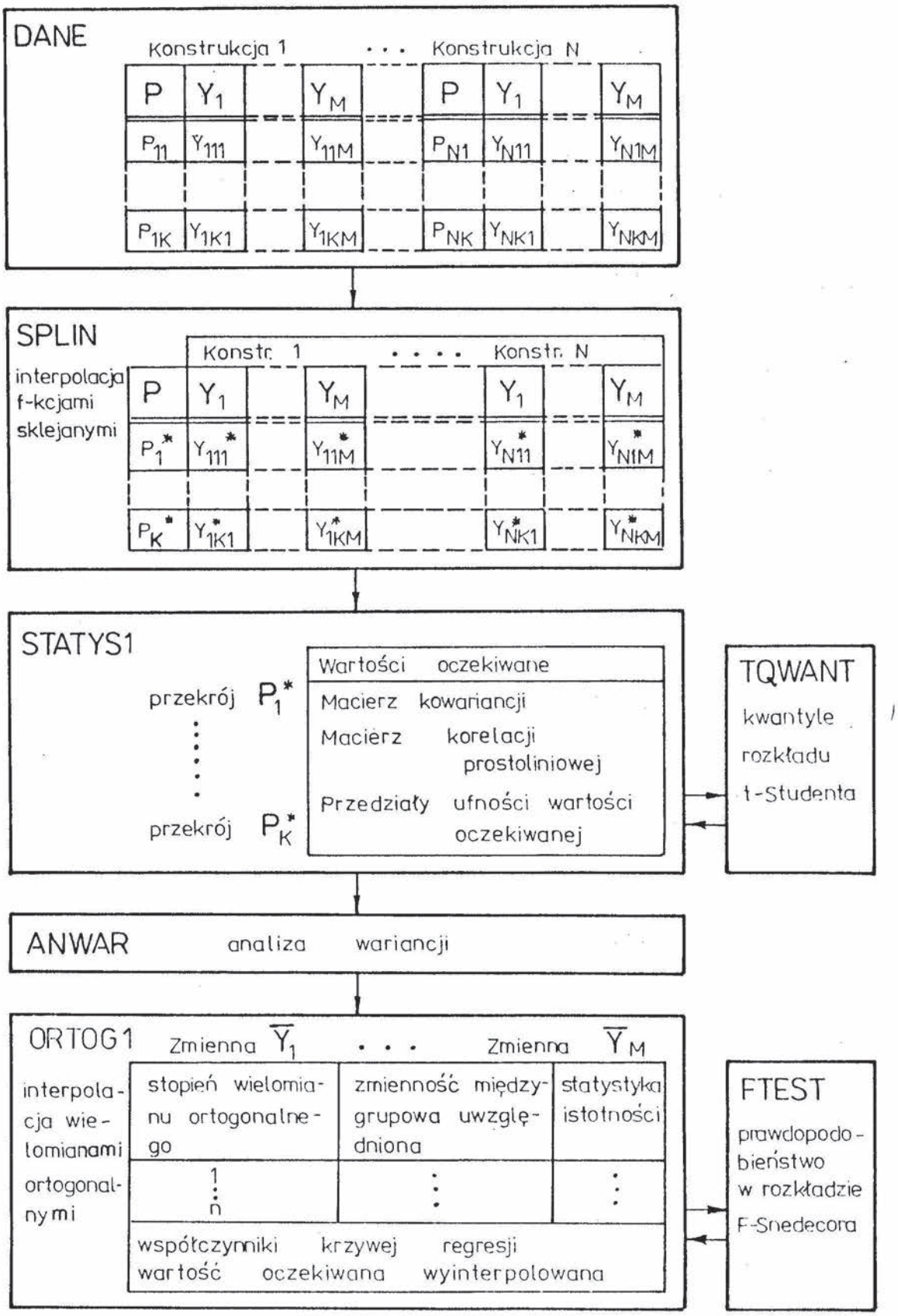
Pomiary statyczne odkształceń na kilkudziesięciu kanałach tensometrycznych dokonywano w ciągu paru sekund, natomiast na kanałach napięciowych w ciągu dziesiątych części sekundy. System umożliwił pomiar czasu z dokładnością do 0,1 s.

Na rys. 9 pokazano schemat blokowy, opracowanego przez autora, programu „GRAZKA'LCH". Program służył do pomiaru obciążeń P_i na n_p siłomierzach, odkształceń ε_i na n_τ tensometrach oraz przemieszczenia Y czujnikiem przemieszczeń. Na danym poziomie obciążenia wykonywano trzy pomiary co $\Delta t = 20{,}0 \pm 0{,}1$ s.



Rys. 9. Schemat blokowy programu „GRAZKA'LCH"

Na podstawie bezpośrednich wyników pomiarów określano: całkowitą siłę obciążającą model P_{II}, empiryczny moduł odkształcalności belki E_s oraz współczynniki odkształcalności poprzecznej V_τ.



Rys. 10. Schemat blokowy programu „STATYS1'LCH" do opracowania wyników pomiaru wielowymiarowego procesu stochastycznego

Opracowanie wyników pomiaru stanu belek przeprowadzono w oparciu o program „STATYS1'LCH" (rys. 10). Idea zastosowania programu wynikła z braku możliwości realizacji dyskretnego obciążenia na prasie wytrzymałościowej. Rzeczywiste obciążenie mierzone siłomierzami różniło się od nominalnego, ustawianego na prasie. Dla porównania wyników badań belek z jednej serii konieczna więc była interpolacja między punktami pomiarowymi. Zastosowano interpolację realizacji danej wielkości funkcjami sklejanymi (procedura SPLIN1). Wtedy zdecydowano się na dalszą numeryczną obróbkę statystyczną przekrojów procesu dla ustalonego obciążenia. Odpowiedź belki potraktowano jako wielowymiarowy proces stochastyczny, w którym argumentami losowymi Y_i były: przemieszczenie oraz odkształcenia belki w czterech punktach, natomiast parametrem nielosowym - obciążenie. Przewidziano możliwość interpolacji trendów procesów brzegowych wielomianami ortogonalnymi na zbiorze punktów. Wyrazy aproksymacji uwzględniane są tak długo, dopóki powodują statystycznie istotne (określone testami F-Snedecora) zmniejszenie zmienności punktów empirycznych względem krzywej regresji.

Program „STATYS1'LCH" można stosować do obróbki wyników pomiarów dowolnych wielkości.

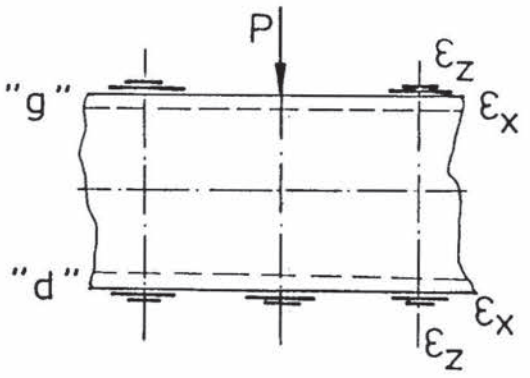
5. Systematyczne błędy pomiarów

5.1. Obliczenie zaburzeń czasowo-brzegowych oraz stałej pokrycia optycznie czynnego

Przedstawione w literaturze metody określania stałej pokrycia optycznie czynnego [23] dostosowane są do cechowania pokrycia pojedynczego modelu lub milcząco zakładają niezmienność tej stałej dla kilku modeli. Tymczasem w przeprowadzonym eksperymencie zaobserwowano, że stała pokrycia ma inną wartość dla każdego badanego modelu, mimo iż pokrycie wykonywane było w analogicznych warunkach. Stwierdzono więc konieczność określania stałej bezpośrednio na badanym elemencie równolegle z pomiarami zasadniczymi.

Widoczne na rys. 12 i 13 (p. 6 pracy) różnice izochrom na górnej i dolnej krawędzi belki wynikają przede wszystkim z efektu czasowo-brzegowego. Pochodzenie tego efektu opisano np. w pracy [23], podając jednocześnie sposoby oceny wywołanych zaburzeń. Przedstawimy inny sposób oceny efektu czasowo-brzegowego, nie wymagający kompensacji izochrom resztkowych na modelu nieobciążonym.

W eksperymencie tensometry elektrooporowe pozwoliły na pomiar odkształcenia podłużnego ε_x oraz poprzecznego ε_z na dolnej „d" i górnej „g" swobodnej powierzchni elementu (rys. 11). Załóżmy, że efekt czasowo-brzegowy jest jednakowy na obu krawędziach elementu. Różnica odkształceń głównych na krawędzi wynosi $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_x - \varepsilon_z$.



Rys. 11. Cechowanie pokrycia

Niechaj F_g oraz F_d będzie wartością izochromy zmierzoną wraz z zaburzeniem brzegowym Δ, odpowiednio na górnej i dolnej krawędzi. Mamy: $(\varepsilon_x - \varepsilon_z)_d = f \cdot (F_d - \Delta)$, $(\varepsilon_z - \varepsilon_x)_g = f \cdot (F_g + \Delta)$. Stąd

$$\Delta = \frac{(\varepsilon_z - \varepsilon_x)_g F_d - (\varepsilon_x - \varepsilon_z)_d F_g}{(\varepsilon_z - \varepsilon_x)_g + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)_d},$$

$$f = \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_z)_d + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)_g}{F_d + F_g}. \qquad (1)$$

Wyniki badań fotomechanicznych, przedstawione w pracy, opracowano przy użyciu zaburzenia brzegowego Δ i stałej pokrycia f, obliczonych z powyższej formuły.

5.2. Oszacowanie sztywności sprężystej belki

Zdefiniujmy umowny sprężysty opór przeciwko czystemu zginaniu, korzystając z fizycznego prawa Hooka i hipotezy Bernoulliego

$$(EW_o)_I = \varepsilon_x \cdot M, \qquad (2a)$$

gdzie M jest równy zewnętrznemu momentowi zginającemu, a ε_x jest sprężystym odkształceniem włókna skrajnego belki. Odkształcenie ε_x mierzono w eksperymencie tensometrami podłużnymi w różnych punktach belki. Przy większości poziomów obciążenia były to odkształcenia czysto sprężyste. Odpowiadający moment oceniano z formuły M=Px/2, gdzie P jest obciążeniem całkowitym, a x odległością tensometru od podpory. Integralną sztywność (2a) szacowano jako średnią arytmetyczną z 50 pomiarów dla jednej belki (10 poziomów obciążenia po 5 tensometrów).

Sztywność integralną (2a) porównano ze sztywnością teoretyczną

$$(EI_o)_T = (EW_o)_T \cdot \frac{H}{2},$$

którą oceniano na podstawie wymiarów geometrycznych przekroju oraz modułu Younga z badań materiałowych. Do obliczenia sztywności teoretycznej brano wymiary geometryczne przekroju środkowego belek oraz średni arytmetyczny moduł Younga z rozciągania i ściskania.

Uzyskano systematyczne zwiększenie sztywności integralnej w stosunku do sztywności teoretycznej. Różnica ta wynosiła około 2% i była nieco większa dla mniejszych smukłości belki. Ten błąd systematyczny doświadczenia uwzględniono przy obliczaniu sztywności sprężystych ze związków:

$$E_o W = 1{,}02\,(E_o W)_T\,, \qquad E_o I = E_o W \cdot H{:}2, \tag{2b}$$

które traktowano jako wielkości porównawcze.

5.3. Oszacowanie nośności plastycznej przekroju

Plastyczna nośność teoretyczna przekroju na zginanie wynosi

$$\bar{\bar{M}}_T = R \cdot \bar{\bar{W}}, \tag{2c}$$

gdzie: $\bar{\bar{W}} = bH^2/4$ jest wskaźnikiem plastycznego oporu przekroju prostokątnego przeciwko czystemu zginaniu.

Nośność (2c) dotyczy idealnie plastycznego przekroju belki wykonanej z materiału Prandtla. Odpowiada to złączeniu górnego i dolnego frontu plastycznego belki. Dla konstrukcji rzeczywistej należy więc przyjmować R równe dolnej granicy plastyczności, odczytanej ze statycznej ścieżki równowagi.

Pomiary stanu belek wykonywano w 60 s (fotografie izochrom w 40 s) po przyłożeniu obciążenia.

Przeprowadzono własną ocenę wpływu czasu na przemieszczenia, która okazała się zgodna z oszacowaniami Burtha i in. [16]. W badaniach stwierdzono znaczny wpływ prędkości obciążania przy zbliżaniu się do danego poziomu obciążenia. Dlatego starano się wywoływać możliwie małą lecz stałą prędkość w momencie zwiększania obciążenia. Prędkość tę w drodze eksperymentu tak dobrano, aby można było szacować moment plastyczny z iloczynu

$$\bar{\bar{M}} = 1{,}04\,\bar{\bar{M}}_T \tag{2d}$$

gdzie: $\bar{\bar{M}}$ traktowano jako wielkość porównawczą, do której odnoszono wszystkie wyniki pomiarów przedstawione w pracy.

6. Bezpośrednie obrazy izochrom

Badane modele poddawano obciążeniu P od zera do obciążenia niszczącego warstwę optycznie czynną. Zdjęcia izochrom wykonywano dla około dwudziestu poziomów obciążenia jednej belki w 40 s po przyłożeniu obciążenia. Pełny fotograficzny dziennik pomiarów izochrom zawiera około 900 fotografii.

Na rys. 12 i rys. 13 pokazano fragment tego dziennika. Fotografie obrazują przebieg izochrom całkowitych w modelach belek jednoprzęsłowych przy kolejnych poziomach obciążenia. Przedstawiono realizację izochrom w belkach o smukłościach L:H=4 oraz L:H=10.

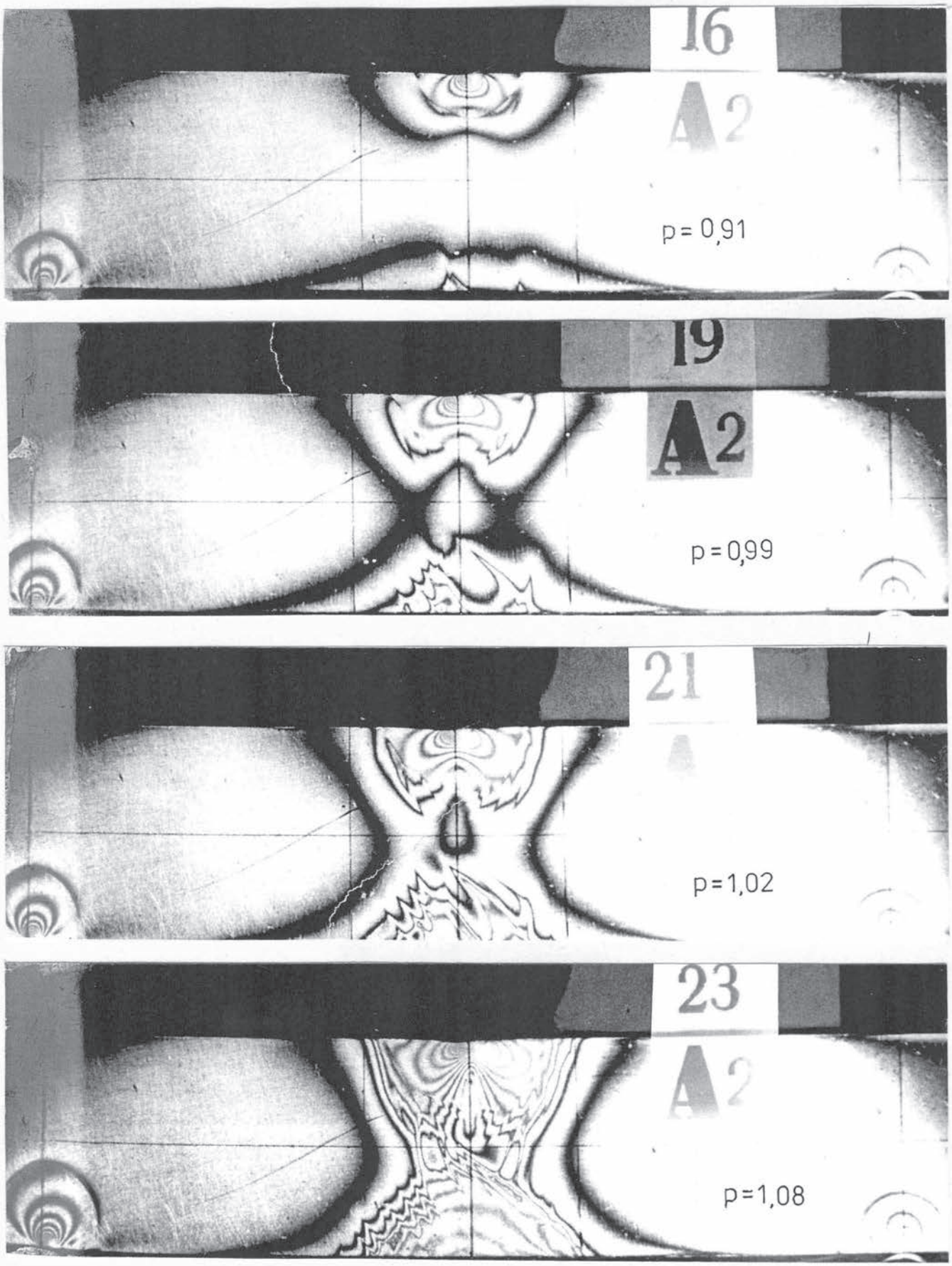
Poziom obciążenia scharakteryzowano stosunkiem $p=P:P_{pl}$, gdzie P_{pl} jest granicznym obciążeniem plastycznym obserwowanym w eksperymencie, powodującym złączenie dolnego i górnego frontu plastycznego.

Na rys. 14a pokazano widok aksonometryczny powierzchni izochrom dla belki B1 (L/H=6) poddanej obciążeniu P=38,6 kN (około 0,97 obciążenia plastycznego), a na rys. 14b,c - przekroje tej powierzchni.

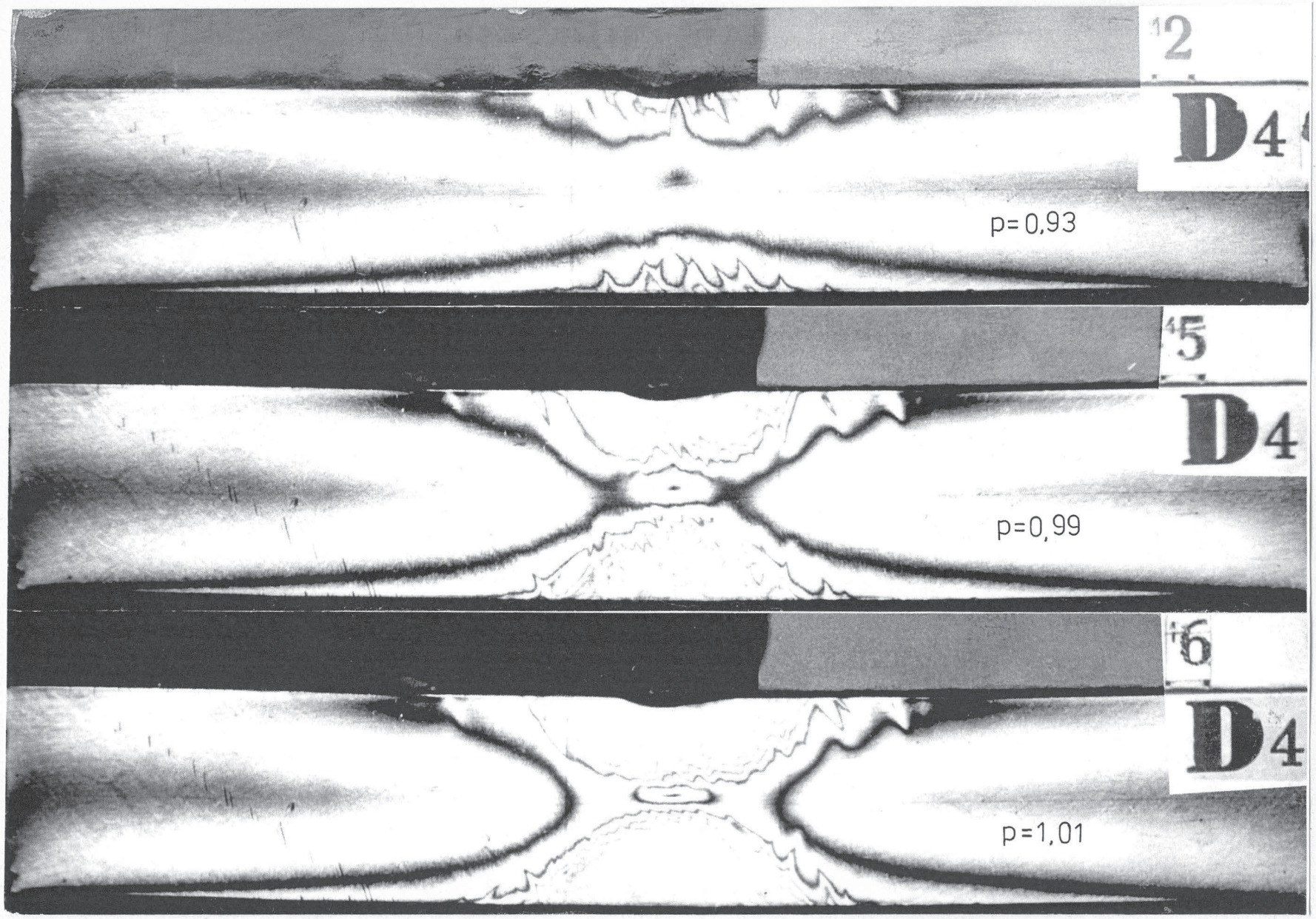
Powierzchnia izochrom ma jakościowo podobny kształt niezależnie od smukłości belki.

Zwraca uwagę fakt, że na frontach plastycznych izochromy nie są gładkie. Ostre załamania frontów izochrom dotyczą obszarów plastycznych, które graniczą ze strefami sprężystymi. Zjawisko to związane jest więc, z przejściem punktu ciała ze stanu sprężystego w stan plastyczny, ale ze względu na współdziałanie krystalitów obserwowane jest również w dalszym obszarze plastycznym.

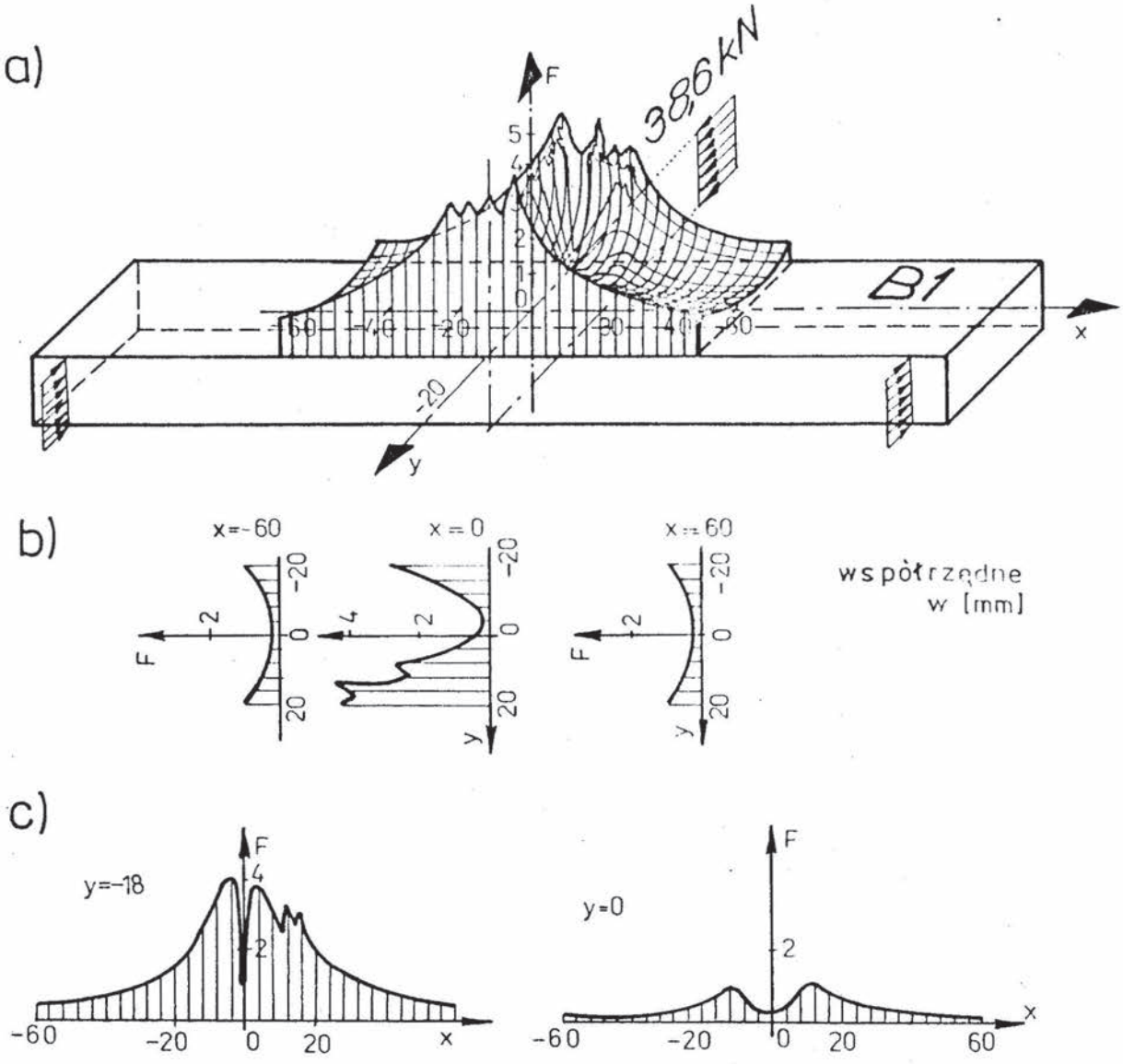
Obserwuje się niejednorodny stan płynięcia nawet po pełnym uplastycznieniu przekroju krytycznego. Stan ten ma przy tym tendencję do stabilizacji. Bez zmniejszania obciążenia zewnętrznego następuje zmniejszenie prędkości płynięcia plastycznego cząstek materiału belki. Okres stabilizacji jest jednak bardzo długi, najprawdopodobniej rzędu kilkudziesięciu dni. Wyjaśnienie poznawcze zaobserwowanego zjawiska możliwe jest na gruncie teorii dyslokacji.



Rys. 12. Fotografie izochrom w belce serii A (L:H=4)



Rys. 13. Fotografie izochrom w belce serii D (L:H=10)



Rys. 14. Realizacja pola izochrom w belce obciążonej siłą skupioną:

a/ widok aksonometryczny,
b/ przekroje poprzeczne,
c/ przekroje podłużne.

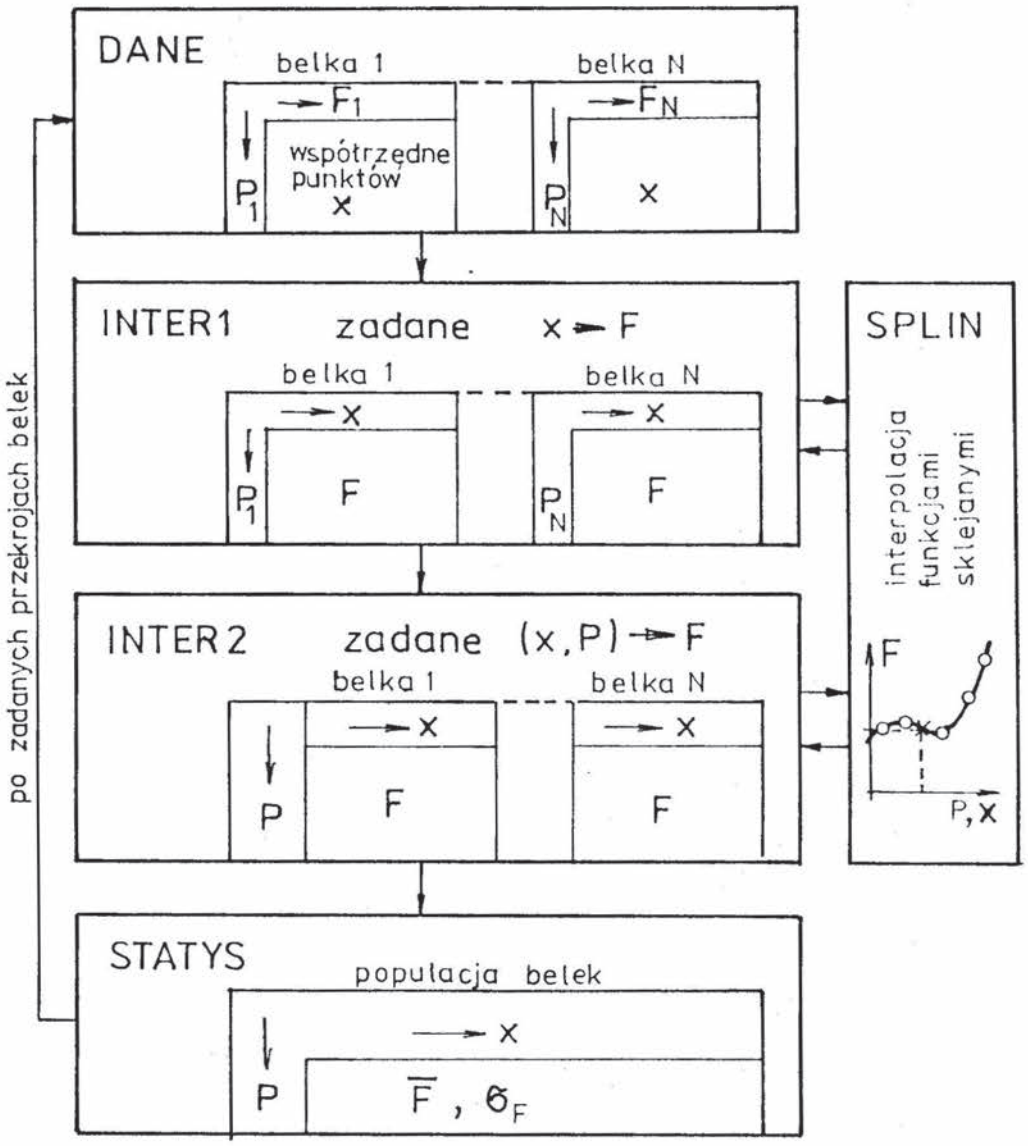
7. Kompensacja numeryczna obrazów izochrom

Wnioski ilościowe z badań fotomechanicznych można wyciągnąć tylko w przypadku wyznaczenia ułamkowych rzędów izochrom, czyli po zastosowaniu kompensacji.

W pracy stosowano polaryskop, który nie dawał możliwości kompensacji w trakcie badań. Jednakże nawet gdyby możliwość taka istniała, to kompensacja dokonywana w sposób tradycyjny byłaby czasochłonna, kosztowna ze względu na konieczność rejestracji fotograficznej i możliwa do praktycznego zastosowania tylko dla pojedynczych modeli, a nawet pojedynczych obciążeń. Tylko najnowocześniejsze polaryskopy, sprzężone z komputerem i z automatycznym zapisem, umożliwiłyby praktycznie kompensację w trakcie badań statystycznych.

Opracowano przybliżony sposób kompensacji przy użyciu EMC (program „IZOCH1'LCH" - rys. 15). Zaletą opracowanego przez autora, komputerowego programu kompensacji izochrom jest możliwość automatycznego, statystycznego opracowania wyników pomiarów. Rząd izochromy potraktowano jako proces stochastyczny, będący losową funkcją trzech zmiennych nielosowych: obciążenia i dwóch współrzędnych punktu. Obliczenia według programu „IZOCH1'LCH" wykonywane są dla jednego przekroju pionowego belek. Jako dane wczytuje się współrzędne punktów, które odpowiadają izochromom całkowitym przy poszczególnych poziomach obciążenia. Zarówno te współrzędne jak i obciążenia są w ogólności różne dla poszczególnych belek. Dlatego interpolacja przebiega w dwóch etapach: w procedurze INTER1 ustala się ułamkowe izochromy dla danej współrzędnej x wspólnej dla wszystkich belek-bez zmiany obciążenia; w procedurze INTER2 oblicza się natomiast izochromy dla obciążeń wspólnych dla wszystkich belek. W rezultacie otrzymuje się realizacje izochrom w funkcji obciążenia. W procedurze STATYS oblicza się dwie podstawowe statystyki: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe σ_F w próbie dla każdej współrzędnej i każdego obciążenia.

Przykładowe wyniki uzyskane w programie „IZOCH1'LCH" podano w p. 8 pracy dla belek serii C.



Rys. 15. Schemat blokowy programu „IZOCH1'LCH"

8. Oszacowanie plastycznej nośności granicznej belki na podstawie rzędu izochromy

W pracy [16] stwierdzono, że uplastycznienie punktu ciała odpowiada początkowi nieliniowości rzędu izochromy w funkcji obciążenia. Przeprowadzone przez autora badania eksperymentalne wykazały, że twierdzenie powyższe nie jest ścisłe.

Zgodnie z hipotezą Treski-Guesta uplastycznienie punktu ciała następuje, gdy izochroma osiąga ustaloną wartość graniczną F_{gr}. Dowolny punkt ciała z jednorodnymi stałymi materiałowymi uplastyczni się więc przy tej samej różnicy odkształceń głównych.

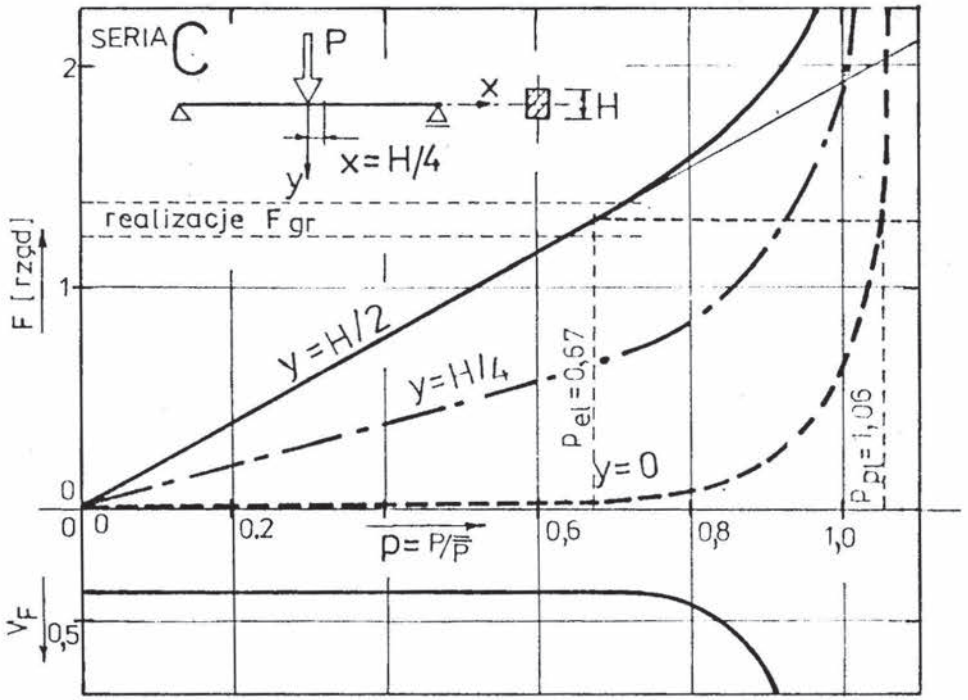
Na rys. 16 przedstawiono wybrane wyniki kompensacji obliczone programem „IZOCH1'LCH" (p.7) z uwzględnieniem zaburzeń brzegowych. Obciążenie względne $p=P:\bar{\bar{P}}$ odnoszono do $\bar{\bar{P}}=4\bar{\bar{n}}:L$. Parametry statystyczne izochrom obliczano przy użyciu wag, określonych jako stosunek realizacji stałej pokrycia do średniej stałej pokrycia z serii belek.

Z zestawionych na rys. 16 zależności rzędu izochromy F od względnego obciążenia oczekiwanego $P/\bar{\bar{P}}$ wynika, że początek nieliniowości ($p \rightarrow F$) odpowiada uplastycznieniu tylko swobodnych punktów belki. Punkty swobodne położone są na górnej i dolnej krawędzi wolnej od obciążeń powierzchniowych, a inne punkty są nieswobodne.

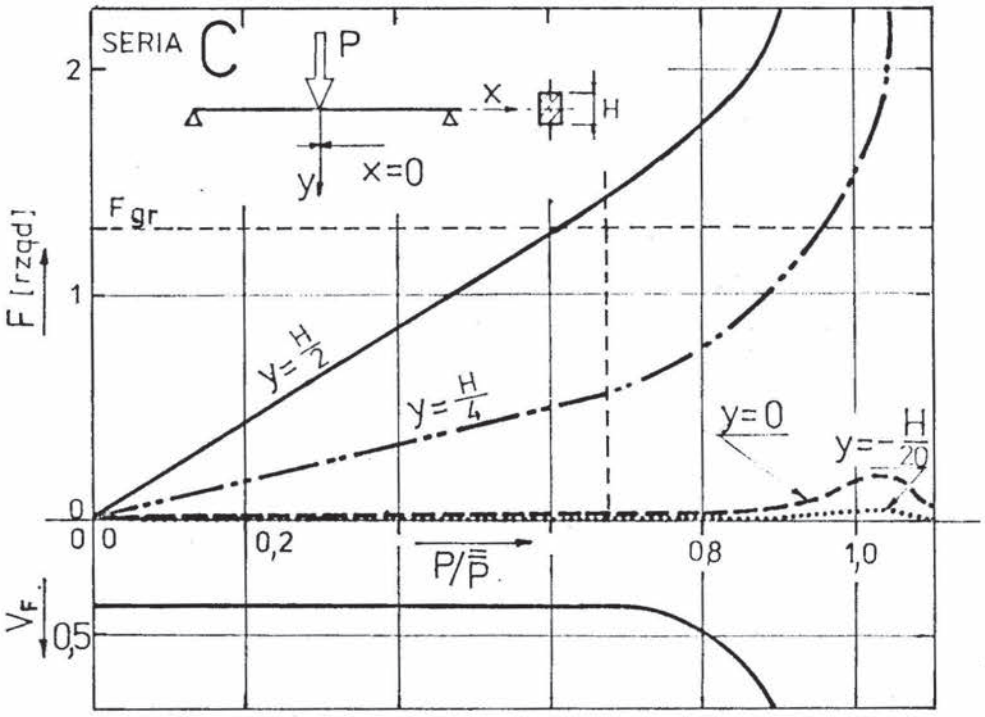
Dla nieswobodnie odkształcalnych punktów belki początek nieliniowości zależności ($p \rightarrow F$) nie odpowiada uplastycznieniu. Współpraca z punktami plastycznymi powoduje, że punkty sprężyste zachowują się nieliniowo.

Charakterystyczny jest duży wzrost statystycznego rozproszenia izochrom przy zbliżaniu się do granicznego stanu plastycznego belki. Obserwuje się brak pełnego uplastycznienia przekroju pod siłą skupioną (rys. 16b).

a)



b)



Rys. 16. Zależność rzędu izochromy F od obciążenia w serii belek C (L/H=8): a) w przekroju x=H/4, b) w przekroju x=0.

9. Doświadczalne określenie kształtów oraz propagacji stref plastycznych

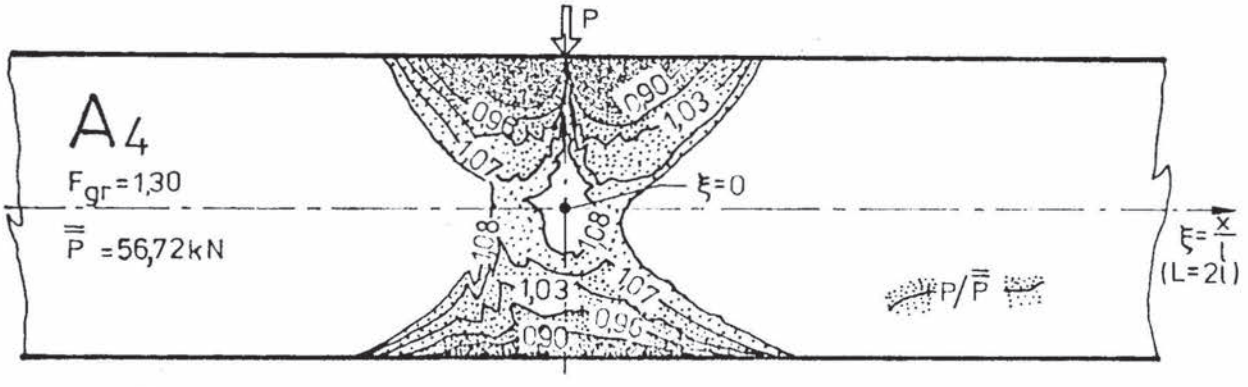
Front plastyczny można odczytywać bezpośrednio z obrazów izochrom, ponieważ uplastycznienie punktu ciała podlegającego prawu Treski określone jest przez graniczną izochromę plastyczną. Wartości graniczne izochrom szacowano w sposób pokazany w poprzednim punkcie pracy.

Na rys. 17 pokazano realizacje typowych kształtów oraz propagację frontów plastycznych w belkach jednoprzęsłowych. Oznaczono fronty plastyczne powstałe przy różnych poziomach obciążenia $P/\bar{\bar{P}}=M\,(\xi=0)/\bar{\bar{M}}$.

Interesujący jest rdzeń sprężysty, pozostający pod siłą skupioną. Nie obserwuje się pełnego uplastycznienia przekrojów w miejscach przyłożenia siły nawet przy obciążeniu znacznie przekraczającym plastyczną nośność graniczną belki. Powstają dwa przeguby plastyczne nieco oddalone od siły skupionej. Odległość tych przegubów od siły oszacowano w p. 11 pracy.

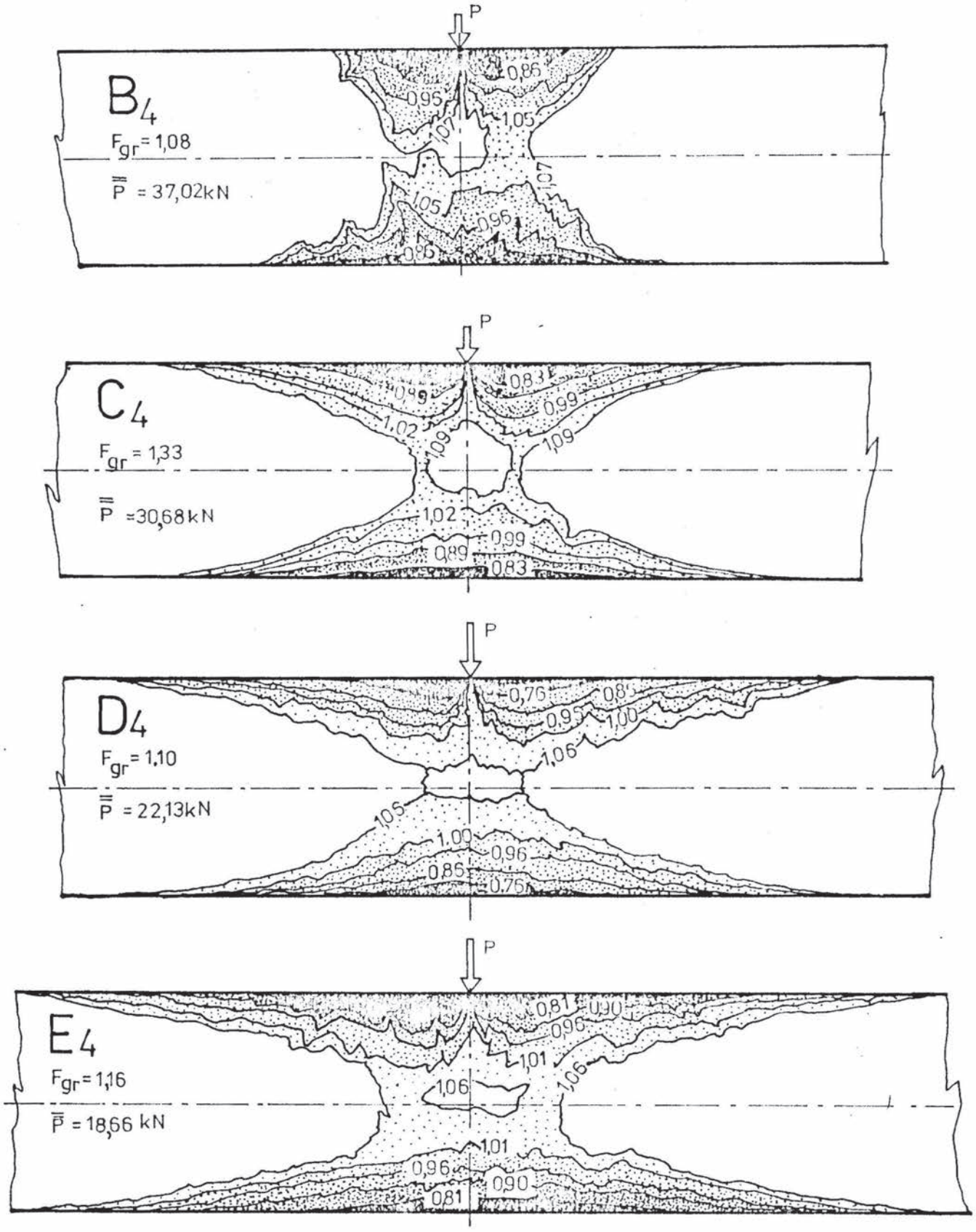
Wykazany mechanizm zniszczenia belek można wykorzystać do zwiększenia granicznej nośności plastycznej belek.

Realizacje frontów plastycznych mają kształt nieregularny, wynikający z niejednorodności materiału. Rys. 18a wskazuje, że niejednorodności materiału mają typowo losowy charakter, związany z losowym kształtem i rozmieszczeniem krystalitów. Jeśli rozpatrujemy zbiór realizacji frontów plastycznych, to trend frontu ulega wygładzeniu. Pokazany przykład wskazuje ponadto, że rozproszenie losowe frontu plastycznego maleje wraz z oddalaniem się od siły skupionej, czyli wraz ze zmniejszaniem się wytężenia przekroju.



Rys. 17.*) Typowe realizacje kształtu frontu plastycznego

*) cigg dalszy na stronie następnej



Rys. 17 cd. Typowe realizacje frontów plastycznych

10. Oszacowanie trendu frontu plastycznego

Próby aproksymacji trendu frontu plastycznego przedstawiono na rys. 18b. Rozpatrzono serię belek C poddanych działaniu 0,94 obciążenia P_{pl}, powodującego złączenie górnego i dolnego frontu plastycznego.

Front górny i dolny można opisać wielomianowymi krzywymi regresji 1 i 2, których postać podano w tab. 4. Krzywe te obliczono przy użyciu programu „STATYS1'LCH" (p.4.3 pracy), przez interpolację wielomianami ortogonalnymi na zbiorze wszystkich punktów empirycznych pokazanych na rys. 18a. W kolumnie trzeciej tab. 4 podano procent całkowitej zmienności międzyklasowej (między wartościami C:H dla danej współrzędnej ξ) uwzględnionej przez wielomian odpowiedniego stopnia.

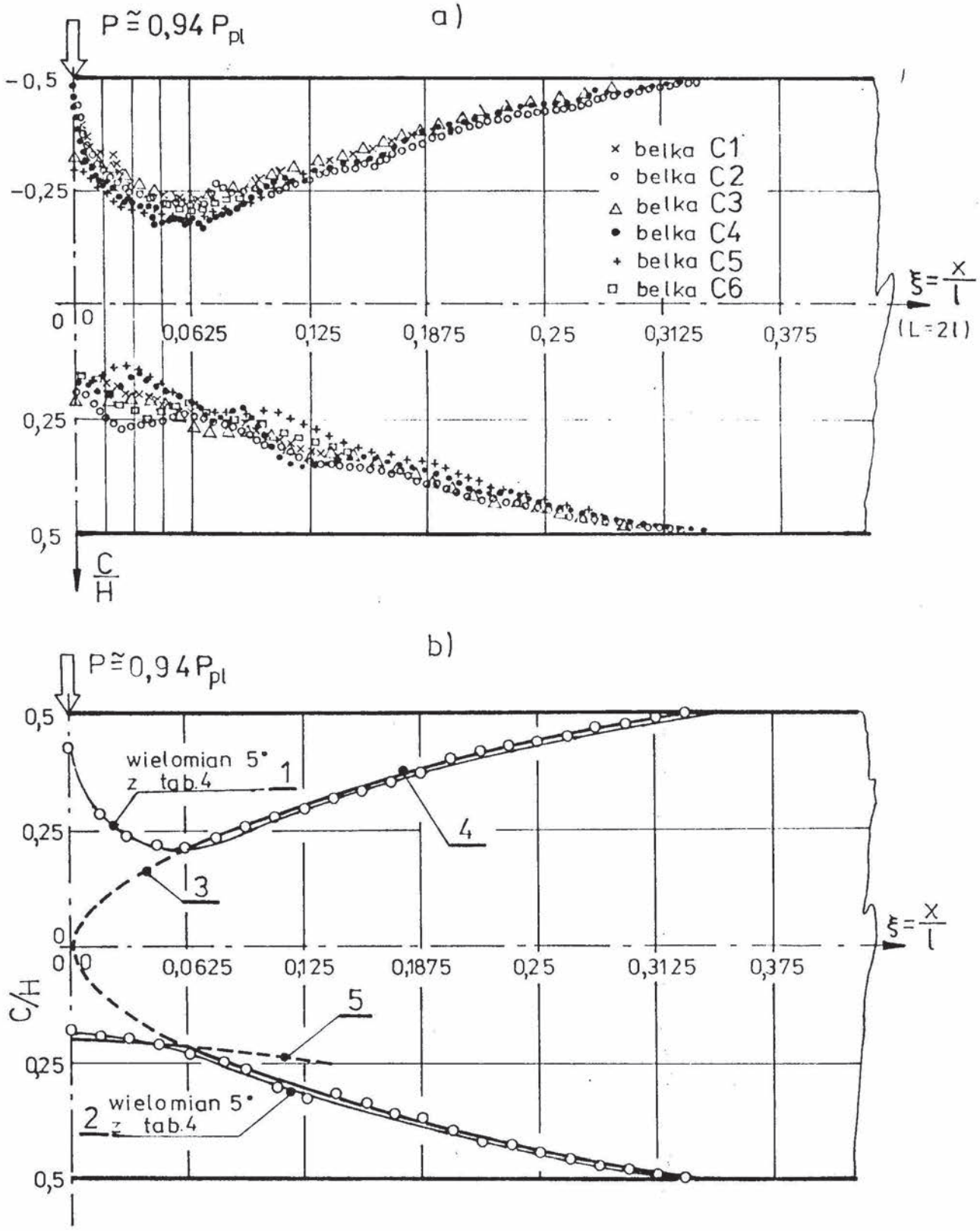
Tab. 4. Krzywe regresji frontu plastycznego (rys. 18) w postaci wielomianów ortogonalnych

krzywa	Stopień wielom.	Zmienność uwzględ. [% zm. c.]	Współczynnik a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1 FRONT GÓRNY	1	67,12	0,964889	-0,726543				
	2	+ 11,96	3,37941	-6,55810	3,46914			
	3	+ 15,01	-22,9249	89,2468	-111,812	45,8388		
	4	+ 4,60	120,940	-611,290	1159,41	-973,096	304,413	
	5	+ 0,80	-474,941	3020,47	-7652,16	9665,69	-6087,83	1529,17
2 FRONT DOLNY	$\frac{C}{H} = a_0 + a_1 m(\xi) + a_2 m^2(\xi) + a_3 m^3(\xi) + a_4 m^4(\xi) + a_5 m^5(\xi)$, $m(\xi) = 1 - \xi$							
	1	98,85	1,198478	-1,018690				
	2	+ 0,39	0,696999	0,198225	-0,727874			
	3	+ 0,25	-3,18779	14,3806	-17,8377	6,82259		
	4 *)	+ 0,12	23,3453	-114,926	217,017	-181,604	56,3519	
	5 *)	+ 0,07	-179,688	1122,63	-2785,90	3444,40	-2122,56	521,310

*) Wielomiany uwzgledniają składniki statystycznie nieistotne na poziomie istotności 0,05 w swietle testu F-Snedecora

Krzywe 1 i 2 (rys. 18b i tab.4) nie mają charakteru uniwersalnego i próby ich przetransponowania na inne poziomy obciążenia zawodzą zupełnie. Dzieje się tak za przyczyną odcinków frontów plastycznych powstałych blisko siły skupionej. Uniwersalną krzywą regresji można otrzymać dla frontu oddalonego od siły zewnętrznej.

Uwzględnijmy realizacje punktów frontu z rys. 18a, odległych od osi obciążenia więcej niż 1/4 wysokości belki.



Rys. 18. Fronty plastyczne w belkach serii C pod obciążeniem $P = 0{,}94\ P_{pl}$: a) realizacje frontów plastycznych, b) trend frontu oraz jego aproksymacje krzywymi regresji

Na rys. 18a punktów takich jest 112. Jeśli przyjmiemy krzywą regresji w postaci funkcji pierwiastkowej, to po zastosowaniu metody minimów kwadratów, otrzymamy ją w postaci 3 (rys. 18b i tab. 5).

Okazuje się, że krzywa 3 jest niemalże identyczna z teoretycznym równaniem 4 frontu plastycznego uzys-kanym dla prostego zginania belki (czyli bez uwzględnienia sił stycznych). Zaskakujące jest to, że równanie teoretyczne odpowiada granicznemu teoretycznemu obciążeniu plastycznemu. Tymczasem faktycznie nośność plastyczna belki nie jest jeszcze wyczerpana. Belka posiada więc nośność wyższą niżby to wynikało z teorii nie uwzględniającej naprężeń stycznych.

Współczynniki korelacji (tab. 5) krzywych 3 i 4 z punktami pomiarowymi wskazują na dobrą aproksymację frontu rzeczywistego. Odpowiednie testy statystyczne wskazują, że dla sześciu realizacji eksperymentu różnica między obiema krzywymi jest statystycznie nieistotna.

Tab. 5. Pierwiastkowe krzywe regresji frontu plastycznego z rys.18.

Nr krzywej	Zakres ważności	Równanie C/H	Oznaczenia	Wsp. korelacji
3	$\lvert\xi\rvert > 0{,}0625$	$\frac{C}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1{,}015 - 1\,018\, m(\xi)}$	$m(\xi) = m_0 \cdot (1 - \xi)$	0,970
4	$\frac{C}{H} < 0{,}5$	teoretyczne $\frac{C}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - m(\xi)}$	$\boxed{m_0 = 1}$	0,958
5	$\lvert\xi\rvert < 0{,}0625$ front dolny	"teoretyczne" $\frac{C}{H} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - m_1(\xi)}$	$m_1(\xi) = m_1 \cdot (1 - \xi^2)$ $m_1 = m_0\left(1 - \frac{(0{,}5H + C)}{3l}\right)$	0,890

W równaniu 4 funkcja $m(\xi)$ opisuje względne momenty zginające, wywołane zewnętrznym obciążeniem skupionym. Współczynnik m_0 określa poziom wytężenia momentem zginającym przekroju pod siłą skupioną.

Równanie 4 po modyfikacji może służyć do opisania kształtu frontu plastycznego, powstałego pod obciążeniem $P > \bar{P}$. Wystarczy przesunąć oś współrzędnych ξ w prawo i zaczepić jej początek w punkcie, gdzie sprawcze działanie naprężeń σ_y jest niewielkie. W przypadku obciążenia siłą skupioną ekwiwalentnie można przyjąć

za m_o wytężenie przekroju belki w początku potencjalnie przesuniętego układu.

Odcinek frontu dolnego położony pod siłą zewnętrzną można również opisać uniwersalną krzywą 5 (rys. 18b i tab. 5). Krzywa ta ma postać teoretycznego równania frontu dla belki obciążonej siłami rozłożonymi. Funkcja $m_1(\xi)$ opisuje równanie względnych momentów zginających, wywołanych naprężeniami σ_y zamienionymi na zastępcze obciążenie równomiernie rozłożone. Współczynnik m_1 określa wytężenie przekroju pod siłą skupioną, przy uwzględnieniu zmniejszenia zewnętrznego momentu zginającego przez naprężenia σ_y. Krzywą 5 obliczono przy upraszczającym założeniu, że σ_y rozłożone są po trójkącie na długości równej odległości od górnej krawędzi belki. Otrzymano współczynnik korelacji z danymi empirycznymi $\varrho = 0{,}890$. Przypuszcza się, że współczynnik ten byłby bliski jedności jeśliby $m_1(\xi)$ obliczono na podstawie rzeczywistego rozkładu naprężeń σ_y.

Przedstawione równania nie wyczerpują wszystkich możliwości aproksymacji frontów plastycznych. Możliwe jest dobranie klasy funkcji opisujących w sposób uniwersalny front górny i niezależnie front dolny. Nie jest to jednak konieczne dla zastosowań. Równania 4 i 5 (tab. 5) mają prostą interpretację fizyczną i wskazują na możliwość bardzo dobrego teoretycznego opisania frontu plastycznego.

11. Długość jądra sprężystego pod siłą skupioną i inne parametry geometrii frontu plastycznego

Obserwowane w eksperymencie długości jądra sprężystego 2t/H, wysokości rdzenia sprężystego w przekroju krytycznym 2C/H oraz długość frontu plastycznego d podano w tab. 6. Wielkości te odczytano z obrazów izochrom w granicznym stanie plastycznym belki.

Wielkość 2C jest wysokością strefy uplastycznianej przez siły styczne. Podano ją szacunkowo, albowiem trudno jest wydzielić tę wielkość z rzeczywistego frontu plastycznego.

Zredukowane zasięgi (tab. 6) strefy uplastycznionej d i g są szacunkowo jednakowe. Tylko w belkach krępych obserwuje się niewielkie zmniejszenie górnej długości g w stosunku do długości dolnej d.

Ponieważ kształt frontu plastycznego poza jądrem sprężystym dobrze opisuje równanie teoretyczne (p.10), to wielkości C i d można dobrze określić na drodze teoretycznej, pod warunkiem znajomości długości 2t strefy działania naprężeń σ_y.

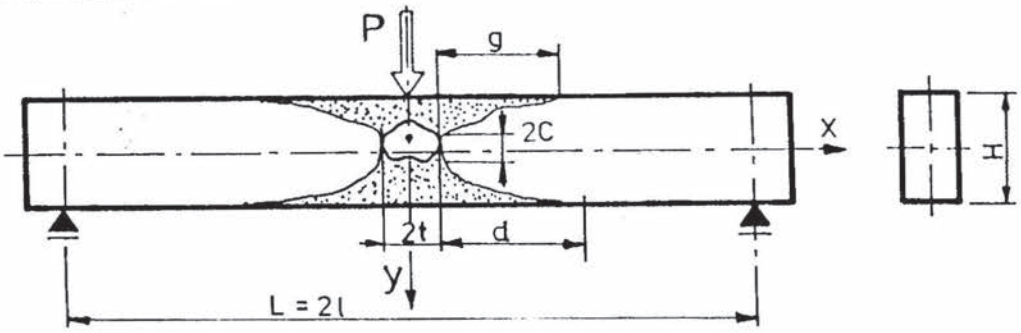
W celu prognozowania długości jądra sprężystego pod siłą skupioną przeprowadzono analizę regresji wielkości bezwymiarowych t/l oraz 2t/H w funkcji smukłości elementu belkowego l/H. W granicznym stanie plastycznym zależności te dobrze opisują potęgowe krzywe regresji

$$\frac{t}{l} = 0{,}153 \left(\frac{l}{H}\right)^{-0{,}584} \quad \text{lub} \quad \frac{2t}{H} = 0{,}306 \left(\frac{l}{H}\right)^{0{,}416}, \qquad (3)$$

które przedstawiono na rys. 19.

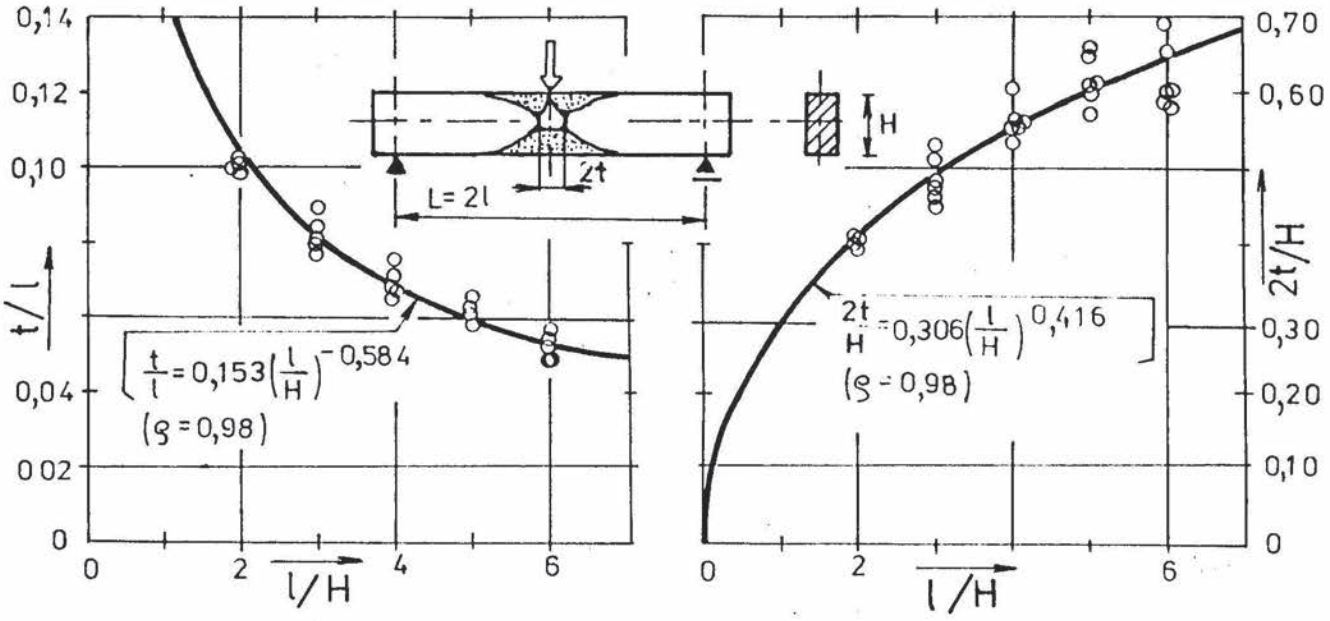
Stosunek 2t:H można interpretować jako tangens kąta rozchodzenia się naprężeń od docisku . Dla rozpatrywanych smukłości jest on istotnie mniejszy od 1, czyli wartości jaką zwykle przyjmuje się w obliczeniach inżynierskich. Jeśliby rozpatrywana krzywa regresji była prawdziwa dla bardzo smukłych belek, to 2t:H byłoby równe 1 dla l:H=22.

Tab. 6. Wybrane parametry stanów granicznych badanych belek jednoprzęsłowych



*) X ± DX

Belka	$\frac{L}{H}$	$P_{el}/\bar{P}$	$P_{pl}/\bar{P}$	$P^{*}_{pl}/\bar{P}$	$\frac{2t}{H}$	$\frac{2C}{H}$	$\frac{d}{l}$	$q=\frac{Q}{\bar{Q}}$
A1	4	0,69	1,083	0,974	0,403	0,400	0,35	0,271
A2		0,67	1,096	0,983	0,410	0,425	0,35	0,274
A3		0,69	1,068	0,962	0,397	0,375	0,34	0,267
A4		0,68	1,067	0,960	0,400	0,387	0,36	0,267
A5		0,69	1,096	0,983	0,412	0,350	0,33	0,274
A6		0,65	1,000	0,902	0,391	0,323	0,32	0,250
seria A *)		0,68 ± 0,02	1,068 ± 0,036	0,961 ± 0,030	0,402 ± 0,008	0,377 ± 0,036	0,34 ± 0,01	0,267 ± 0,009
B1	6	0,69	1,044	0,959	0,487	0,275	0,32	0,171
B2		0,68	1,099	1,012	0,475	0,280	0,28	0,183
B3		0,68	1,083	1,002	0,450	0,270	0,28	0,181
B4		0,71	1,067	0,971	0,538	0,262	0,27	0,178
B5		0,71	1,083	0,991	0,513	0,275	0,31	0,181
B6		0,68	1,061	0,977	0,474	0,285	0,34	0,177
seria B *)		0,69 ± 0,02	1,073 ± 0,019	0,985 0,020	0,490 ± 0,031	0,275 ± 0,008	0,30 ± 0,03	0,179 ± 0,004
C1	8	0,66	1,000	0,931	0,553	0,195	0,37	0,125
C2		0,65	1,057	0,984	0,553	0,200	0,36	0,132
C3		0,66	1,056	0,976	0,608	0,205	0,34	0,132
C4		0,67	1,082	1,012	0,538	0,200	0,34	0,135
C5		0,68	1,092	1,016	0,560	0,198	0,33	0,137
C6		0,66	1,091	1,014	0,564	0,203	0,32	0,136
seria C *)		0,66 ± 0,01	1,063 ± 0,035	0,989 ±0033	0,563 ± 0,024	0,200 ± 0,004	0,34 ± 0,02	0,133 ± 0,004
D1	10	0,67	1,038	0,976	0,600	0,173	0,33	0,104
D2		0,69	1,099	1,032	0,605	0,165	0,34	0,110
D3		0,66	1,056	0,987	0,650	0,170	0,33	0,106
D4		0,68	1,057	0,987	0,658	0,155	0,33	0,106
D5		0,66	1,040	0,976	0,618	0,150	0,36	0,104
D6		0,67	1,094	1,031	0,575	0,158	0,35	0,109
seria D *)		0,67 ± 0,01	1,064 ± 0,026	0,998 ± 0,026	0,618 ± 0,032	0,161 ± 0,010	0,34 ± 0,01	0,107 ± 0,003
E1	12	0,68	1,005	0,947	0,696	0,125	0,33	0,084
E2		0,67	1,050	0,998	0,600	0,138	0,33	0,088
E3		0,68	1,071	1,019	0,588	0,130	0,32	0,089
E4		0,68	1,050	0,992	0,657	0,123	0,34	0,088
E5		0,70	1,039	0,987	0,600	0,140	0,33	0,087
E6		0,68	1,084	1,031	0,588	0,128	0,34	0,090
seria E *)		0,68 ± 0,01	1,050 ± 0,027	0,996 ± 0,029	0,621 ± 0,045	0,131 ± 0,007	0,33 ± 0,01	0,088 ± 0,002



Rys. 19. Długość jądra sprężystego pod siłą skupioną w granicznym stanie plastycznym belki

12. Wpływ smukłości belki na nośność graniczną

W kolumnie 3 i 4 tab. 6 podano graniczną nośność sprężystą P_{el} oraz graniczną nośność plastyczną P_{pl} wszystkich badanych belek jednoprzęsłowych.

Przyjęto, że graniczną sprężystą nośnością P_{el} jest obciążenie powodujące pojawienie się granicznej izochromy plastycznej na dolnej, zewnętrznej krawędzi belki. Naprężenia stykowe powodują co prawda pierwsze uplastycznienie w okolicy przyłożenia obciążenia na górnej krawędzi belki. Jest to jednak bez znaczenia dla praktyki.

Przyjęto, że graniczną plastyczną nośnością P_{pl} jest obciążenie powodujące pełne uplastycznienie przekroju krytycznego, oceniane zgodnie z zasadami podanymi w p. 8. Odpowiada to złączeniu dolnego i górnego frontu plastycznego.

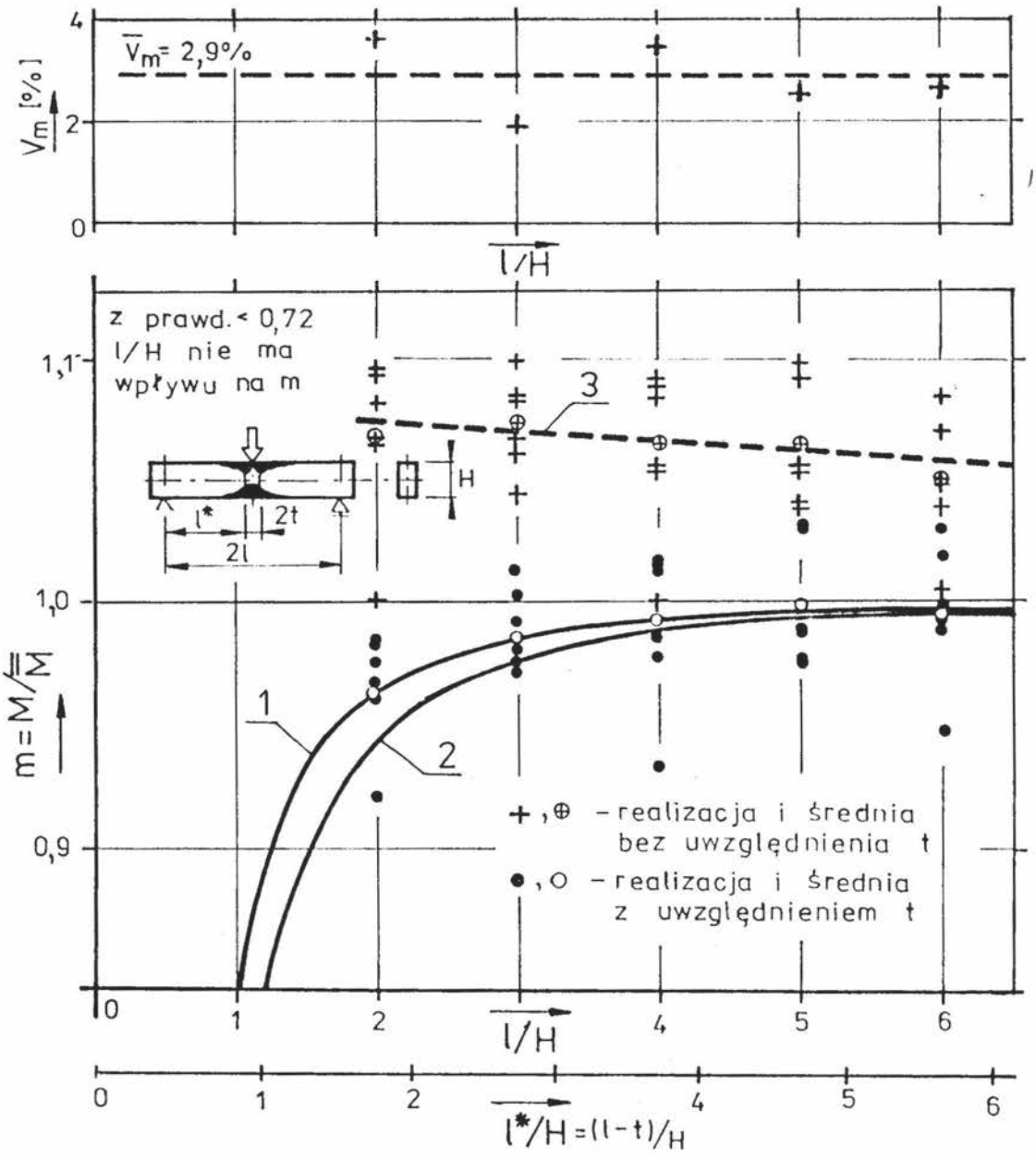
Realizacje nośności plastycznej $m=P_{pl}:\bar{P}=\Pi(\xi=0):\bar{\Pi}$ naniesiono krzyżykami na rys. 20. Już prosta regresji 3 (tab.7) uwzględnia prawie całą statystycznie istotną zmienność międzyklasową.

Możliwość oszacowania wpływu smukłości belki na plastyczną nośność graniczną za pomocą opadającej prostej jest zaskakująca. Nośność plastyczna belki rośnie, a nie maleje, wraz ze zmniejszającą się smukłością.

Wzrost nośności granicznej belki przy zwiększających się siłach poprzecznych jest spowodowany działaniem naprężeń pochodzących od docisku sił skupionych, redukujących wielkość stref uplastycznionych. W wyniku ich działania przekrój krytyczny belki nie występuje pod siłą skupioną.

Tab. 7. Krzywe regresji (rys. 20) wpływu smukłości belki na nośność plastyczną

Nr krzywej	Uwzględniono t	Typ krzywej	Równanie	Uwagi
1	tak	regresji	$m=1-0{,}121(H/l^*)^2$	Wsp. korelacji=0,45
2		teoretyczna	$m=m(l^*/H)^{H/l^*>1}$ $\approx$ $=1-0{,}187(H/l^*)^2$	Obliczona wg hipotezy jądra spr. i war. pl. T-G
3	nie	regresji	$m=1{,}082-0{,}005\frac{l}{H}$	uwzględnia 70,6% zmien.



Rys. 20. Wpływ smukłości belki na plastyczną nośność graniczną

Prosta 3 uwzględnia łączne działanie trzech składowych naprężeń: σ_x, τ_{xy}, σ_y i określa nośność plastyczną belki a nie przekroju krytycznego.

Nośność przekroju krytycznego P^{*}_{pl} o współrzędnej $\xi = t/l$ obliczano z zależności

$$\frac{P^{*}_{pl}}{P_{pl}} = \frac{l-t}{l} \qquad (4)$$

Ułamek ten określa stopień wytężenia przekroju krytycznego w stosunku do wytężenia przekroju pod siłą, mierzony czystym, zewnętrznym momentem zginającym. Wartości liczbowe zredukowanej nośności plastycznej podano w kolumnie 5 tab. 6 i naniesiono na rys. 20 zaczernionymi kółkami. Trend tej zależności aproksymowano krzywą regresji 1 (tab. 7). Krzywą teoretyczną 2 obliczono zgodnie z hipotezą jądra sprężystego i warunkiem początku plastyczności Treski-Guesta. Obie krzywe uzależniono konsekwentnie od zmniejszonej długości przęsła $l^{*}=l-t$.

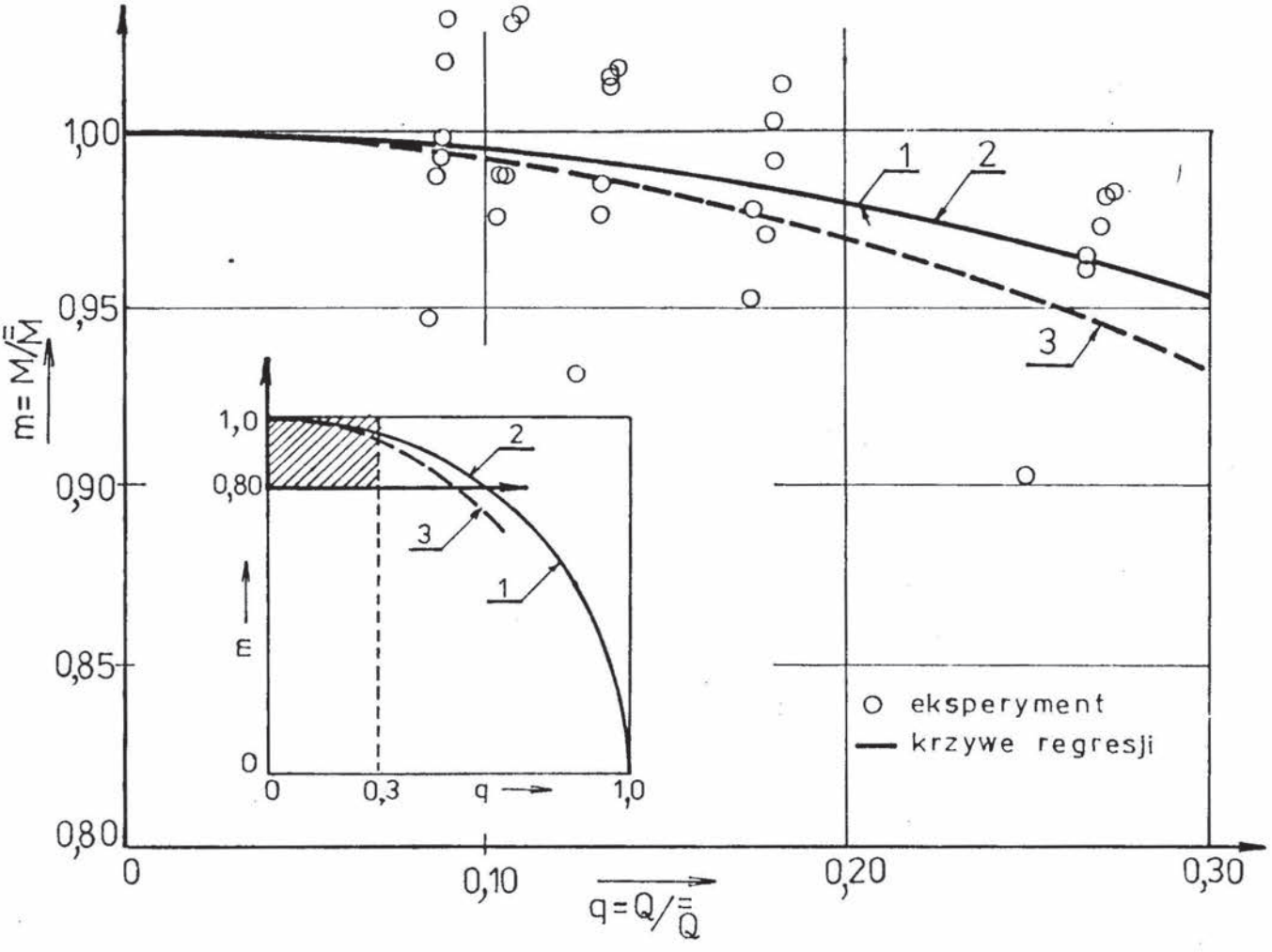
Odseparowanie wpływu naprężeń σ_y od docisku siły skupionej powoduje, że nośność plastyczna zmniejsza się wraz z malejącą smukłością belki, a jednocześnie jest porównywalna z oszacowaniami teoretycznymi.

13. Krzywe interakcji zginania i ścinania przekroju belek

Krzywe interakcji (q,m) przekroju belki poprzecznie zginanej we współrzędnych bezwymiarowych $q=Q/\bar{Q}$, $m=M/\bar{M}$ można uzyskać bezpośrednio ze zredukowanych nośności, zamieszczonych na rys. 20. Wystarczy dokonać zamiany zmiennych na osi rzędnych

$$\frac{M}{M^*} = \frac{4}{\alpha} \cdot \frac{q}{m}, \qquad (5)$$

gdzie dla przekroju prostokątnego $\bar{Q}=RbH/\alpha$. Współczynnik hipotezy plastyczności α jest równy 2 dla warunku Treski-Guesta. Ten warunek plastyczności przyjęto przy obliczaniu empirycznych punktów interakcji. W ostatniej kolumnie tabeli 6 podano wartości względnej siły poprzecznej q, obliczone z zależności (5).



Rys. 21. Krzywe interakcji zginania i ścinania dla przekroju prostokątnego belki zginanej poprzecznie

Rezultaty doświadczeń oznaczono kółkami na rys. 21. Należy zaznaczyć, że współczynnik zmienności nośności przekroju dla danej siły poprzecznej q wynosi tylko 3,5. Obszar przestrzeni interakcji, w którym dysponowano wynikami pomiarów, przedstawiono w powiększonej skali, aby uzyskać wyraźne porównanie z krzywymi regresji.

Krzywa 1 (rys. 21) o równaniu

$$m = 1 - 0{,}502\, q^2 \qquad (6)$$

oraz krzywa 2 o równaniu

$$m^2 = 1 - q^2 \qquad (7)$$

są krzywymi regresji o współczynnikach określonych metodą minimów kwadratów. Krzywa 2 odpowiada jednocześnie postaci teoretycznej Sobotki [77], wynikającej z hipotezy równomiernie rozłożonych naprężeń. Spełnienie przez tę krzywą warunku minimów kwadratów należy traktować jako przypadek. Krzywa 3 określona jest równaniem teoretycznym Bezuchova [10], uzyskanym na bazie hipotezy jądra sprężystego.

W tab. 8 podano współczynniki korelacji krzywych regresji, oznaczające zgodność dopasowania do punktów empirycznych.

Tab. 8. Równania krzywych interakcji (q,m)

Warunek brzegowy	Równanie krzywej	Współczynnik korelacji	Uwagi
$m(0)=1$ $m(1)=0$	$m = 1 - 0{,}471\, q^2 - 0{,}529\, q^4$	0,396	MK
	$m^2 = 1 - q^2$	0,397	Sobotka [77] T spełnione MK
$m(0)=1$	$m = 1 - 0{,}595\, q^2 + 1{,}508\, q^4$	0,400	MK
	$m = 1 - 0{,}502\, q^2$	0,398	
	$m = 1 - q^4$	0,1	Drucker [24]
	$m = 1 - \frac{3}{4} q^2$	0,247	Bezuchov [10] T
	$m = 1 - 0{,}444\, q^2$	0,391	Horne [33]
	$m = 1 - 0{,}541\, q^2$	0,395	Mutermilch i in [55]

NOTACJA: T - równanie teoretyczne,
MK - współczynniki równania wynikają z minimum kwadratów.

Funkcje (q,m) podzielono na dwie klasy zależnie od narzuconych warunków brzegowych. Wszystkie krzywe przebiegają przez punkt (q,m) =(0,1), a dwie pierwsze w tabeli również przez punkt (1,0).

Mimo dużej dokładności wykonania eksperymentu, współczynniki korelacji są małe. W tej sytuacji testy statystyczne nie pozwalają odrzucić jakiejkolwiek krzywej teoretycznej na poziomie istotności 0,1. Nie ma również istotnego powodu dobierania empirycznych krzywych regresji o wielu stopniach swobody lub o skomplikowanej postaci. W tab. 8 pominięto wielomianowe krzywe regresji o więcej niż dwóch stopniach swobody.

Ze względu na znaczny rozrzut wyników doświadczeń, obserwowany również przez innych autorów, dyskusje nad lokalnością krzywych interakcji są czysto akademickie. Krzywe zamieszczone w tab. 8 i na rys. 21 można traktować jako niezależne od statycznych i kinematycznych warunków brzegowych i dotyczące wszystkich przekrojów prostokątnych z dowolnym warunkiem plastyczności. Należy jednak pamiętać, że dotyczą one przekrojów belek w których działanie naprężeń normalnych σ_y od docisku jest pomijalnie małe.

Decyzję o wyborze krzywej interakcji można podjąć na podstawie badań rozkładu naprężeń w przekroju uplastycznionym.

14. Metoda rozdzielania naprężeń z obrazów izochrom w obszarze plastycznym i sprężystym

W przeglądzie literatury nie natrafiono na ogólną metodę, umożliwiającą rozdzielenie naprężeń w obszarze plastycznym przy znajomości tylko izochrom.

Przedstawimy metodę, w której według tego samego algorytmu można rozdzielić naprężenia w całym obszarze sprężysto-plastycznym płaskiego stanu naprężeń. W metodzie wymagana jest znajomość tylko izochrom, a rozdzielenia naprężeń nie trzeba poprzedzać rozdzieleniem odkształceń.

Poczynimy dwa założenia: 1) materiał podlega prawu Treski-Guesta, 2) ekstremalne naprężenia główne są różnych znaków.

Związek fizyczny (γ, τ) opisuje równanie

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma_{max}, \qquad (8)$$

gdzie G jest siecznym modułem Kirchoffa. Przyjmijmy, że G nie zależy od stanu naprężenia i jest funkcją odkształcenia charakterystyczną dla danego materiału. Można ją określić na przykład z próby jednoosiowego rozciągania: $G = E : 2(1+\nu)$, gdzie E jest siecznym modułem odkształcalności podłużnej a ν współczynnikiem rozszerzalności poprzecznej.

Wykorzystując wyrażenie maksymalnych naprężeń stycznych i odkształceń postaciowych przez ekstremalne naprężenia główne σ_1, σ_2 i odkształcenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, możemy obliczyć $(\sigma_1 - \sigma_2)$ w punkcie ciała na podstawie zmierzonej wartości izochromy F

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \cdot G \cdot f \cdot F, \qquad (9)$$

gdzie f jest stałą pokrycia fotomechanicznego. Różnica naprężeń głównych w powiązaniu z równaniami równowagi Naviera daje możliwość obliczenia wszystkich składowych tensora naprężenia w danym punkcie układu współrzędnych kartezjańskich (x,y). Naprężenia normalne w punkcie (i,j) siatki kwadratowej różnic skończonych wynoszą :

$$\sigma_x^{(i,j)} = \sigma_x^{(i-1,j)} - \tau_{xy}^{(i,j)} + \tau_{xy}^{(i,j-1)} ,$$
$$\sigma_y^{(i,j)} = \sigma_y^{(i,j-1)} - \tau_{xy}^{(i,j)} + \tau_{xy}^{(i-1,j)} . \qquad (10)$$

Stąd

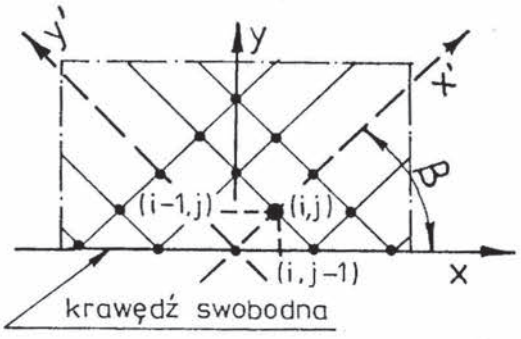
$$(\sigma_x - \sigma_y)^{(i,j)} = \sigma_x^{(i-1,j)} - \sigma_y^{(i,j-1)} - \tau_{xy}^{(i-1,j)} + \tau_{xy}^{(i,j-1)} \qquad (11)$$

Naprężenia styczne w punkcie (i,j) określimy, rozpatrując zależność między współrzędnymi tensora naprężeń

$$\tau_{xy}^{(i,j)} = \frac{\eta}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2_{(i,j)} - (\sigma_x - \sigma_y)^2_{(i,j)} \right]^{1/2} , \qquad (12)$$

gdzie $\eta = \mathrm{sgn}[\sin 2\varphi]$, a φ jest kątem nachylenia naprężenia σ_1 względem osi x: $\cos 2\varphi = (\sigma_x - \sigma_y)/(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Korzystając kolejno z zależności (9), (11), (12), (10), określimy wszystkie składowe tensora naprężenia, jeśli znane są wartości naprężeń w punktach (i,j-1) oraz (i-1,j), czyli na przykład na krawędziach elementu równoległych do osi x,y (rys.22) Naprężenia na krawędzi swobodnej łatwo określić: $T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.



Rys.22.Orientacja analizowanych układów współrzędnych

Jeśli warstwa optycznie czuła nie obejmuje całej powierzchni elementu, to w przekrojach nieortogonalnych do osi y warunki brzegowe nie są znane. Niemniej znajomość warunków brzegowych tylko na krawędzi swobodnej jest wystarczająca do określania naprężeń w pewnym obszarze elementu, jeśli będziemy analizować zadanie w układzie współrzędnych (x', y'), obróconym o kąt β w stosunku do układu (x,y).

Poprzez ortogonalne przekształcenie podobieństwa, na podstawie znajomości współrzędnych punktu x' i tensora T_σ' w układzie

(x',y') obliczymy współrzędne punktu $\varkappa$ i tensor naprężeń T_σ w układzie (x,y):

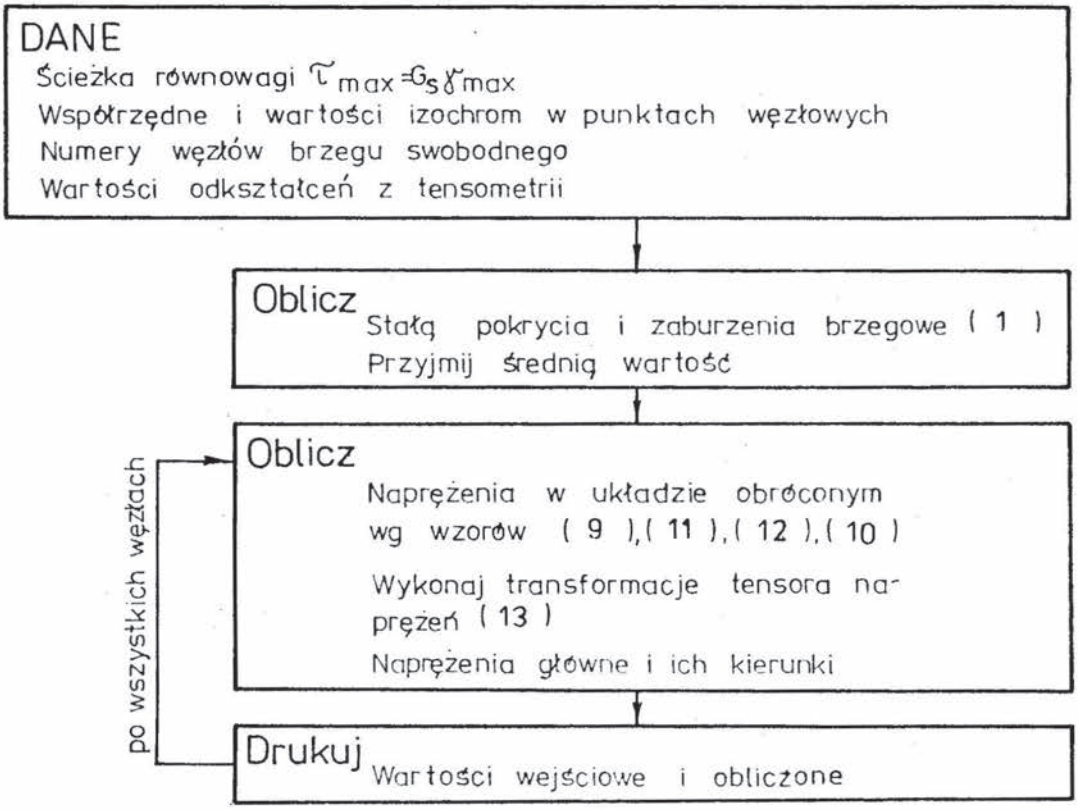
$$\varkappa = A^T \varkappa', \qquad T = A^T \cdot T_{\sigma'} \cdot A, \tag{13}$$

gdzie A jest macierzą przejścia

$$A = \cos \begin{bmatrix} (x',x) & (x',y) \\ (y',x) & (y',y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Wygodnie jest przyjąć $\beta = 0{,}5\pi$. Wówczas $A = \sqrt{2}:2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, na krawędzi swobodnej natomiast $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma'_x = -\tau'_{xy} = \sigma'_y = (\sigma_1 - \sigma_2):2$.

W celu polepszenia dyskretnej aproksymacji, otrzymanych w ten sposób naprężeń, można stosować na przykład metodę minimalizacji błędu średniokwadratowego. Wówczas rozwiązanie należy prowadzić iteracyjnie.



Rys. 23. Schemat blokowy programu „IZOCH2'LOM"

Schemat blokowy, opracowanego przez autora, mikrokomputerowego programu „IZOCH2'LCH", służącego do rozdzielania naprężeń, pokazano na rys. 23. W programie tym wykorzystuje się dane dostarczone przez program „IZOCH1'LCH" z uwzględnieniem zaburzeń brzegowych. W obliczeniach przewidziano wykorzystanie średniej ścieżki równowagi (γ_{max}, τ_{max}) materiału ściskanego i rozciąganego. Średnią ścieżkę przyjęto dlatego, że różnica obu ścieżek równowagi jest nie większa od błędu popełnianego przy odczycie izochrom. Statyczną ścieżkę równowagi z badań materiałowych (z nieliniowym wzmocnieniem lub osłabieniem) należy aproksymować funkcjami sklejanymi. Współczynniki tych funkcji stanowią dane wejściowe do programu „IZOCH2'LCH".

15. Doświadczalne określenie rozkładów naprężeń w przekrojach belki zginanej poprzecznie w obszarze sprężysto-plastycznym

Nie natrafiono na udaną próbę eksperymentalnego oszacowania rozkładów naprężeń w sprężysto-plastycznych przekrojach belki zginanej poprzecznie.

Autor oszacował naprężenia w badanych belkach przy użyciu metody opisanej w p. 14.

Model materiału (γ_{max}, τ_{max}) (rys. 24a) skonstruowano przez odpowiednią transformację średnich ścieżek równowagi z jednoosiowego rozciągania i ściskania (rys. 3). Przedstawiony na rys.24a model jest wykresem funkcji sklejanych. Odchylenia od trendu z eksperymentów nie przekracza 0,5%.

Naprężenia określono w procedurze iteracyjnej:

a) na podstawie znanych izochrom w węzłach siatki rozdzielono naprężenia metodą opisano w p.14 (program IZOCH2'LCH),
b) naprężenia poddawano korekcie tak aby zapewnić gładkość ich przebiegu a jednocześnie zagęszczono siatkę podziału,
c) obliczano różnice odkształceń głównych (izochromy) w węzłach nowej siatki i weryfikowano w oparciu o zdjęcie izochrom,
d) powtarzano kroki a), b), c).

Już pierwszy cykl iteracyjny wymagał dużego nakładu pracy. Poprzestano na dwóch cyklach, choć dokładność rozdzielenia naprężeń nie była jeszcze zadowalająca. Ograniczono się przy tym do analizy tylko jednego zdjęcia - belki C2, poddanej działaniu obciążenia 0,94 P_{pl}. Cechy jakościowe rozkładu naprężeń pokazanego na rys.24 pozwalają jednak na sformułowanie istotnych wniosków, dotyczących wszystkich badanych realizacji.

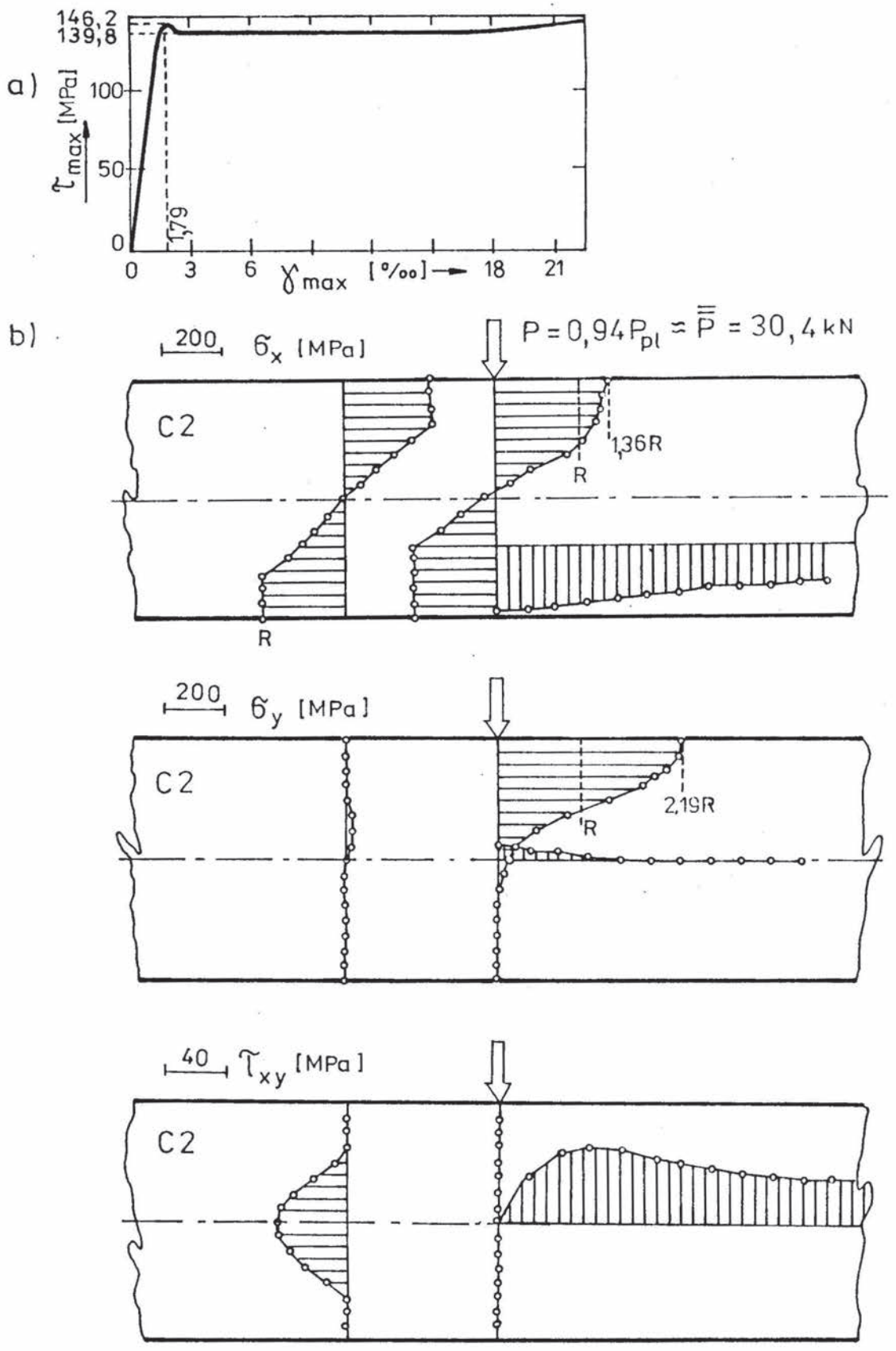
Najważniejszą rozpoznaną cechą jest to, że:

W strefie plastycznej zanikają naprężenia τ_{xy} oraz normalne σ_y.

Ściślej dzieje się tak poza strefą kontaktową, w punktach wokół których działają stałe naprężenia τ_{max}.

Działanie naprężeń σ_y ogranicza się praktycznie do jądra sprężystego, powstałego pod siłą skupioną.

W obszarach działania znacznych naprężeń σ_y od docisku sił powierzchniowych-naprężenia normalne σ_x od zginania mogą przewyższać granicę plastyczności R określoną w jednoosiowym rozciąganiu, a mimo to obszary te nie są uplastycznione. Przewyższenie naprężeń σ_x ponad granicę plastyczności R dochodzi do 30% na górnej krawędzi belki.



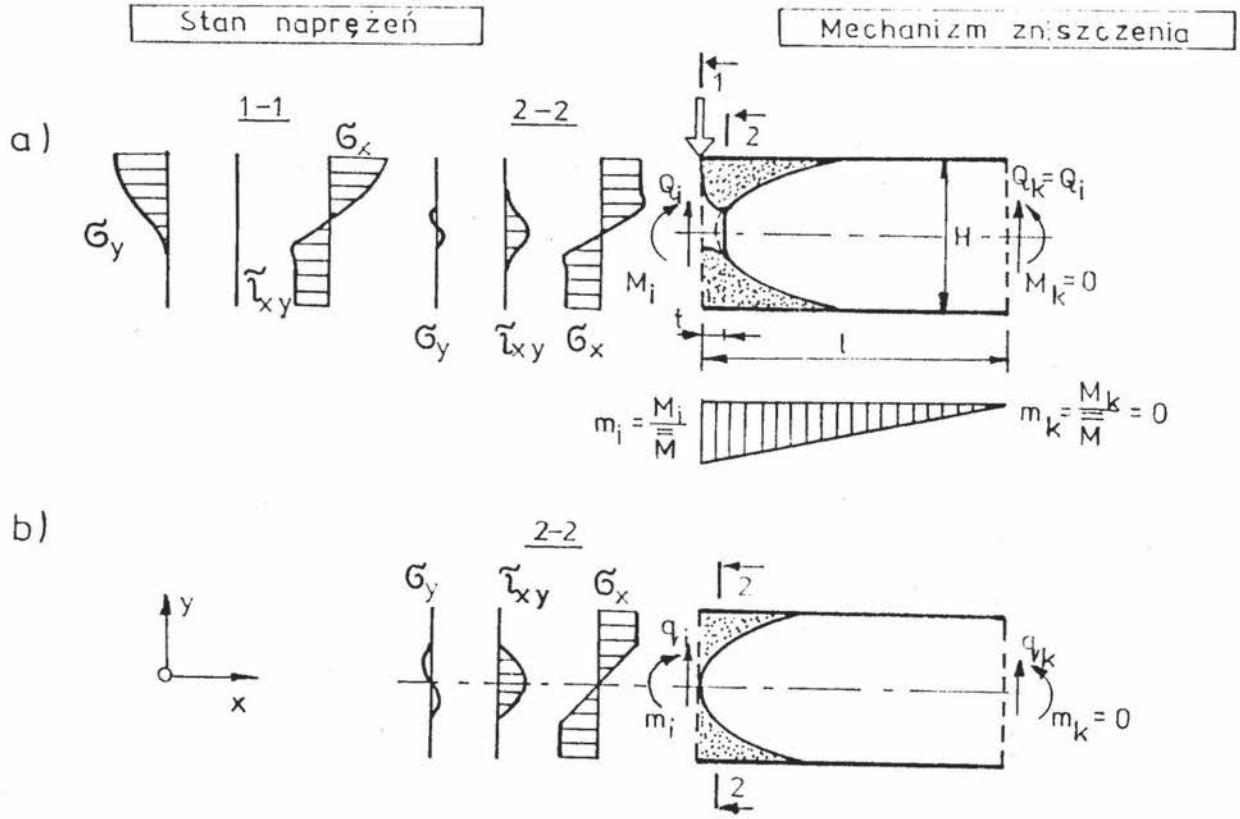
Rys. 24. Rozkład naprężeń, określony z obrazów izochrom:
a) model materiału z prób rozciągania i ściskania,
b) współrzędne naprężeń, wywołane obciążeniem równym teoretycznej nośności plastycznej belki.

16. Jednowymiarowy model sprężysto-plastycznego elementu belkowego

16.1. Budowa zastępczego elementu sprężysto-plastycznego przy wykorzystaniu wyników badań eksperymentalnych

Na podstawie wyników badań kształtów i propagacji frontów plastycznych oraz rozkładów naprężeń w przekrojach można zbudować model elementu belkowego do wyznaczania nośności i przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych.

Rzeczywisty mechanizm zniszczenia oraz towarzyszące mu rozkłady naprężeń rozpoznane w badaniach fotomechanicznych przedstawiono na rys. 25a.



Rys. 25. Model sprężysto-plastycznego elementu belkowego:
a) rzeczywisty, b) zastępczy

Zbudujmy jednowymiarowy model zastępczy zdefiniowany w przestrzeni sił przekrojowych i przydatny do inżynierskiej analizy układów poprzecznie zginanych. Załóżmy, że dla przekrojów całkowicie sprężystych słuszne są wzory Naviera i Żurawskiego do opisu naprężeń σ_x i τ_{xy}. Ciągłość naprężeń po długości belki zapewniona jest przy rozkładzie naprężeń stycznych w jądrze sprężystym

zgodnie z formułą Żurawskiego. W prostokątnym jądrze sprężystym działają więc parabolicznie rozłożone naprężenia styczne, tak jak założył Bezuchov [10]. Elementarne rachunki, polegające na sprawdzeniu podstawowych równań mechaniki ciała stałego, prowadzą do wykazania, że:

a) uzupełnienie macierzy naprężeń przez współrzędną σ_y, zapewnia spełnienie równań równowagi Naviera w przekrojach wolnych od obciążeń powierzchniowych. Dodatkowa współrzędna σ_y wynika ze zmienności naprężeń τ_{xy} po długości belki, więc ze zmian przekrojowych sił stycznych lub zmienności wysokości rdzenia sprężystego,

b) nawet dla przekroju prostokątnego, po uzupełnieniu tensora naprężeń przez σ_y, nie są spełnione warunki nierozdzielności odkształceń. Tensor naprężeń, określony w powyższy sposób jest więc tylko przybliżeniem. (W teorii sprężystości uważa się takie przybliżenie za wystarczające do praktycznych, inżynierskich obliczeń [60]).

Opisane powyżej własności ma model pokazany na rys. 25b. Pominięto w nim naprężenia od docisku sił powierzchniowych (sił skupionych) skutkiem czego front plastyczny można opisać jedną formułą na całej długości elementu, a przekrój krytyczny występuje w miejscu działania ekstremalnych momentów zginających.

Uproszczenia dokonane w modelu zastępczym w stosunku do modelu rzeczywistego prowadzą do oszacowań odpowiedzi elementu i układu elementów, których jakość sprawdzono w p. 16.2 i 16.3. na drodze dwuwymiarowych rozwiązań teoretycznych.

16.2. Próba zastosowania metody elementów skończonych do wyznaczenia naprężeń, przemieszczeń i frontów plastycznych w belce zginanej poprzecznie

Dwuwymiarowy stan naprężeń w sprężysto-plastycznej belce wyznaczono przy zastosowaniu tarczowych elementów skończonych.

Opracowano algorytm numeryczny „TARNES'LCH" sprężysto-plastycznej metody elementów skończonych, w którym uwzględniono różne ścieżki równowagi odkształcenie-naprężenie w jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu oraz osłabienie materiału. Zastosowanie funkcji sklejanych trzeciego stopnia pozwoliło z dużą dokładnością (ok. 0.5%) aproksymować rzeczywiste ścieżki równowagi materiału

z zachowaniem ich gładkości. Niejednorodne pole stałych materiałowych ustalano w procedurze iteracyjnej quasi Newtona-Raphsona i uwzględniano przy obliczaniu przemieszczeń węzłowych przez zastosowanie metody naprężeń początkowych.

Poniżej przedstawiono wyniki teoretyczne rozwiązania belki-tarczy, będącej przedmiotem badań eksperymentalnych. Rozwiązanie podano w celu oceny: 1) przydatności metody elementów skończonych do zastąpienia modelowych badań eksperymentalnych, 2) wpływu różnic między ścieżkami równowagi stali niskowęglowej przy rozciąganiu i ściskaniu na zachowanie belki.

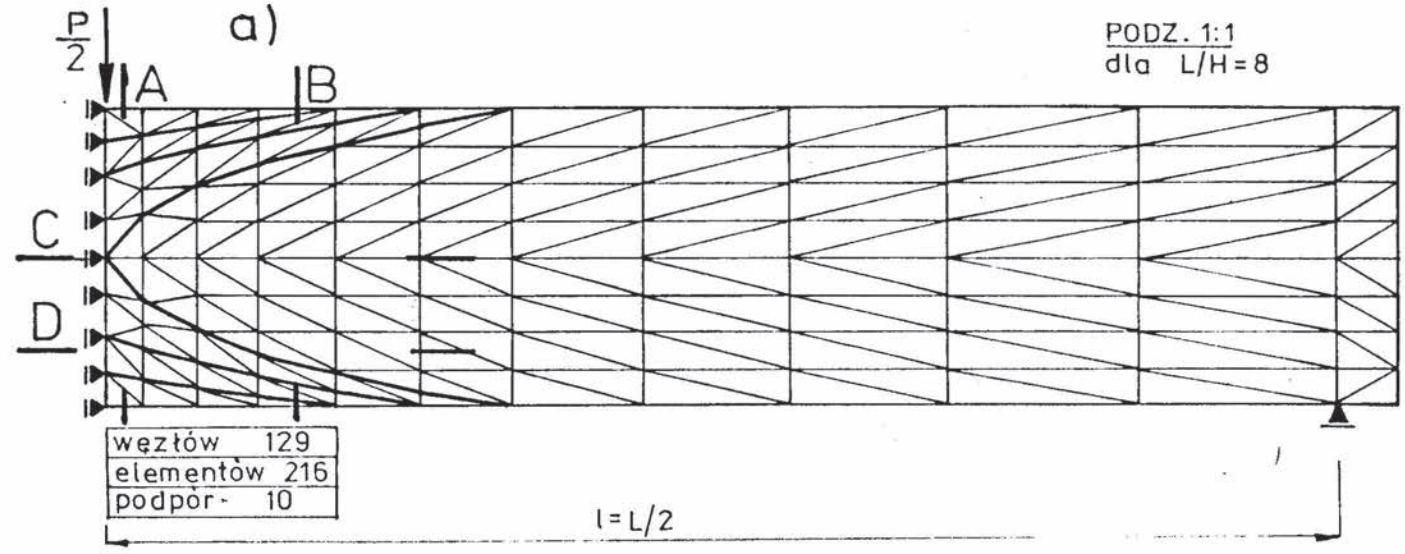
Belkę jednoprzęsłową potraktowano jako tarczę i podzielono na trójkątne elementy skończone w sposób pokazany na rys. 26a. Model materiału belki $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ = (intensywność odkształceń, intensywność naprężeń) otrzymany z badań na rozciąganie i ściskanie (rys. 26b) aproksymowano funkcjami sklejanymi, których współczynniki podano na rys. 26d.

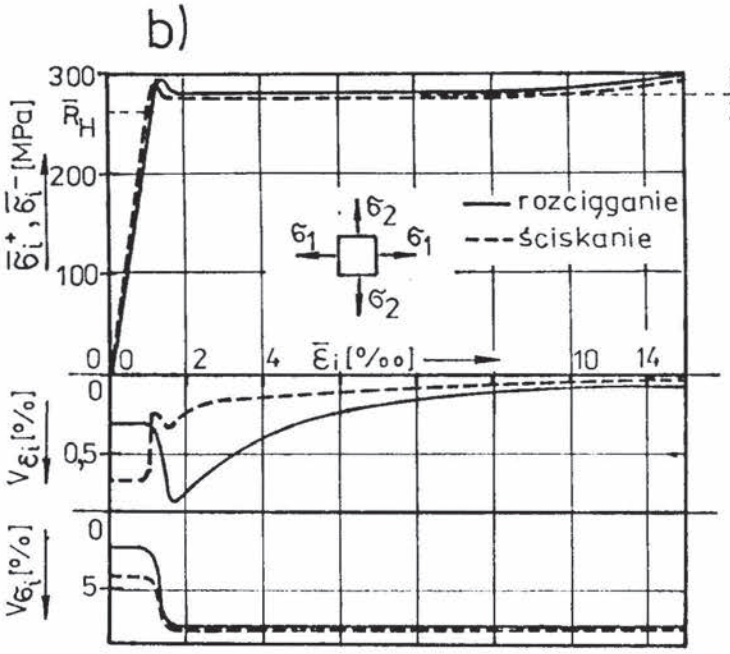
Obszary uplastycznione otrzymane na drodze teoretycznej i porównanie z eksperymentem podano na rys. 27. Front plastyczny wyznaczony teoretycznie jest znacznym przybliżeniem trendu z eksperymentów. Niektóre elementy skończone nie „uplastyczniły" się (niezakropkowane), mimo że w ich otoczeniu wystąpiło uplastycznienie.

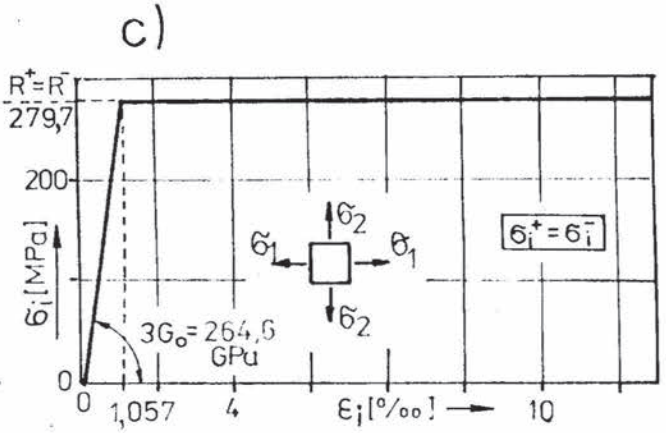
Na drodze teoretycznej można również zaobserwować znaczny wpływ obciążeń skupionych na fronty plastyczne. Przy obciążeniu P równym granicznej nośności belki przy prostym zginaniu nie następuje pełne uplastycznienie przekroju belki. Naprężenia od docisku działają redukująco na obszary uplastycznione pod siłą skupioną.

Na rys. 28 pokazano rozkłady naprężeń w przekrojach belki (oznaczenia przekrojów na rys. 26a) przy dwóch poziomach obciążenia. Obliczone naprężenia porównano z wynikami eksperymentu. Zastosowano metodę odwrotną, polegającą na obliczeniu izochrom na podstawie znanych naprężeń i porównaniu ich z wartościami odczytanymi z fotografii.

W przekroju poprzecznym B-B oddalonym od siły skupionej uzyskano zadowalającą zgodność rozwiązania teoretycznego z doświadczeniem. Naprężenia normalne σ_x rozłożone są praktycznie







d)

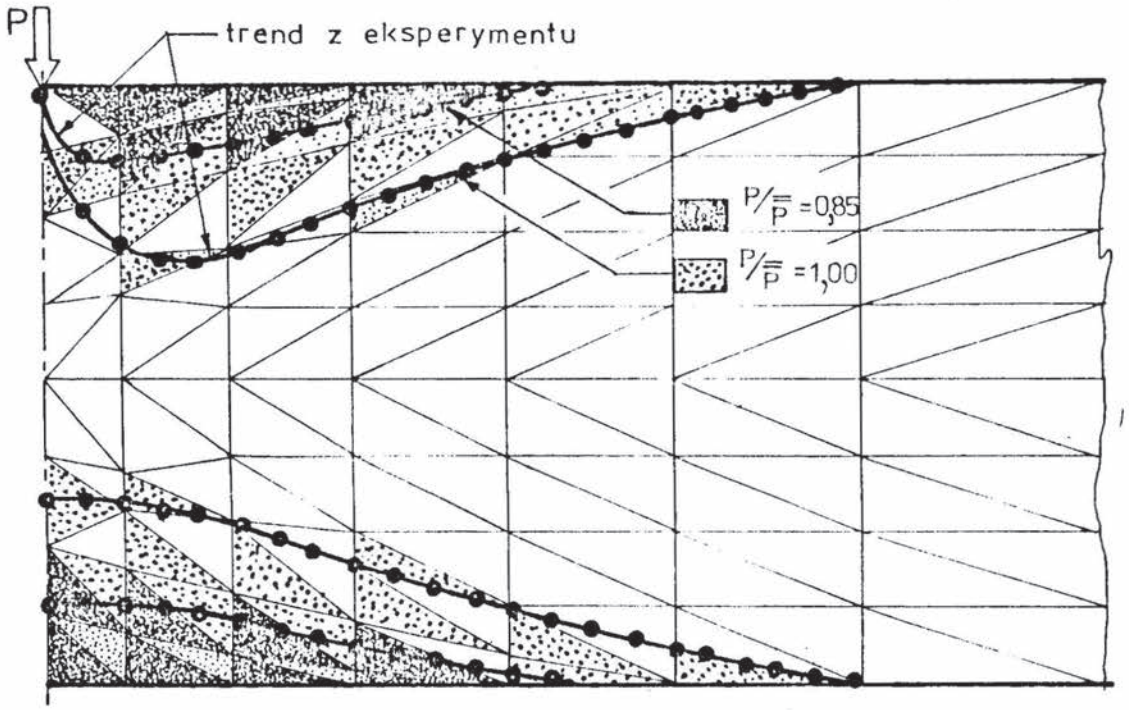
Współczynniki funkcji sklejanych $\sigma_i = a + bt + ct^2 + dt^3$, $t = \varepsilon_i - \varepsilon_{io}$ dla modelu b)

rozciąganie					ściskanie				
$\langle \varepsilon_{io}; \varepsilon_{i1} \rangle$	a	b	c	d	$\langle \varepsilon_{io}; \varepsilon_{i1} \rangle$	a	b	c	d
0 ; 1,05	0	262,07	0	0	0 ; 1,0	0	266,64	0	0
*1,05; 1,26	275,18	262,07	-1011,0	1037,7	*1,0 ; 1,17	266,64	266,64	-617,70	-522,54
1,26; 1,41	295,24	-25,259	-357,24	1202,0	1,17 ; 1,27	291,55	11,317	-884,20	3370,25
1,41; 1,76	287,47	-51,296	183,65	-210,23	1,27; 1,80	287,21	-64,415	126,88	-83,155
*1,76; 8,90	283,00	0	0	0	*1,80; 8,90	276,33	0	0	0
*8,90; 10,0	283,00	0	0,563	-0,061	*8,90; 10,0	276,33	0	0,563	-0,061
10,0; 15,0	283,00	1,017	0,362	-0,008	10,0; 15,0	276,93	1,017	0,362	-0,008

*) brak ciągłości drugiej pochodnej

Rys. 26a) podział belki na elementy skończone, b) model materiału $(\varepsilon_i, \sigma_i)$ z eksperymentów: trend oraz współczynniki zmienności ε_i, σ_i w funkcji ε_i, c) model Prandtla $(\varepsilon_i, \sigma_i)$, d) funkcje aproksymujące trend modelu b) z eksperymentów

liniowo, naprężenia σ_y mają tylko niewielkie odchylenia od wartości zerowej, naprężenia styczne τ_{xy} rozłożone są praktycznie po paraboli, a intensywność naprężeń σ_i jest maksymalna na krawędziach belki.

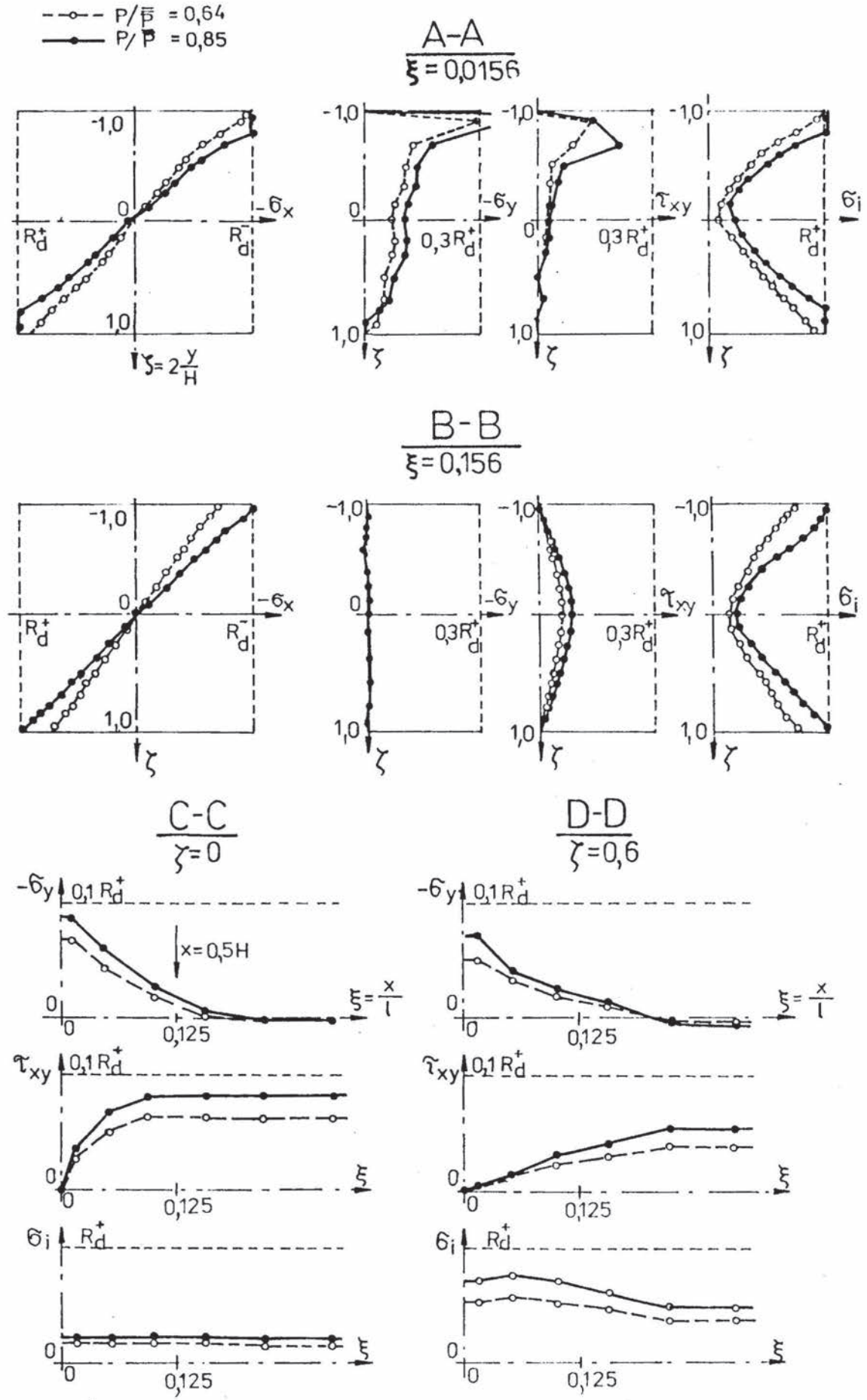


Rys. 27. Obszary uplastycznione w belce L:H=3, otrzymane metodą elementów skończonych oraz porównanie z eksperymentem

W przekroju poprzecznym A-A położonym obok siły skupionej zaobserwowano rozbieżności naprężeń obliczonych metodą elementów skończonych i oszacowanych w doświadczeniu. Rozbieżności te dochodzą do 20% przy górnej krawędzi belki, gdzie występuje największy gradient naprężeń σ_y i τ_{xy}. Teoretycznie obliczone naprężenia σ_x w strefie sprężystej odbiegają od prostej (kształt esowaty) w większym stopniu niż to zaobserwowano w doświadczeniu (patrz rys. 24).

Działanie naprężeń σ_y ogranicza się praktycznie do niewielkiego obszaru pod siłą skupioną (przekrój podłużny C-C i D-D). Naprężenia styczne są zerowe pod siłą skupioną, choć intensywność naprężeń na osi belki jest praktycznie stała.

Mimo uwzględnienia rzeczywistego modelu materiału, zaobserwowano znaczne rozbieżności teoretycznych oszacowań przemieszczeń



Rys. 28. Rozkład naprężeń w przekroju belki L/H=8 otrzymany metodą elementów skończonych

z wynikami eksperymentu. Obliczone przemieszczenia belki o smukłości L/H=8 są około 30% mniejsze od pomierzonych w doświadczeniu. Rozbieżności tego rzędu występują zarówno w zakresie sprężystej jak i sprężysto-plastycznej pracy elementu.

W celu określenia wpływu różnic między ścieżkami równowagi stali niskowęglowej przy ściskaniu oraz rozciąganiu a także osłabienia materiału na początku uplastycznienia, wykonano porównawcze obliczenia przy dwóch dodatkowych wariantach modelu materiału:

a) przy różnych modelach rozciągania i ściskania, bez uwzględnienia osłabienia materiału,
b) przy konwencjonalnym modelu Prandtla, pokazanym na rys. 26c.

Ze względu na małe różnice w naprężeniach nie dało się ich zilustrować na rys. 28. Zupełnie nieistotne jest osłabienie materiału. Różnica rozwiązania opartego na modelu a) i rozwiązania podstawowego jest rzędu promili. Większy wpływ mają różnice w ścieżkach równowagi ściskania i rozciągania materiału. Wpływ ten wynosi około 3%, a więc jest rzędu różnic mi-ędzy sprężystymi modułami odkształcalności materiału przy ściskaniu i rozciąganiu. Jednakże znaczne obniżenie czasu obliczeń zdecydowanie przeważa szalę na korzyść konwencjonalnego modelu Prandtla stali niskowęglowej. Dla innych materiałów uproszczenie takie może być niedopuszczalne i wtedy należy uwzględniać różnomodułowość materiału na przykład w sposób stosowany przez autora w programie „TARNES'LCH".

W wyniku przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że skończony element trójkątny tarczy nie daje dostatecznej dokładności rozwiązania (szczególnie oszacowania przemieszczeń). Należy stosować elementy izoparametryczne wyższego rzędu, rozmieszczone tak, aby dobrze modelować przewidywany stan naprężeń.

Subtelny wpływ naprężeń σ_y na energię i przemieszczenie belki nie da się ocenić w przedstawiony sposób. Tradycyjne rozwiązania metody elementów skończonych, oparte są na specyficznym stosowaniu metody Ritza do minimalizacji pełnej energii układu. Specyfika przejawia się w tym, że funkcje aproksymujące przemieszczenia są dopuszczalne (spełniają warunki brzegowe) tylko w obszarze pojedynczych elementów skończonych. W następnym punkcie pracy zamierzony rezultat, oceny wpływu naprężeń σ_y na

przemieszczenia, uzyskano na drodze zastosowania metody Ritza do minimalizacji energii układu przy zachowaniu integralnych warunków brzegowych w całym ciele.

16.3. Próba teoretycznego oszacowania naprężeń i przemieszczeń belki na podstawie funkcjonału Castigliano

Dwuwymiarowy stan naprężeń w sprężystej belce wyznaczono bez stosowania dyskretyzacji ustroju i bez dyskretyzacji równań mechaniki ciała stałego. Wykorzystano twierdzenie Castigliano [60] o minimum funkcjonału energii dopełniającej. Zastosowano bezpośrednią metodę minimalizacji funkcjonału w klasycznej postaci Ritza. Naprężenia wyrażono przez wielomiany potęgowe, tak aby spełnić statyczne warunki brzegowe w całej belce - tarczy.

Powyższą metodą Pratusevič w pracy [64] rozwiązał przykład, dotyczący belki swobodnie podpartej obciążonej równomiernie na górnej krawędzi. Większość podręczników z teorii sprężystości podaje za tym przykładem, że teoria belkowa dobrze opisuje rozkłady naprężeń w belce o smukłości L:H > 4. Nie zwrócono jednak uwagi, że inne mogą być smukłości krytyczne belki obciążonej siłami skupionymi. W pracy [64] zastosowano również znaczne uproszczenia przy rozwijaniu w szereg obciążenia na dolnej krawędzi (reakcji) belki. Autor nie natrafił na próby uściślenia rozwiązania Pratusevića.

W literaturze nie ma udanej próby oceny wpływu naprężeń σ_y na przemieszczenia belki poprzecznie zginanej. Przemieszczenia osi belki sprężystej oceniane są powszechnie przy użyciu sprężystych elementów belkowych. Przez sprężysty element belkowy rozumiemy element, w którym naprężenia normalne opisuje wzór Naviera $\sigma_x = My:I$, naprężenia styczne wzór Żurawskiego $\tau_{xy} = QS/Ib$, natomiast w elemencie nie działają naprężenia normalne σ_y.

Poniżej przedstawiono wyniki rozwiązania belki-tarczy, obciążonej jedną siłą skupioną (patrz rys. w tab. 9). Obciążenie czynne na górnej krawędzi belki oraz bierne na dolnej krawędzi rozwinięto w kosinusowy szereg Fouriera. Uzyskano jawne wyrażenia analityczne na naprężenia, zależne od: szerokości kontaktu 2d siły czynnej, ilości wyrazów rozwinięcia n obciążenia oraz

wymiarów l_1, l, H tarczy. Na przykład naprężenia σ_x w czwartym przybliżeniu funkcji Ritza można obliczać z zależności:

$$\sigma_x = 6 \cdot P \cdot \zeta \cdot l/(bH^2) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{A_i}{(i\pi)^2} [\cos(i\pi\xi) - \cos(i\pi)] \right\} + a_1(\xi_1^2-1)^2(3\zeta^2-4) +$$

$$+a_2(\xi_1^2-1)^2(5\zeta^3-3\zeta) + a_3(\xi_1^2-1)^2\xi_1^2(3\zeta^2-1) + a_4(\xi_1^2-1)^2\xi_1^2(42\zeta^5-40\zeta^3+6\zeta)$$

gdzie $\xi_1 = x/l_1$, $\zeta = 2y/H$, $A_i = [\sin(i\pi k) - 2\sin(i\pi k/2)\cos(i\pi)]/(i\pi k)$, $k = d/l$, $\xi = x/l$.

Stałe Ritza a_1, a_2, a_3, a_4, obliczane są z układu kanonicznego równań Castigliano dla tarcz. W rozwiązaniach założono, że szerokość kontaktu jest proporcjonalna do obciążenia powierzchniowego.

W tab. 9 podano przykładowe obliczenia, otrzymane w czwartym przybliżeniu funkcji Ritza, przy szerokości kontaktu d=H/25 i przy ilości wyrazów rozwinięcia obciążenia w szereg Fouriera n=200 lub 50. Uwzględnienie innych warunków jest proste, bo obliczenia zalgorytmizowano w programie komputerowym „TARRITZ'LCH".

Różnica obliczonych naprężeń w czwartym i trzecim przybliżeniu funkcji Ritza nie przekracza 2‰. Również uwzględnienie więcej niż 200 wyrazów rozwinięcia obciążenia w szereg nie wnosi praktycznie żadnych zmian. Natomiast zmiana długości docisku d ma istotny wpływ na wynik.

W tab. 9 podano maksymalne naprężenia τ_{xy} w przekroju x=L:10 oraz maksymalne naprężenia σ_x w przekroju pod siłą (oznaczone jako σ, τ_{max}). Wartości te porównano z maksymalnymi w tych przekrojach (lecz nie odpowiadającymi) naprężeniami σ_k i τ_k, obliczonymi według wzorów „belkowych" Żurawskiego i Naviera.

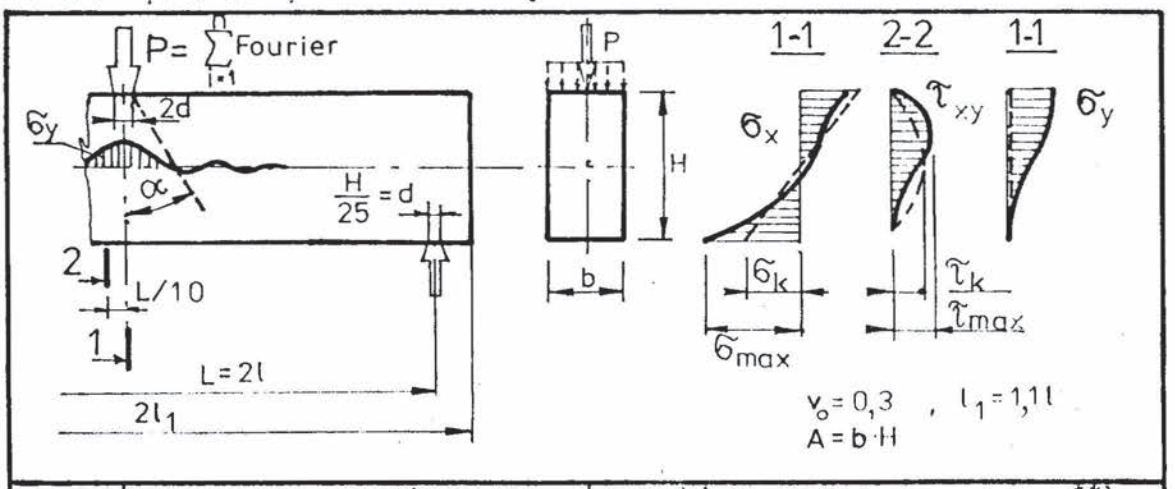
Z zestawionych w tab. 9 naprężeń wynika, że teoria belkowa dobrze opisuje rozkład naprężeń już dla smukłości L/H=2. Błąd nie przekracza 3%. Dla mniejszych smukłości obserwuje się znaczne zaburzenia w rozkładzie naprężeń.

W celu oceny przemieszczenia pionowego Y punktu przyłożenia siły, obliczono energię potencjalną całej belki. Ponieważ belka jest sprężysta, to

$$Y = 2PU_o,$$

gdzie U_o jest energią potencjalną wywołaną jednostkowym obciążeniem P=1.

Tab. 9. Sprężysty stan tarczy - belki



L/H	Naprężenia *) $\sigma_{max}\left[\frac{P}{A}\right]^{-1}$	$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_k}$	$\tau_{max}\left[\frac{P}{A}\right]^{-1}$	$\frac{\tau_{max}}{\tau_k}$	*) $\sim\alpha$ [°]	Energia potencjalna **) $U\left[\frac{P^2}{E_o b}\right]$	$\frac{U}{U_k(\sigma_x+\tau)}$	$\frac{U}{U_k(\sigma_x)}$
1	2,035	1,357	0,734	0,979	0,60	3,71	7,21	29,7
1,5	2,328	1,035	0,749	0,999	0,70	4,10	4,07	9,71
2	2,943	0,981	0,750	1,000	0,81	4,91	2,76	4,91
2,5	3,650	0,974	0,751	1,001	0,89	3,56	2,42	3,65
3	4,387	0,975	0,750	1,000	0,98	7,43	1,63	2,20
4	5,884	0,981	0,750	1,000	1,16	12,28	1,28	1,53
6	8,895	0,988	0,750	1,000	1,59	31,71	1,08	1,17
8	11,904	0,992	0,750	1,000	1,86	68,97	1,03	1,08

*) obliczone przy użyciu n=200 wyrazów szeregu

**) całkowano na siatce $\Delta x \cdot \Delta y = \frac{L}{40} \cdot \frac{H}{20}$ i przy użyciu n=50 wyrazów szeregu

Całkowanie energii wykonywano numerycznie na siatce prostokątnej $\Delta x \cdot \Delta y = L/40 \cdot H/20$ oraz przy użyciu 50 wyrazów szeregu rozwinięcia obciążenia. Energię tę porównano z wartością konwencjonalną $U_k(\sigma_x+\tau)$, obliczoną przy uwzględnieniu naprężeń σ_x i τ_{xy}, oraz energią $U_k(\sigma_x)$, obliczoną przy pominięciu naprężeń τ_{xy}.

Liczby w dwóch ostatnich kolumnach tab. 9 można interpretować jako stosunek rzeczywistego ugięcia belki do ugięcia obliczonego konwencjonalnie. Przedstawione wyniki są ważne dla dowolnego obciążenia P w liniowo sprężystym zakresie pracy belki.

Duży wpływ na sprężyste przemieszczenia mają naprężenia σ_y. Naprężenia te zwiększają ugięcie pod siłą szacunkowo w tym samym stopniu co naprężenia styczne. Dla L:H=4 rzeczywiste przemieszczenie będzie większe o 20% od obliczonego konwencjonalnie

z uwzględnieniem τ_{xy} . Natomiast wpływ naprężeń stycznych na to ugięcie wynosi 25%. Dopiero dla L:H=8 wpływ naprężeń σ_y jest praktycznie pomijalny, a wpływ naprężeń τ_{xy} wynosi 5%.

Naprężenia i przemieszczenia obliczone w powyższy sposób porównano z pomiarami eksperymentalnymi. Uzyskano zgodność wyników z dokładnością do 3%, równą dokładności aparatury pomiarowej w przeprowadzonym eksperymencie.

Przedstawione wyniki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

1. Wpływ naprężeń σ_y wyjaśnia znaczne zwiększenie części sprężystej przemieszczeń obserwowanych w eksperymencie ponad wartości oszacowane przy pominięciu naprężeń σ_y (p. 16.2) i niewytłumaczalne na gruncie teorii klasycznej, uwzględniającej tylko naprężenia styczne.
2. Sprężysty element belkowy, w którym pominięto naprężenia σ_y, może służyć do szacowania przemieszczeń sprężystych belki o smukłości $L/H \geq 10$. Dla mniejszych smukłości należy liczyć się ze znacznym niedoszacowaniem przemieszczeń.
3. Belkowe wzory Naviera i Żurawskiego dobrze opisują rozkład naprężeń σ_x i τ_{xy} w belce zginanej siłą skupioną już dla L/H=2.
4. W poprzednich punktach pracy pokazano, że naprężenia σ_y redukują obszary uplastycznione belki (tylko obszary sprężyste mają praktyczną zdolność przenoszenia tych naprężeń). Dlatego siły skupione nie mają większego wpływu na zwiększenie przemieszczeń trwałych belki, a powyższe kryteria szacowania przemieszczeń można przenieść na zastępczy sprężysto-plastyczny element zginany poprzecznie.

16.4. Formalny opis sprężysto-plastycznego zastępczego elementu belkowego

Sztywność sprężysto-plastycznego zastępczego elementu belkowego obliczmy z definicji energetycznej podanej w twierdzeniu Castigliano - część II. Twierdzenie to słuszne dla realizacji ustrojów zbudowanych z dowolnego materiału, można zapisać następująco [3]:

$$\frac{\partial U}{\partial P_r} = Y_r, \tag{14}$$

gdzie U jest energią komplementarną, P_r fikcyjną siłą uogólnioną, natomiast Y_r przemieszczeniem w miejscu i kierunku działania P_r.

Ustrój sprężysto-plastyczny, w którym nie występuje lokalne odciążenie, potraktujemy jako ciało nieliniowo sprężyste. Komplementarną energię pręta obliczymy przy założeniu: 1) materiału Prandtla o równych modułach sprężystości i granicach plastyczności na rozciąganie i ściskanie, 2) zasady zesztywnienia, 3) hipotezy Bernoulliego. Pominiemy część naprężenia σ_y wynikającą z docisku sił powierzchniowych (zagadnienie kontaktowe) a także samozrównoważone układy naprężeń resztkowych σ_r oraz założymy, że naprężenia styczne działają tylko w rdzeniu sprężystym pręta.

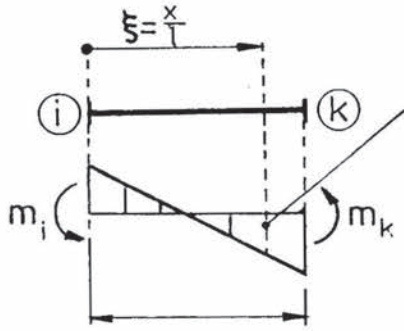
Poczynione założenia pozwalają obliczać energię z tradycyjnych formuł, stosowanych w teorii sprężystości [64, 84] przy uwzględnieniu zmienności charakterystyk geometrycznych po długości obszaru uplastycznionego. Zmienność ta zależy od kształtu przekroju poprzecznego pręta (prostokątny, dwuteowy, teowy itd) a także jest nieliniową funkcją wytężenia elementu. Dlatego w ogólnym przypadku obliczenie sztywności elementu należy wykonywać numerycznie.

Dla szczególnych przekrojów poprzecznych pręta i postaci obciążenia międzywęzłowego sztywność elementu można obliczyć analitycznie.

W tab. 10 podano wyrażenia analityczne na pochodną energii komplementarnej U_{i-k} po pewnej zmiennej X dla elementu (i-k) o przekroju prostokątnym nie obciążonego między węzłami. Brzegowe wartości względnych momentów zginających $m_i = M_i / \bar{M}_{i-k}$ zależą od zmiennej X i mogą przyjmować dowolne wartości z przedziału $[1; -1]$. Graniczny stan sprężysty przekroju występuje dla $m_\bullet = |2/3|$.

Wkład naprężeń stycznych do pochodnej energii ujmują składniki r_i, r_k.

Tab. 10. Pochodna energii komplementarnej po pewnej zmiennej X dla sprężysto-plastycznego elementu belkowego o przekroju prostokątnym



$$\frac{\partial U_{i-k}}{\partial X} = F_{i-k}(m_i, m_k, l_{i-k}) = \frac{\overline{\overline{M}}^2_{i-k} \cdot l_{i-k}}{E_o I_{i-k}} \left[\frac{\partial m_i}{\partial X}[t_i + r_i] + \frac{\partial m_k}{\partial X}[t_k + r_k] \right]$$

1	$\lvert m_i \rvert \leq \frac{2}{3}$ $\lvert m_k \rvert \leq \frac{2}{3}$	t_i	$A[c_i - \frac{27}{4} m_k^3]$
		r_i	$B[3(m_i + m_k)]$
		t_k	$A[c_k - \frac{27}{4} m_i^3]$
		r_k	$B[3(m_i + m_k)]$
2	$\lvert m_i \rvert \leq \frac{2}{3}$ $\lvert m_k \rvert \geq \frac{2}{3}$	t_i	$A[d_k - 27 m_k + c_i]$
		r_i	$B[g_k + \frac{3}{2}(m_k + 2 m_i)]$
		t_k	$A[d_k + e_k(m_i + m_k) - 27 m_i(\frac{1}{4} m_i^2 - 1)]$
		r_k	$B[g_k + \frac{3}{2} m_i + f_k(m_i + m_k)]$
3	$\lvert m_i \rvert \geq \frac{2}{3}$ $\lvert m_k \rvert \leq \frac{2}{3}$	t_i	$A[d_i + e_i(m_i + m_k) - 27 m_k(\frac{1}{4} m_k^2 - 1)]$
		r_i	$B[g_i + \frac{3}{2} m_k + f_i(m_i + m_k)]$
		t_k	$A[d_i - 27 m_i + c_k]$
		r_k	$B[g_i + \frac{3}{2}(m_i + 2 m_k)]$
4	$\lvert m_i \rvert \geq \frac{2}{3}$ $\lvert m_k \rvert \geq \frac{2}{3}$	t_i	$A[d_i + d_k + e_i(m_i + m_k)]$
		r_i	$B[g_i + g_k + f_i(m_i + m_k)]$
		t_k	$A[d_i + d_k + e_k(m_i + m_k)]$
		r_k	$B[g_i + g_k + f_k(m_i + m_k)]$

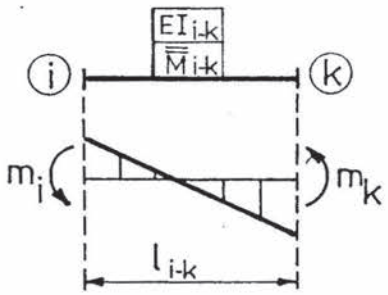
NOTACJA $A = \frac{2}{81(m_i + m_k)^2}$, $B = \frac{1+\nu_o}{15}\left(\frac{H_{i-k}}{l_{i-k}}\right)^2$

$c_\bullet = \frac{27}{4} m_\bullet^2 (3 m_{\bullet\bullet} + 2 m_\bullet)$, $d_\bullet = [20 - 12\sqrt{3}(1 - |m_\bullet|)^{3/2}] \operatorname{sgn}(m_\bullet)$

$e_\bullet = -18\sqrt{3}(1 - |m_\bullet|)^{1/2}$, $f_\bullet = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1 - |m_\bullet|}}$,

$g_\bullet = (2 - \sqrt{3}(1 - |m_\bullet|)^{1/2} \operatorname{sgn}(m_\bullet)$, GDZIE $(\bullet = i, k), (\bullet\bullet = k, i)$

Tab. 11. Pochodna funkcji F_{i-k} po momencie plastycznym $\bar{\bar{M}}_{i-k}$ dla elementu z tab.10



$$\bar{\bar{M}}_{i-k}\frac{\partial F_{i-k}}{\partial \bar{\bar{M}}_{i-k}} = F'_{i-k}(m_i, m_k, l_{i-k}) =$$

$$= F_{i-k} + \frac{\bar{\bar{M}}^2_{i-k}\, l_{i-k}}{E_o I_{i-k}}\left[\frac{\partial m_i}{\partial X}(t'_i + r'_i) + \frac{\partial m_k}{\partial X}(t'_k + r'_k)\right]$$

1	$\lvert m_i\rvert \leqslant \frac{2}{3}$	t'_i	$-A[c_i - \frac{27}{4}m_k^3]$
		r'_i	$-B\cdot 3(m_i + m_k)$
	$\lvert m_k\rvert \leqslant \frac{2}{3}$	t'_k	$-A[c_k - \frac{27}{4}m_i^3]$
		r'_k	$-B\cdot 3(m_i + m_k)$
2	$\lvert m_i\rvert \leqslant \frac{2}{3}$	t'_i	$-A[-2d_k + 27m_k + c_i - e_k m_k]$
		r'_i	$-B[f_k m + \frac{3}{2}(m_k + 2m_i)]$
	$\lvert m_k\rvert \geqslant \frac{2}{3}$	t'_k	$-A[-2d_k + (m_i+m_k)(18f_k\lvert m_k\rvert - 2e_k) + e_k m_i - 27m_i - \frac{27}{4}m_i^3]$
		r'_k	$-B[f_k m_k + \frac{1}{2}(m_i+m_k)(f_k + \frac{2}{3}\lvert m_k\rvert f_k^3) + \frac{3}{2}m_i]$
3	$\lvert m_i\rvert \geqslant \frac{2}{3}$	t'_i	$-A[-2d_i + (m_i+m_k)(18f_i\lvert m_i\rvert - 2e_i) + e_i m_k - 27m_k - \frac{27}{4}m_k^3]$
		r'_i	$-B[f_i m_i + \frac{1}{2}(m_k+m_i)(f_i + \frac{2}{3}\lvert m_i\rvert f_i^3) + \frac{3}{2}m_k]$
	$\lvert m_k\rvert \leqslant \frac{2}{3}$	t'_k	$-A[-2d_i + 27m_i + c_k - e_i m_i]$
		r'_k	$-B[f_i m_i + \frac{3}{2}(m_i + 2m_k)]$
4	$\lvert m_i\rvert \geqslant \frac{2}{3}$	t'_i	$-A[-2d_i - 2d_k - m_k(e_k - e_i) + (18f_i\lvert m_i\rvert - 2e_i)(m_i + m_k)]$
		r'_i	$-B[f_i m_i + f_k + m_k + \frac{1}{2}(m_i + m_k)(f_i + \frac{2}{3}\lvert m_i\rvert f_i^3)]$
	$\lvert m_k\rvert \geqslant \frac{2}{3}$	t'_k	$-A[-2d_i - 2d_k - m_i(e_i - e_k) + (18f_k\lvert m_k\rvert - 2e_k)(m_i + m_k)]$
		r'_k	$-B[f_i m_i + f_k m_k + \frac{1}{2}(m_i + m_k)(f_k + \frac{2}{3}\lvert m_k\rvert f_k^3)]$

NOTACJA jak w tab. 10

Niechaj przywęzłowe siły przekrojowe zawarte będą w wektorze $M=[M_i,M_k]^T$. Wówczas odpowiadające przemieszczenia przywęzłowe elementu (e) $\Psi^{(e)}=[\varphi_i,\varphi_k]^T$ otrzymamy z tab. 10 po podstawieniu odpowiednio $X=M_i$ lub M_k. Ponieważ $\partial m_i/\partial M_i=1/\bar{\bar{M}}_{i-k}$, to

$$\Psi^{(e)}=\frac{\bar{\bar{M}}_{i-k}l_{i-k}}{EI_{i-k}}[(t_i+r_i),(t_k+r_k)]. \qquad (15)$$

W zakresie sprężystym $|m_i|<2:3$, $|m_k|<2:3$ i po wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymamy znane związki liniowe,

$$t_i=\frac{1}{6\bar{\bar{M}}_{i-k}}(2M_i-M_k), \qquad t_k=\frac{1}{6\bar{\bar{M}}_{i-k}}(2M_k-M_i),$$

definiujące macierz podatności niezależną od kształtu przekroju poprzecznego. W innych przypadkach współczynniki $t_\bullet$ i $r_\bullet$ są nieliniowymi funkcjami momentów przywęzłowych.

Rozproszenie losowe podatności elementu z tab. 10 (czyli przemieszczeń przywęzłowych) oszacujmy przy założeniu, że losowa jest sztywność sprężysta EI oraz moment plastyczny $\bar{\bar{M}}=R\cdot\bar{\bar{W}}$. Przyjmijmy, że smukłość elementu $l:H$ określona jest deterministycznie. Wykorzystajmy linearyzację pierwszego rzędu. Wartość oczekiwaną podatności określa wzór (15) dla oczekiwanych sztywności $EI=\mu_{EI}$, $\bar{\bar{M}}=\mu_{\bar{\bar{M}}}$. Współczynnik zmienności można oszacować ze wzoru [65]

$$V_Y^2=\left[\frac{\partial Y/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}\ \mu_{\bar{\bar{M}}}}{\mu_Y}\right]^2\cdot V_{\bar{\bar{M}}}^2+V_{EI}^2-2\varrho_{\bar{\bar{M}},EI}\cdot V_{\bar{\bar{M}}}V_{EI}\cdot\frac{\partial Y/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}\ \mu_{\bar{\bar{M}}}}{\mu_Y} \qquad (16)$$

gdzie $V_{\bar{\bar{M}}}$, V_{EI}, $\varrho_{\bar{\bar{M}},EI}$ oznaczają współczynniki zmienności i współczynnik korelacji sztywności. W tab. 11 zestawiono wyrażenia na pochodne $\partial Y/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}$ w przypadku, gdy momenty brzegowe M_i oraz M_k nie zależą od sztywności. Dla ustrojów statycznie niewyznaczalnych jest to substancjalna*) część pochodnej.

*) Jeśli momenty M_i,M_k zależą od sztywności, to pochodną przemieszczenia $Y=f(M_i,M_k,M_{i-k})$ opisuje wzór

$$\partial Y/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}=\partial f/\partial M_i\cdot\partial M_i/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}+\partial f/\partial M_k\cdot\partial M_k/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k}+\partial f/\partial\bar{\bar{M}}_{i-k},$$

w którym ostatni składnik jest częścią substancjalną pochodnej.

17. Przemieszczenia sprężysto-plastycznej belki jednoprzęsłowej

17.1. Wpływ sił stycznych na wartość oczekiwaną i rozproszenie przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek zginanych poprzecznie

Oceńmy wpływ sił stycznych na przemieszczenia układów konstrukcyjnych, złożonych z zastępczych elementów sprężysto-plastycznych opisanych w p. 16.4.

Rozważania przeprowadzimy na prostym przykładzie belki swobodnie podpartej o przekroju prostokątnym, obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości. Wpływ sił poprzecznych podzielimy na dwie grupy:

a) wpływ naprężeń stycznych τ_{xy},

b) wpływ naprężeń σ_{yG}*) wywołanych gradientem naprężeń stycznych.

W tym przypadku rozróżnimy oprócz działania naprężeń prostych σ_{yG} również działanie iloczynu $\sigma_x \cdot \sigma_{yG}$.

Ponieważ belka obciążona jest stałą siłą styczną, więc naprężenia σ_{yG} wywołane są tylko zmiennością wysokości frontu plastycznego po długości.

W celu obliczenia ugięcia podzielimy belkę o długości L na dwa elementy nie obciążone między węzłami. Oba elementy można scharakteryzować parametrami: $l_{i-k}=L:2$, $m_i=0$, $m_k=m_p$ (lub $m_i=m_p$, $m_k=0$), gdzie m_p jest względnym momentem zginającym pod siłą skupioną. Dla każdego elementu obliczmy energię dopełniającą.

Energia całkowita układu jest sumą energii elementów składowych, zgodnie z zasadą addytywności. Po wykonaniu różniczkowania tej energii względem obciążenia $P=(4\bar{\bar{1}}m_p):L$, otrzymano wyrażenie na strzałkę ugięcia Y:

---

*) Gradient naprężeń stycznych $\partial\tau_{xy}/\partial x$ wymusza naprężenia normalne $\sigma_{yG}=\int(\partial\tau_{xy}/\partial x)\cdot dy$, przy warunku brzegowym $\sigma_{yG}/y=\pm c=0$.
Naprężenia te oznaczono indeksem G dla odróżnienia od naprężeń wywołanych dociskiem sił powierzchniowych.

$$Y=Y(\sigma_x)+Y(\tau_{xy})+Y(\sigma_{yG})+Y(\sigma_x\cdot\sigma_{yG})=$$

$$=\left[\frac{\bar{M}L^2}{E_oI}\cdot\frac{1}{m_p^2}\left\{\frac{10}{81}-\frac{1}{9\sqrt{3}}\sqrt{1-m_p}\,(2+m_p)\right\}\right]_{(\sigma_x)}+$$

$$+\left[\frac{\bar{M}L^2}{E_oI}\,\frac{1+\nu_o}{10}\left(\frac{H}{L}\right)^2\left\{\frac{3m_p-2}{\sqrt{3(1-m_p)}}+\frac{4}{3}\right\}\right]_{(\tau_{xy})}+ \qquad (17)$$

$$+\left[\frac{\bar{M}L^2}{E_oI}\cdot\frac{\sqrt{3}m_p^2}{280}\left(\frac{H}{L}\right)^4\left\{\frac{6-5m_p}{2(1-m_p)^{1,5}}-4\sqrt{3}\right\}\right]_{(\sigma_{yG})}+$$

$$+\left[\frac{\bar{M}L^2}{E_oI}\,\frac{\nu_o\sqrt{3}}{20}\left(\frac{H}{L}\right)^2\left\{\frac{3m_p-2}{\sqrt{1-m_p}}\right\}\right]_{(\sigma_x\cdot\sigma_{yG})}.$$

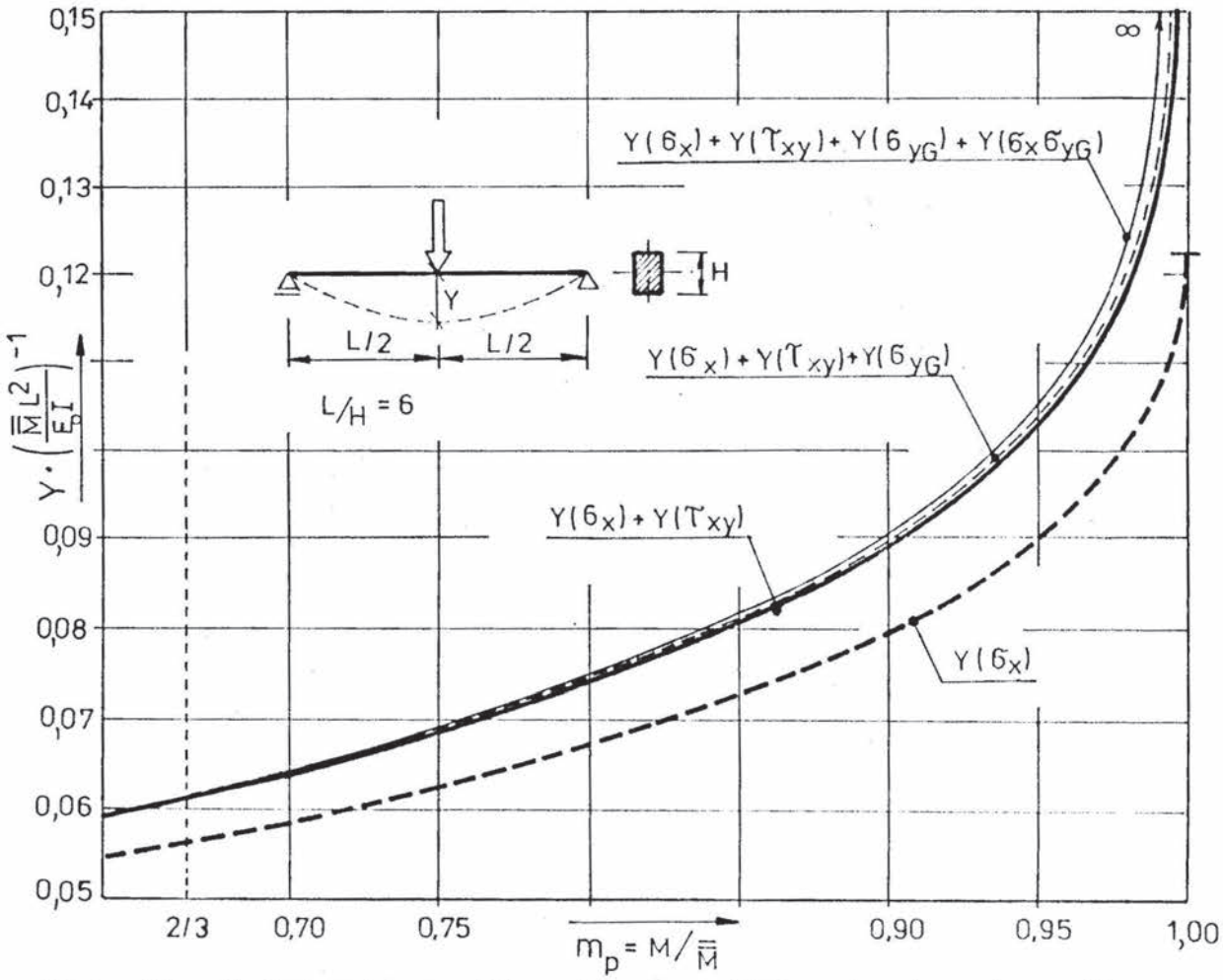
Na rys. 29 przedstawiono wykres powyższej zależności w funkcji obciążenia m_p dla L:H=6 i współczynnika Poissona ν_o=0,3. Różnica między rozwiązaniem podstawowym $Y(\sigma_x)$ a całkowitą strzałką ugięcia rośnie wraz ze zwiększającym się wytężeniem belki. W granicznym stanie sprężystym (m_p=2/3) różnica ta dla L:H=6 wynosi 8%. Przy wytężeniu m_p=0,95 wkład poszczególnych składników do całkowitego ugięcia belki L:H=6 wynosi: naprężeń σ_x - 85%, naprężeń τ_{xy} - 12%, naprężeń $(\sigma_{yG}+\sigma_x\cdot\sigma_{yG})$ - 3%. Wpływ naprężeń σ_{yG} jest dla L:H > 6 przynajmniej 3-krotnie mniejszy od wpływu naprężeń τ_{xy}. Dlatego naprężenia σ_{yG} można pominąć przy praktycznym obliczaniu przemieszczeń belek sprężysto-plastycznych.

Z zapisu analitycznego (17) wynika, że wpływ naprężeń τ_{xy} na strzałkę ugięcia maleje proporcjonalnie do wzrostu kwadratu smukłości belki. Wpływ ten dla L:H=10 i m_p=0,95 wynosi na przykład około 5%.

W giętnym, granicznym stanie plastycznym (m_p=1) siły styczne powodują zdążanie przemieszczenia do nieskończoności niezależnie od smukłości belki. Natomiast strzałka ugięcia, obliczona tylko przy uwzględnieniu naprężeń σ_x, osiąga wartość skończoną. Jest to istotna zmiana jakościowa. Należy zwrócić uwagę, że fakt ten obserwuje się teoretycznie dopiero po przekroczeniu przez obciążenie wartości wynikającej z krzywej interakcji

(q,m). Można to interpretować następująco:

Pełne uplastycznienie przekroju krytycznego belki nie jest jednoznaczne z wyczerpaniem nośności obserwowanym przy zdążaniu przemieszczeń do nieskończoności.



Rys. 29. Zależność realizacji strzałki ugięcia od współczynnika wytężenia belki o smukłości L/H=6

Wyrażenia na oczekiwane przemieszczenia analogiczne do (17) (przy pominięciu σ_{yG}) można otrzymać bezpośrednio z tab.10. Własności addytywne energii powodują, że addytywne są również jej pochodne względem tej samej zmiennej.

Rozproszenie ugięcia można oszacować przy wykorzystaniu wyrażeń zamieszczonych w tab. 11. Sumując odpowiednie składniki z tej tabeli otrzymamy wartości $\partial Y/\partial \bar{M}$ (w ustroju statycznie wyznaczalnym momenty przywęzłowe nie zależą od sztywności).

Wkład naprężeń stycznych τ_{xy} oraz σ_x do całkowitego współczynnika zmienności oceniono z wyrażenia analogicznego

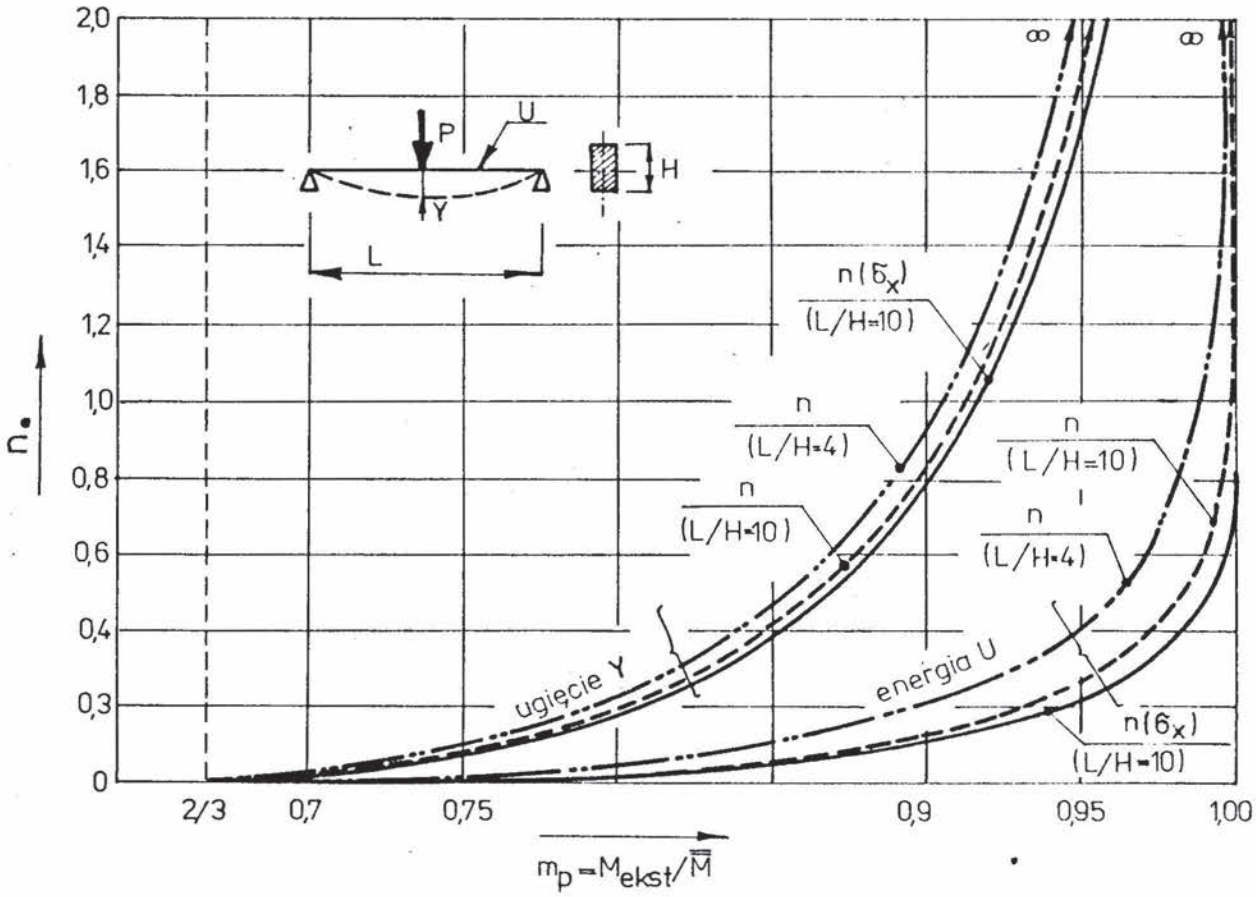
do (16). Założono, że $\varsigma_{EI,\bar{\Pi}} = 0$ oraz $V_{EI} = 0$. Wówczas można zapisać

$$n = n(\sigma_x) + n(\tau_{xy}),$$

gdzie $n = V_Y / V_{\bar{\Pi}}$,

$$n(\sigma_x) = \frac{[\partial Y(\sigma_x)/\partial \bar{\Pi}] \cdot \varkappa_{\bar{\Pi}}}{Y(\sigma_x) + Y(\tau_{xy})}, \quad n(\tau_{xy}) = \frac{[\partial Y(\tau_{xy})/\partial \bar{\Pi}] \cdot \varkappa_{\bar{\Pi}}}{Y(\sigma_x) + Y(\tau_{xy})},$$

Wartości wynikające z tego wyrażenia przedstawiono na rys. 30



Rys. 30. Stosunek współczynnika zmienności energii lub ugięcia do współczynnika zmienności momentu plastycznego

Na rys. 30 pokazano również wpływ naprężeń stycznych na rozproszenie energii belki. Wykres nie zależy od wartości $\varkappa_{\bar{\Pi}}$ i $V_{\bar{M}}$.

Rozproszenie energii i ugięcia oszacowane metodą linearyzacji znacznie przekracza rozproszenie momentu plastycznego dla wartości m_p bliskich jedności. Przy tym rozproszenie ugięcia przewyższa rozproszenie energii. Wpływ naprężeń stycznych jest większy na współczynnik zmienności energii. Jednak wpływ ten jest mały przy $L/H > 10$ i $m_p < 0{,}90$.

17.2. Pomiary eksperymentalne przemieszczeń belek jednoprzęsłowych i porównanie z teorią

Na rys. 31 pokazano parametry statystyczne względnej strzałki ugięcia, zmierzone w eksperymencie na belkach jednoprzęsłowych serii A i E. Przemieszczenia obserwowane w seriach B, C i D znajdują się w obszarze zakropkowanym.

Rzeczywiste przemieszczenia Y linii środkowej belek podano po uwzględnieniu osiadań podpór y_L, y_P, skończonej wysokości belki H oraz średnicy d wałka podporowego (rys. 32).

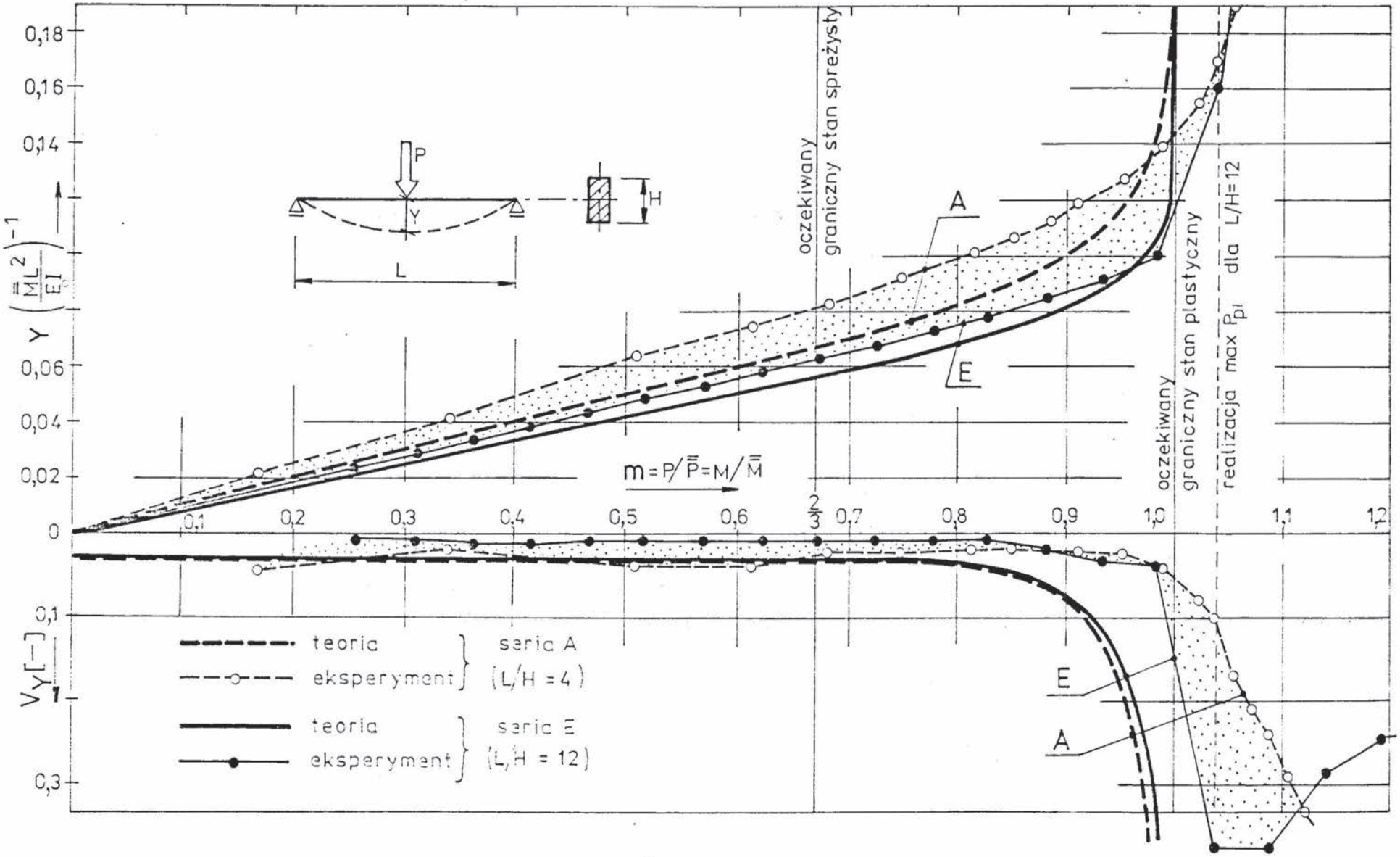
Wyniki teoretyczne otrzymano z formuły (17) i (16). Przyjęto współczynniki zmienności $V_M = 0{,}5$, $V_{EI} = 5{,}5$, obliczone na podstawie rozproszenia modułu E i granicy plastyczności R z badań na jednoosiowe rozciąganie i ściskanie (rys. 5) oraz geometrii przekroju środkowego belek (tab.2). Założono $\varrho_{EI,M} = 0$.

Wielkości eksperymentalne odnoszono do średniej w serii belek sztywności (2b) oraz do przekrojowego momentu plastycznego (2d).

Z rys. 31 można odczytać, że różnice względnych przemieszczeń dla serii belek o różnej smukłości obserwuje się zarówno eksperymentalnie jak i teoretycznie. Rozbieżność między oszacowaniami teoretycznymi i pomiarami przemieszczeń jest szacunkowo równa wartości wynikającej z pominięcia naprężeń σ_y od docisku sił powierzchniowych (patrz p. 16.3.).

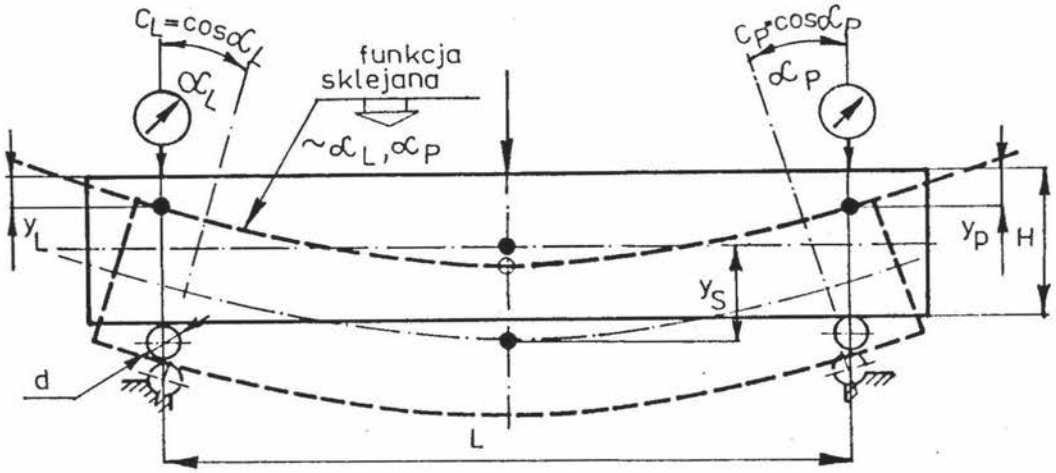
Przemieszczenia wyznaczone teoretycznie wzrastają do nieskończoności w oczekiwanym granicznym stanie plastycznym. Natomiast przemieszczenia z eksperymentu osiągają wartości skończone między innymi na skutek umacniania się materiału, którego to efektu nie uwzględniono w modelu teoretycznym.

W pobliżu granicznego stanu plastycznego doświadczalnie wyznaczone rozproszenie ugięć kilkakrotnie przekracza rozproszenie sztywności belki. Świadczy to o nieadekwatności



Rys. 31. Trend oraz współczynnik zmienności strzałki ugięcia belki jednoprzęsłowej

konwencjonalnych teoretycznych metod szacowania przemieszczeń konstrukcji sprężysto-plastycznych.



$$Y = y_S - \frac{y_L + y_P}{2} + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{C_L}+\frac{1}{C_P}-\frac{C_L+C_P}{2}-1\right)+\frac{d}{4}\left(\frac{1}{C_L}+\frac{1}{C_P}-C_L-C_P\right)$$

Rys. 32. Wpływ osiadania podpór na przemieszczenie linii środkowej belek jednoprzęsłowych

Nie obserwuje się osłabienia belki (zmniejszenia obciążenia przy zwiększonym ugięciu) mimo, że jest ona wykonana z materiału wykazującego osłabienie. Jest to zgodne z dowodem Nealа [57], który pokazał, że osłabienie na ścieżce równowagi (Y,P) może być obserwowane tylko wówczas, gdy górna granica plastyczności materiału jest mimimum o 50% większa od dolnej granicy plastyczności. Badane belki wykonane były z materiału o 4% różnicy dolnej i górnej granicy plastyczności.

Na skutek różnic rozdzielczości aparatury pomiarowej w różnych typach badań doświadczalnych występują różnice teoretycznych i doświadczalnych współczynników zmienności. Bezwzględna strzałka ugięcia dla m=0,5 w serii A wynosiła około 0,15mm, natomiast w serii E około 1,17mm, co dla dokładności aparatury ok. 0,005mm daje odpowiednio błąd 3% i 0,5%. Z rys. 31 wynika, że w zakresie sprężystym mierzono przemieszczenia o niewiele większym rozrzucie. Podobna analiza przeprowadzona dla próby rozciągania i ściskania świadczy o błędzie aparatury rzędu 3%, to jest niemalże równym teoretycznemu współczynnikowi zmienności przemieszczeń sprężystych. Należy podkreślić, że powyżej przedstawiono analizę błędów losowych-a nie systematycznych, więc nie mają one wpływu na wartości oczekiwane przemieszczeń w danej serii pomiarów.

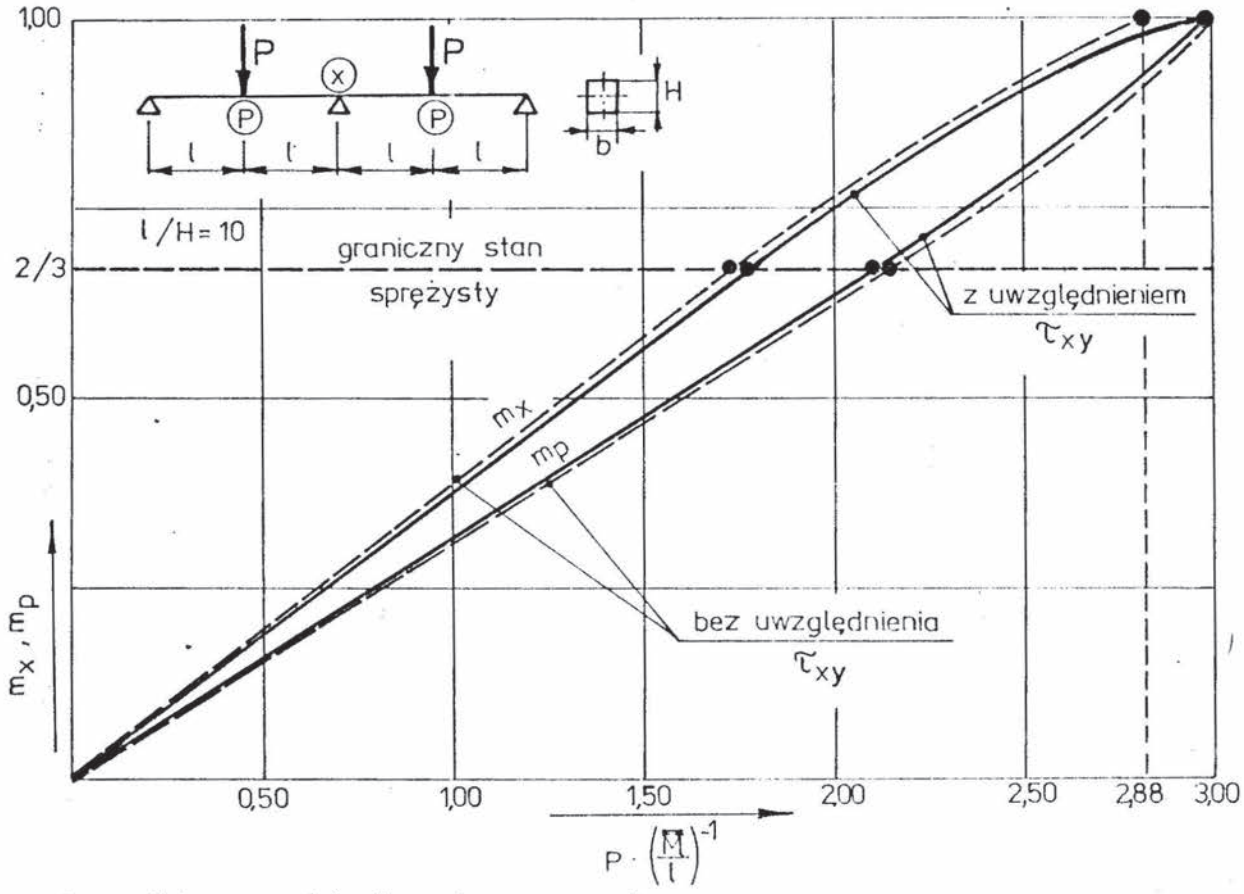
18. Badanie jednoczesności zakończenia procesu formowania się przegubów plastycznych

18.1. Wpływ sił stycznych na proces uplastyczniania belek wykonanych z materiału Prandtla

Przez graniczny stan plastyczny ustroju wykonanego z materiału Prandtla uznamy taki stan, w którym przemieszczenia sprawcze dążą do nieskończoności. Takie zachowanie belki możliwe jest po utworzeniu pełnych przegubów plastycznych niezbędnych do uruchomienia mechanizmu plastycznego.

W p. 17.1. pokazano, że uplastycznienie całego przekroju poprzecznego belki statycznie wyznaczalnej nie musi być jednoznaczne z utworzeniem pełnego przegubu plastycznego. Należy podkreślić, że posługiwano się przy tym teorią opartą na założeniu małych przemieszczeń.

Bez naruszania zasady zesztywnienia, ale przy uwzględnieniu sił stycznych, można wykazać teoretycznie jednoczesność tworzenia się pełnych przegubów plastycznych w granicznym stanie plastycznym belki, co pokażemy na przykładach.



Rys. 35. Przykład jednoczesności tworzenia się przegubów plastycznych, wywołanej naprężeniami stycznymi

Obliczmy współczynniki wytężenia przekroju nad podporą m_x oraz pod siłą m_p w funkcji obciążenia P dwuprzęsłowej belki pokazanej na rys. 33. Z uwagi na symetrię rozpatrzmy połowę belki, podzieloną na dwa elementy:

element 1 - $m_i=0$, $m_k=m_p$, $l_{i-k}=1$, $\partial m_i/\partial m_x=0$, $\partial m_k/\partial m_x=1/2$,

element 2 - $m_i=-m_p$, $m_k=-m_x$, $l_{i-k}=1$, $\partial m_i/\partial m_x=-1/2$, $\partial m_k/\partial m_x=-1$.

Pochodne momentów po hiperstatycznej m_x wyznaczono z warunku równowagi wiążącego m_p i m_x

$$2m_p - m_x = \frac{Pl}{M},$$

przy założeniu, że obciążenie P jest statyczne, więc nie podlega wariacji.

Warunek kinematycznej dopuszczalności można zapisać w postaci $\partial U/\partial m_x=0$ na podstawie twierdzenia (14). Składając odpowiednie składniki z tab. 10 otrzymano nieliniowe równanie

$$F(0,m_p,1)+F(-m_p,-m_x,1)=0,$$

którego pierwiastki wyznaczono numerycznie. Wyniki obliczeń naniesiono na rys. 33.

Przekroje krytyczne wchodzą w zakres pozasprężysty przy różnych obciążeniach. Przekrój całkowicie sprężysty zachowuje się nieliniowo, jeśli tylko jeden punkt ustroju uplastycznił*) się.

Jeśli uwzględnimy siły styczne, to zakończenie formowania przegubów plastycznych w przęśle i nad podporą następuje przy tym samym obciążeniu. Można pokazać, że są to przeguby pełne, tzn. prowadzą do nieskończonych przemieszczeń osi belki pod siłą.

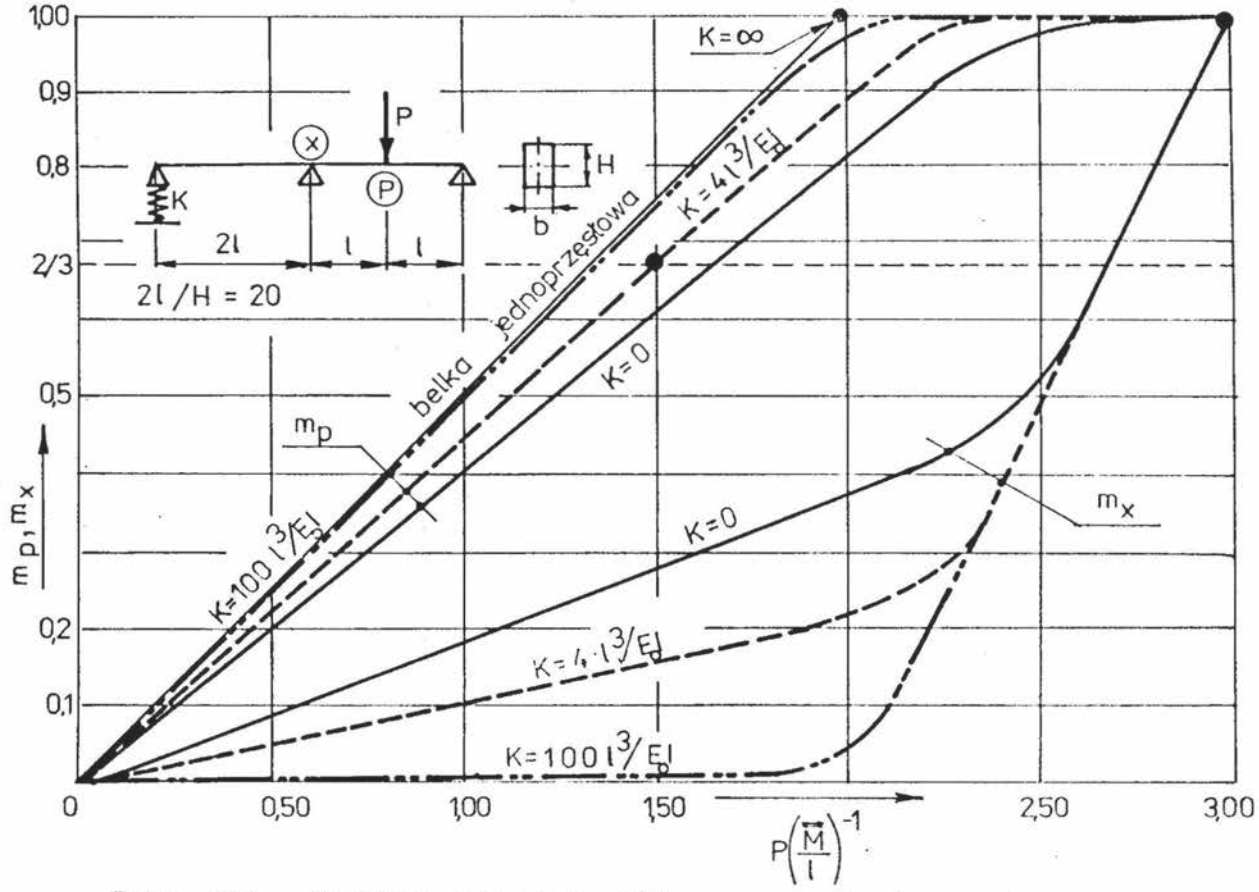
Jeśli pominiemy siły styczne, to przegub plastyczny utworzy się najpierw pod siłą przy obciążeniu 2,88 Pl/M, a nad podporą dopiero przy obciążeniu 3,00 Pl/M. Przeguby plastyczne utworzone w ten sposób nie są pełne, czyli przemieszczenie osi belki jest skończone.

---

*) Podobny efekt nieliniowości zaobserwowano w przebiegu izochrom punktów sprężystych, współpracujących z punktami plastycznymi (p.8).

W pracy [52] i [55] rozpatrzono podobną belkę i stwierdzono, że przy pominięciu sił stycznych przeguby plastyczne powstają jednocześnie. W świetle przedstawionego przykładu, rozważania zawarte w tych pracach są nieścisłe.

Wpływ podatności podpór na jednoczesność tworzenia się przegubów plastycznych zilustrujemy na przykładzie belki dwuprzęsłowej ze sprężystą podporą skrajną (rys. 34). Obliczenia analogiczne jak w przykładzie z rys. 33 wykonano tylko przy uwzględnieniu sił stycznych.



Rys. 34. Wykres pracy belki ze sprężystą podporą

Energia układu zwiększana jest przez energię podpory $U_{spr}=V^2 K/2$ gdzie V jest reakcją podpory a K stałą podatności. Zjawisko jednoczesności tworzenia się przegubów plastycznych jest znacznie osłabione przez podatność podpory. Dla nieskończenie podatnej podpory belka zachowuje się jak jednoprzęsłowa.

Jednoczesność tworzenia pełnych przegubów plastycznych w granicznym stanie plastycznym belki ma ważne konsekwencje

praktyczne z uwagi na zakorzenioną w świadomości badaczy zasadę kolejnego powstawania przegubów plastycznych w trakcie pracy ustroju wykonanego z materiału Prandtla. Na tej niesłusznej zasadzie oparte są konwencjonalne algorytmy obliczania konstrukcji sprężysto-plastycznych.

Uwzględnienie sił stycznych powoduje, że schemat statyczny ustroju pozostaje niezmienny do momentu zniszczenia. Fakt ten znacznie upraszcza algorytmy numeryczne, mimo że należy przy tym uwzględnić gładką, ciągłą zmianę sztywności ustroju wraz ze zmianą obciążenia.

18.2. Proces formowania przegubów plastycznych w belkach rzeczywistych

Proces tworzenia przegubów plastycznych zbadano eksperymentalnie na belkach dwuprzęsłowych (rys. 6 i rys. 35).

Za miarę wytężenia a także uplastycznienia przekroju w miejscu formowania się przegubu plastycznego przyjęto współczynnik $m=M/\overline{M}$, gdzie $\overline{M}$ jest przekrojowym momentem zginającym.

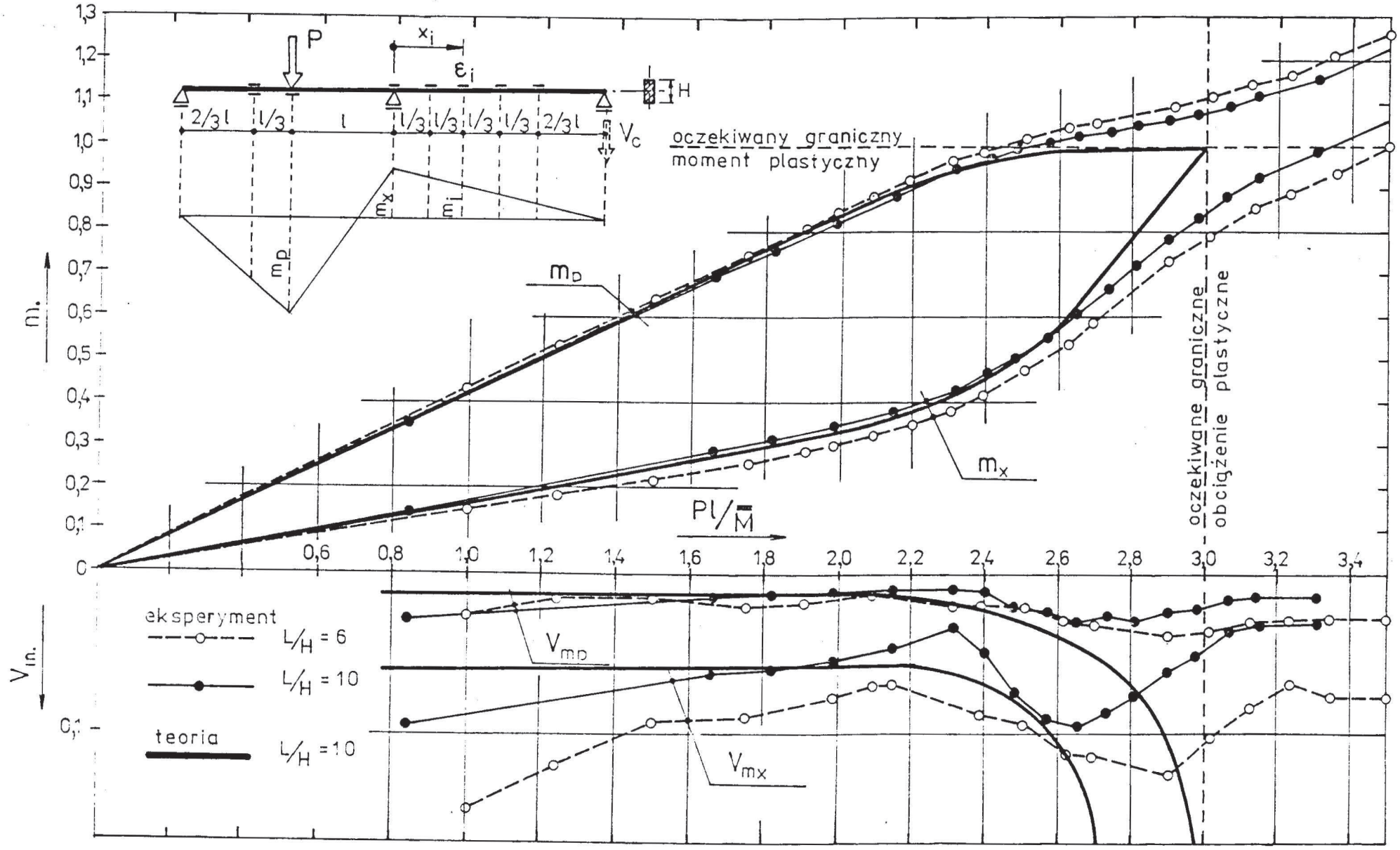
Przekrojowe momenty zginające oraz reakcje można oszacować przy wykorzystaniu zmierzonych siłomierzem reakcji podpory skrajnej V_c (rys. 35). Jednakże dużo większą dokładność uzyskiwano przy obliczaniu wielkości statycznych na podstawie pomierzonych odkształceń ε_i. Spośród wszystkich tensometrów naklejonych na górnej i dolnej krawędzi belki tylko nieliczne wykazywały odkształcenia plastyczne i to przy zaawansowanych obciążeniach. Granicę sprężystych odkształceń ustalono na $\varepsilon_c=1{,}40‰$, biorąc pod uwagę wyniki prób rozciągania i ściskania. Postępowano według algorytmu (oznaczenia na rys. 35):

a) na podstawie sprężystych odkształceń ε_i obliczono przekrojowe momenty zginające z zależności

$$M_i = \varepsilon_i \cdot EW_o, \qquad (i=1,\ldots,5)$$

Dla dziesięciu pierwszych pomiarów odkształceń (gdy ε_x i ε_p były jeszcze sprężyste) EW_o obliczano z warunku równowagi

$$EW_o = \frac{Pl}{2\varepsilon_p + \varepsilon_x}.$$



Rys. 35. Trend oraz współczynnik zmienności względnego momentu przęsłowego m_p i podporowego m_x belki dwuprzęsłowej.

Obliczone w ten sposób sztywności integralne różniły się między sobą nie więcej niż o 0,5 %, a były około 2,5 większe od wielkości wynikających z pomiarów geometrycznych.

b) Z warunku prostoliniowości momentu zginającego obliczono reakcję V_c:

$$V_c = \begin{cases} M_i/(2l-x_i) & \text{dla } i=1,2,3,4 \quad \text{w przęśle nieobciążonym,} \\ M_i/(2l-x_i)-Pl & \text{dla } i=5 \quad \text{w przęśle obciążonym.} \end{cases}$$

c) Z warunków równowagi obliczono przekrojowe momenty zginające

$$M_x = V_c \cdot 2l, \quad M_p = (2V_c + P/2) \cdot l,$$

oraz reakcje pozostałych podpór.

Obliczenia prowadzono dla każdej realizacji belki (5 belek w serii) i każdego tensometru osobno (5 tensometrów podłużnych na jednej belce). Uzyskiwano więc dla jednego poziomu obciążenia około 25 realizacji danej wielkości statycznej. Wszystkie te realizacje stanowiły podstawę do obliczenia wartości oczekiwanej i współczynnika zmienności.

Na rys. 35 pokazano proces prowadzący do zakończenia formowania się przegubów plastycznych w przekroju podporowym i przęsłowym belek dwuprzęsłowych serii F oraz serii II. Linią ciągłą pokazano zależność teoretyczną wytężenia m od obciążenia $Pl/\bar{M}$, obliczone przy uwzględnieniu losowej sprężystości podpór. Linią przerywaną z kółkami oznaczono wyniki pomiarów doświadczalnych dla serii belek F, natomiast linią ciągłą z kropkami wyniki pomiarów dla serii belek II.

Obliczenia teoretyczne wykonano przy użyciu, opracowanego przez autora, programu komputerowego „PLABEL'LCII". Zastosowano belkowy element zastępczy, opisany w p. 16.4, uwzględniający skończone strefy plastyczne oraz naprężenia styczne. Uwzględniono losowe rozproszenie sztywności sprężystej oraz przekrojowego momentu plastycznego elementów belkowych a także losowe rozproszenie sprężystości podpór. W programie zastosowano metodę linearyzacji stochastycznej, przebiegającej w otoczeniu wartości oczekiwanych wielkości losowych. Wartość oczekiwaną i współczynniki zmienności sprężystości podpór oceniono na podstawie badań doświadczalnych, jak pokazano w p. 19.1.

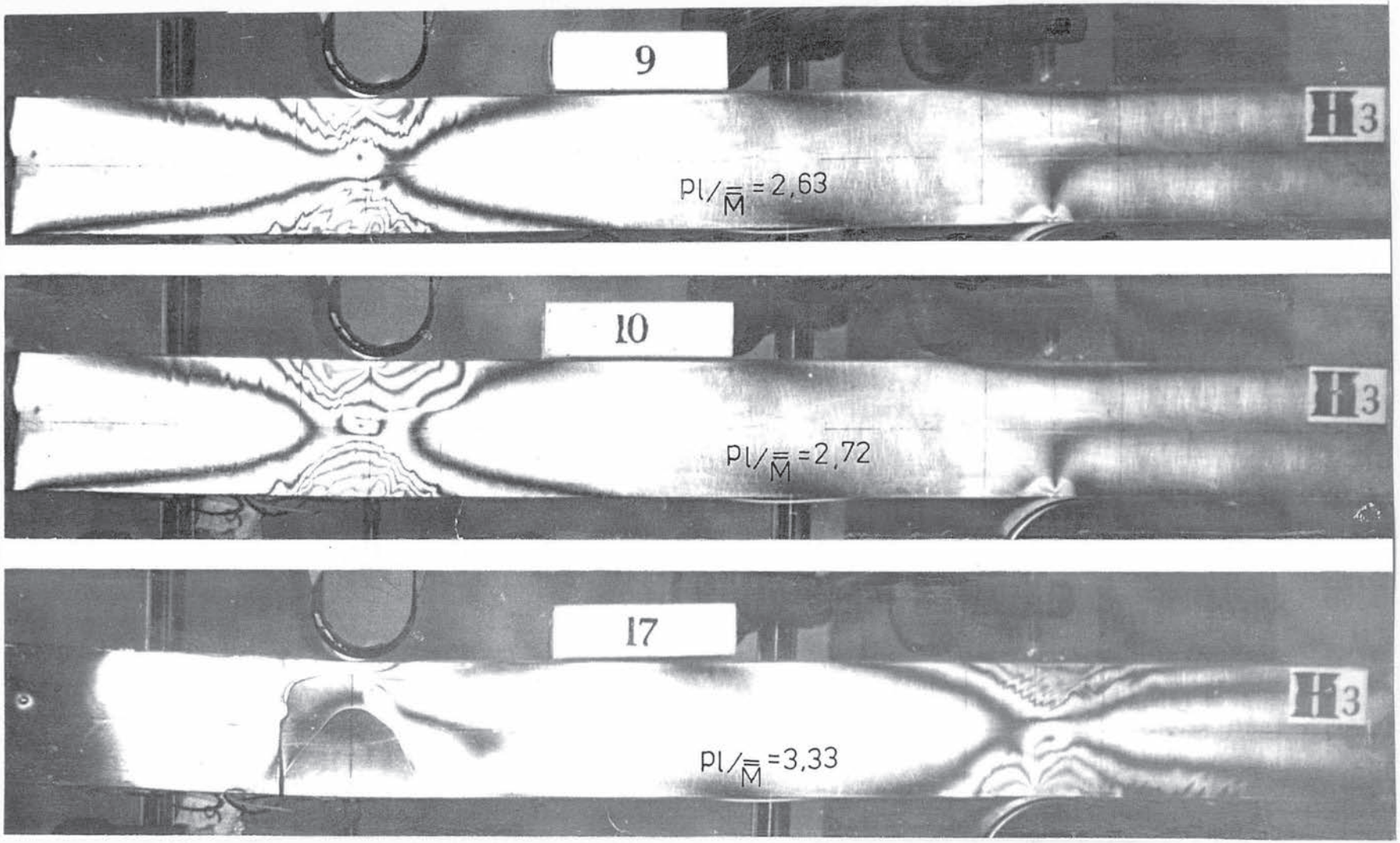
W pobliżu oczekiwanego stanu plastycznego belki występują rozbieżności pomiędzy oszacowaniami teoretycznymi i pomiarami (rys. 35). Dla teoretycznego modelu Prandtla pełne uplastycznienie wszystkich przegubów następuje w tej samej chwili. Natomiast w ustroju rzeczywistym występuje różnica w czasie uformowania się przegubów plastycznych. Na skutek wzmocnienia materiału rzeczywistej belki oraz działania naprężeń σ_y od docisku sił powierzchniowych przekrój przęsłowy może przenosić moment $M_p > \bar{M}$. Jednocześnie następuje odpowiednie (wynikające z warunków równowagi) zmniejszenie wytężenia przekroju podporowego.

Obserwuje się zwiększenie losowego rozproszenia sił przekrojowych związane z przebudową struktury materiału na początku uplastycznienia przekroju. Po uporządkowaniu struktury materiału, czyli wraz ze wzrostem wzmocnienia następuje zmniejszenie rozproszenia.

18.3. Interpretacja zjawisk w procesie uplastyczniania belek rzeczywistych na podstawie badań fotomechanicznych

Na rys. 36 pokazano fotografie izochrom wykonane na badanych belkach dwuprzęsłowych: tuż przed pełnym uplastycznieniem przekroju przęsłowego (rys. 36a), tuż po jego uplastycznieniu (rys. 36b) oraz tuż przed uplastycznieniem przekroju przypodporowego (rys. 36c). Przy ostatnim obciążeniu warstwa fotomechaniczna w okolicach siły czynnej uległa zniszczeniu.

Proces uplastycznienia belek dwuprzęsłowych ma wspólne cechy z propagacją stref plastycznych w belkach jednoprzęsłowych. Najważniejszą cechą jest istotny wpływ naprężeń normalnych od docisku na strefy plastyczne. Naprężenia te nie pozwalają uplastycznić się przekrojowi pod siłą bierną i czynną. Na skutek tego pełnemu uplastycznieniu ulegają przekroje w pewnej odległości od sił skupionych. Odległość tę można ocenić zgodnie z krzywymi regresji (3) wyprowadzonymi dla belek jednoprzęsłowych. Również kształt frontu górnego i dolnego można dobrze opisać zależnościami teoretycznymi.



Rys. 56. Proces uplastyczniania belki dwuprzęsłowej. Fotografie izochrom.

Na rys. 36 widać wyraźnie, że pełne uplastycznienie przekroju przypodporowego następuje z pewnym opóźnieniem w stosunku do uplastycznienia przekroju przęsłowego. Jeśli rozpatrywać okolice siły skupionej, to pełnemu uplastycznieniu w pierwszej kolejności ulega przekrój z tej strony siły skupionej, gdzie działają większe siły styczne. Dotyczy to przekroju po prawej stronie zewnętrznej siły czynnej (rys. 36a) i lewej stronie siły biernej (rys. 36c).

19. Wpływ sprężystości podpór na przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek statycznie niewyznaczalnych

19.1. Losowe podatności*) podpór belek rzeczywistych

W celu oceny wpływu podatności podpór a szczególnie ich losowego rozproszenia na przemieszczenia belek oszacowano sztywność podpór wszystkich badanych belek dwuprzęsłowych.

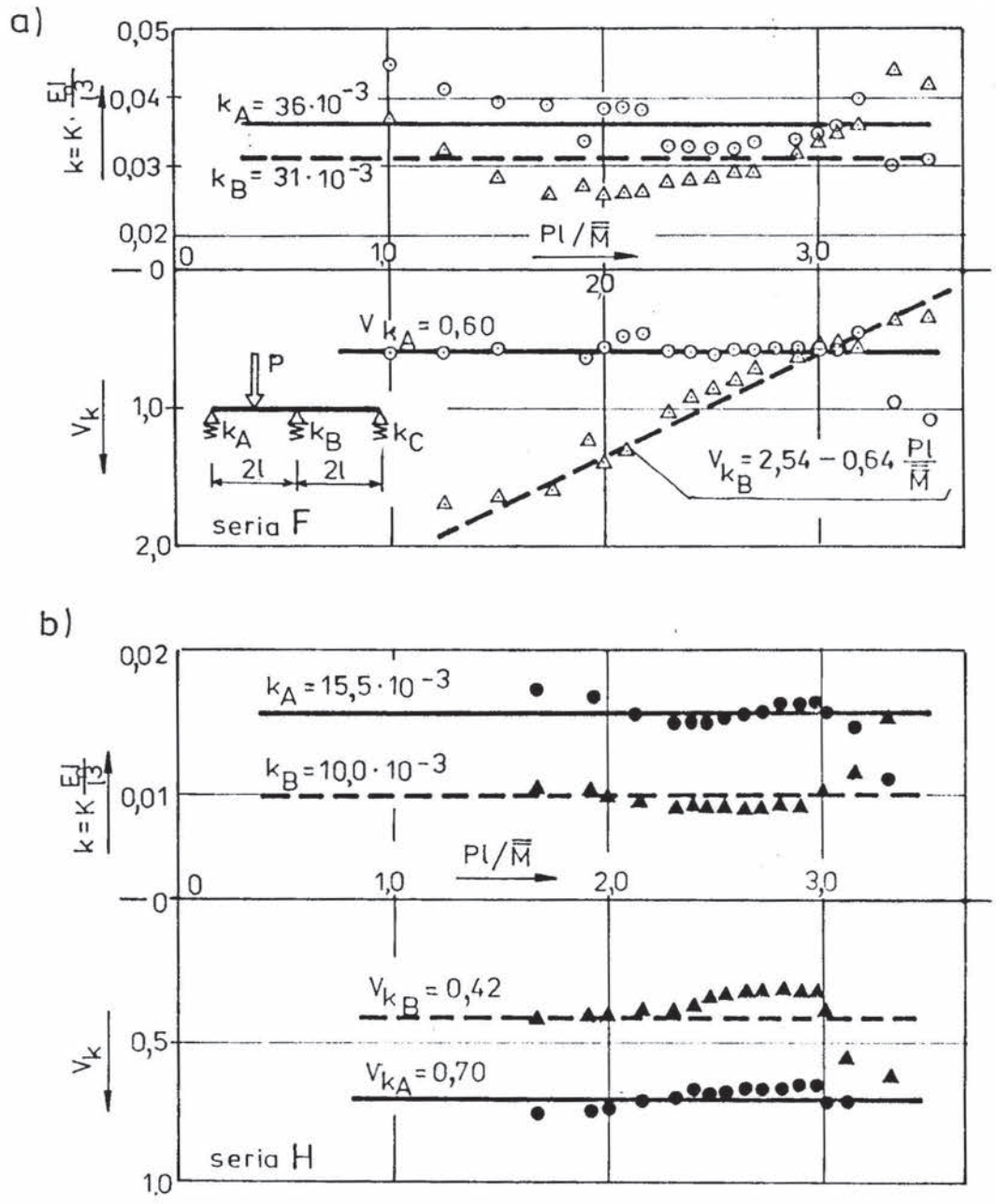
Podporę skrajną C (oznaczenia na rys. 37a) skonstruowano z siłomierza (rys. 6a). Przez to świadomie wprowadzono podatność tej podpory. Pomiary prowadzone w trakcie skalowania siłomierza (p.4) wykazały proporcjonalność obciążenia i ugięcia. Stała podatności siłomierza wynosi około $K_c = 50 \cdot 10^{-3}$ mm/kN ze współczynnikiem zmienności $V_{kc} = 0{,}1$. Wartości względne tej stałej $k = K \cdot E_o I : l^3$ będą różne w zależności od długości przęsła 2l oraz sztywności przekroju $E_o I$. Uwzględnienie średnich wartości dla danych serii belek daje $k_c = 146 \cdot 10^{-3}$ dla serii H oraz $k_c = 723 \cdot 10^{-3}$ dla serii F. Współczynniki zmienności podatności względnej są niezależne od geometrii belek: $V_{kc} = 0{,}1$.

Niezamierzone podatności: podpory środkowej K_B oraz skrajnej w przęśle obciążonym, wyznaczano na podstawie pomiarów wykonywanych w trakcie badań zasadniczych. Obliczano stosunek pomierzonego osiadania podpory i jej reakcji. Osiadanie podpór mierzono czujnikami zegarowymi o dokładności 0,001 mm, co dla średniego ugięcia podpory środkowej $Y_B = 0{,}04$mm, przy $P = 0{,}5\, P_{pl}$ - daje dokładność czujnika 3%. Reakcje podpór wyznaczono na podstawie odkształceń belki, w sposób opisany w poprzednim punkcie. Przy wyznaczaniu reakcji podpory środkowej popełniano błąd nie przekraczający 1% niemalże od początku obciążenia. Błąd pomiaru podatności podpory środkowej wynosi więc około 4% dla umiarkowanych wartości obciążeń. Dla podpory skrajnej oraz dla małego obciążenia błąd ten jest nieco większy.

Wartości oczekiwane oraz współczynniki zmienności podatności K_A podpory skrajnej oraz K_B podpory środkowej w funkcji względnego obciążenia belek serii F i H – podano na rys. 37.

---

*) Podatnością nazwano przemieszczenie wywołane jednostkową siłą (zgodnie z konwencją mechaniki budowli).



Rys. 37. Podatności K_A i K_B podpór belek dwuprzęsłowych:
a) serii F, b) serii H.

Podpory można traktować jako liniowo sprężyste, a wartości oczekiwane podatności są szacunkowo siedmiokrotnie mniejsze od podatności siłomierza.

Interesujący jest duży rozrzut statystyczny podatności podpór: rzędu kilkudziesięciu procent, a dla podpory środkowej belek serii F bliski 200% przy początkowych obciążeniach. Niewielki wkład do tego rozrzutu mają wymienione wyżej niedokładności pomiarów. Znaczne rozproszenie podatności podpór można

uważać za ogólną własność rzeczywistych konstrukcji, wynikającą przede wszystkim z niedopasowania geometrii konstrukcji do geometrii podpór.

W przedstawionych badaniach modelowych stworzono warunki niemal idealne do zniwelowania różnic w wysokościach podpór – poprzez regulowaną wysokość podpory skrajnej. Badania prowadzono na tej samej podporze bez zmian rozstawu wałków podporowych w danej serii belek. Nie występowały więc zmiany długości przęseł lub pierwotne luzy mechaniczne. W rzeczywistych konstrukcjach występuje większość wymienionych wyżej odstępstw od idealnego modelu teoretycznego. Dlatego rozrzuty podatności podpór mogą być znacznie większe.

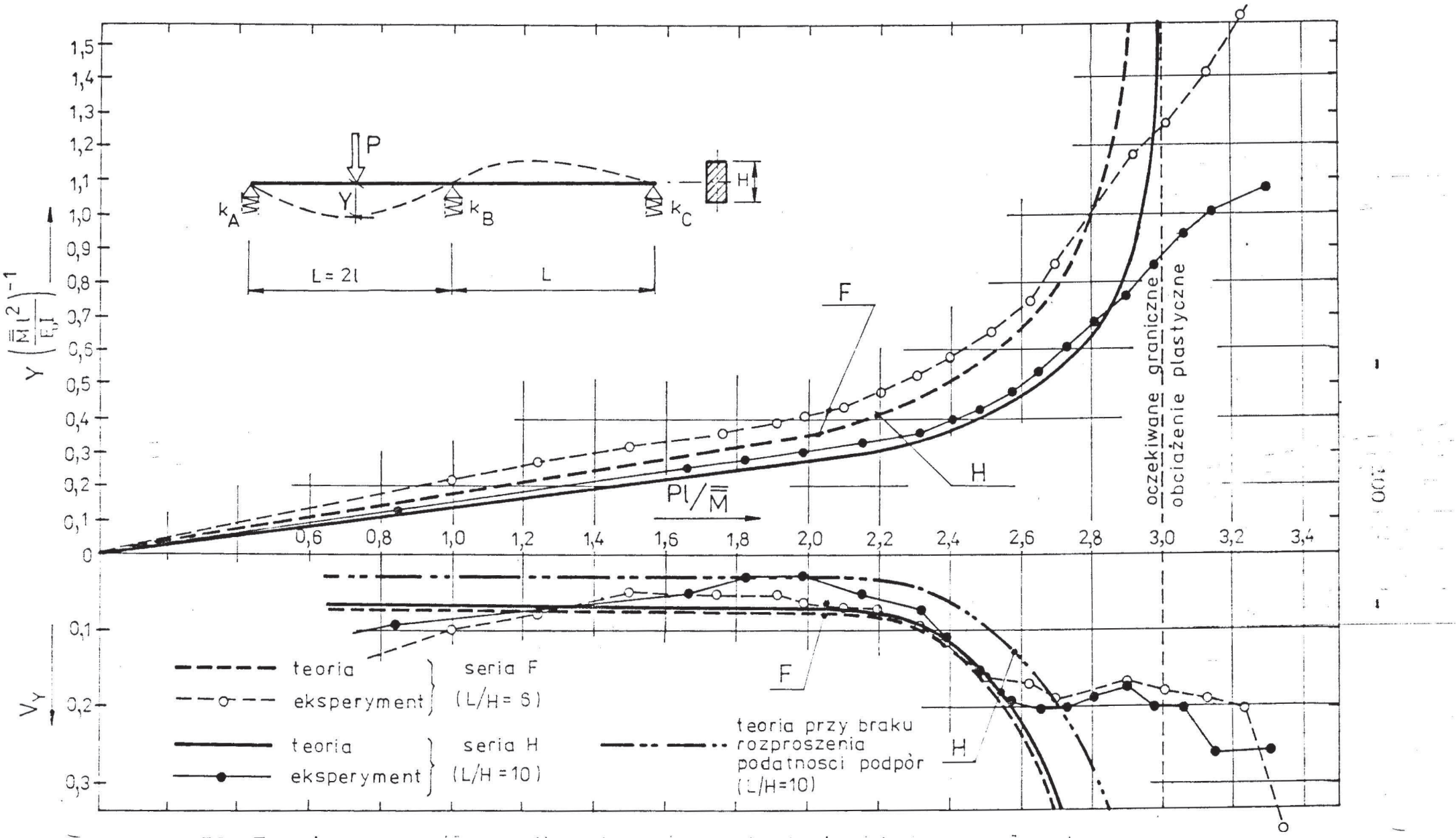
19.2. Proces przemieszczeń badanych belek dwuprzęsłowych i porównanie z teorią

Na rys. 38 pokazano trend oraz współczynniki zmienności przemieszczenia Y osi belek dwuprzęsłowych serii F i H pod siłą czynną. Linią przerywaną i ciągłą z kółkami przedstawiono wyniki pomiarów, natomiast ciągłą linią grubą odpowiednie obliczenia teoretyczne otrzymane z programu „LABEL'LCH".

W obliczeniach teoretycznych uwzględniono losową sprężystość podpór oszacowaną w p. 19.1.

Proces przemieszczeń belek dwuprzęsłowych ma wspólne cechy z przemieszczeniami belek jednoprzęsłowych (p.17.2), jak na przykład rozbieżność między oszacowaniami teoretycznymi i pomiarami na skutek działania naprężeń od docisku sił skupionych a także silne wzrastanie przemieszczeń oczekiwanych i ich rozproszenia w pobliżu granicznego stanu plastycznego belki.

Interesujący jest wpływ losowej sprężystości podpór na przemieszczenia belek. Na rys. 38 linią dwukropkową naniesiono teoretyczne rozproszenie ugięć, otrzymane przy założeniu deterministycznie podatnych podpór. Obliczone w ten sposób współczynniki zmienności przemieszczenia są szacunkowo o 60% mniejsze od współczynników zmienności otrzymanych przy losowych podatnościach podpór. Wynika stąd, że w konstrukcjach rzeczywistych większość rozrzutu statystycznego przemieszczeń oraz przekrojowych sił jest spowodowane rozproszeniem podatności podpór.



Rys. 30. Trend oraz współczynnik zmienności ugięcia belki dwuprzęsłowej

Przemieszczenia punktów belki w przęśle nieobciążonym, mierzone czujnikami zegarowymi (rys. 4) mają przebieg podobny do ugięcia belki pod siłą. Można więc stwierdzić, że przemieszczenie sprawcze konstrukcji jest to przemieszczenie dowolnego punktu fragmentu konstrukcji, który uczestniczy w procesie zniszczenia. Należy wspomnieć, że konstrukcja może ulec zniszczeniu lokalnemu lub globalnemu.

Pomiary wykazują dwa obciążenia, przy których występuje zwiększenie rozproszenia przemieszczeń. W p. 18.2. pokazano, że odpowiada to początkowi przebudowy struktury materiału (uplastycznienia) kolejno przekroju obok siły czynnej i przekroju przypodporowego. W obliczeniach teoretycznych występuje tylko jedno maksimum rozproszenia ugięcia. Różnica między oszacowaniami teoretycznymi i pomiarami spowodowana jest wzmocnieniem materiału rzeczywistego.

Zwiększenie losowego rozproszenia ugięcia przy małych obciążeniach spowodowane jest rozdzielczością czujników pomiaru przemieszczeń.

Należy zwrócić uwagę, że w obszarze sprężystym około 5% zmienności teoretycznej pochodzi od niedokładności aparatury stosowanej przy oznaczaniu modułu Younga w próbach rozciągania i ściskania.

20. Kryteria szacowania granicznej nośności belek na podstawie procesu przemieszczeń

Porównanie granicznej nośności plastycznej belek odczytanej z obrazów izochrom z przemieszczeniami charakterystycznymi daje możliwość ustalenia obiektywnych kryteriów szacowania granicznej nośności belek na podstawie procesu przemieszczeń w badaniach niszczących.

Podawany w literaturze [7, 13, 15 itd] brak stabilizacji przemieszczeń rzeczywistego ustroju zginanego nie może stanowić kryterium wyznaczania granicznej nośności plastycznej. W eksperymentach ze względu na wzmocnienie materiału obserwowano zawsze stabilizację przemieszczeń.

Przy obciążeniu o większej wartości do osiągnięcia równowagi statycznej potrzebny jest dłuższy okres czasu. Długość okresu stabilizacji zależy również od prędkości obciążania przy dochodzeniu do danego poziomu siły i jest krótsza przy mniejszej prędkości.

Nośność graniczna wyznaczona metodą stycznej (opis metody w uwadze na str. 15) jest znacznie mniejsza od P_{pl} odczytanego z obrazów izochrom.

Można wyróżnić dwa obiektywne kryteria szacowania granicznej nośności plastycznej na podstawie ścieżek równowagi belek: metodę ekstremum wariancji przemieszczenia oraz metodę prędkości krytycznej przemieszczenia.

Metodę ekstremum wariancji przemieszczenia podaną przez Kowala i in. [11], opisano w uwadze na str.15 . Metoda ta nadaje się do obciążeń ustalonych.

Prędkość krytyczną przemieszczenia można mierzyć wartością przyrostu przemieszczenia charakterystycznego w jednostce czasu obserwowaną po przyłożeniu obciążenia równego granicznej nośności plastycznej belki. W eksperymentach prowadzonych zarówno na belkach jednoprzęsłowych jak i dwuprzęsłowych systematycznie obserwowano, że krytyczną prędkością przemieszczenia jest 15 procentowy przyrost przemieszczenia w ciągu minuty od chwili statycznego przyłożenia obciążenia. Należy dodać, że dany poziom siły uzyskiwano przy prędkości obciążania ~0,1 kN/min. Kryterium powyższe można stosować do oceny granicznej nośności plastycznej jednej konstrukcji.

21. Losowa nośność plastyczna belek zginanych poprzecznie

Rozpatrzmy przekrój krytyczny belki zginanej poprzecznie i określmy jego losową nośność plastyczną. Załóżmy, że stan przekroju jednoznacznie opisuje wektor z momentem H i siłą poprzeczną Q jako współrzędnymi. Konsekwencją tego założenia jest pominięcie samorównoważących się naprężeń oraz naprężeń normalnych od docisku sił powierzchniowych. Odległość przekroju krytycznego od siły skupionej oszacowano w p. 11 pracy.

Losową nośność plastyczną przekroju belki zginanej poprzecznie mierzyć będziemy dwuwymiarowym wektorem losowym $\bar{\bar{N}}=[\bar{\bar{\Pi}},\bar{\bar{Q}}]$ Niech zmienna R integruje wszystkie imperfekcje materiałowe, natomiast zmienna H wszystkie niedoskonałości geometryczne przekroju. Współrzędne nośności przekroju opiszmy zależnościami:

$$\bar{\bar{\Pi}} = \beta \cdot R \cdot H^2, \qquad \bar{\bar{Q}} = \delta \cdot R \cdot H, \tag{18}$$

gdzie β i δ potraktujemy jako deterministyczne współczynniki zależne od kształtu przekroju oraz stosunku granicy plastyczności przy rozciąganiu do granicy plastyczności przy ścinaniu. Na przykład dla przekroju prostokątnego: $\beta = b:4$, $\delta = b:\alpha$ ($\alpha=2$ dla hipotezy Treski-Guesta), b- szerokość przekroju, H- wysokość przekroju, R- granica plastyczności przy rozciąganiu. Ogólnie H należy interpretować jako wymiar charakterystyczny przekroju, a R jako porównawczą granicę plastyczności.

Kowariancję zmiennych (18) można obliczyć bezpośrednio z definicji operatora wartości oczekiwanych bez zakładania postaci dystrybuanty $\bar{\bar{N}}$. W przypadku braku korelacji między R i H kowariancja ta wynosi

$$\operatorname{cov}(\bar{\bar{\Pi}},\bar{\bar{Q}}) = \beta\cdot\delta\,[\mu_{2R}(\mu_{3H}+3\mu_{2H}\bar{H}+\bar{H}^3)+\bar{R}^2(\mu_{3H}+3\bar{H}\mu_{2H})],$$

gdzie $\bar{X},\mu_{iX}$ określają wartość oczekiwaną oraz i-ty centralny moment zmiennej X. Przy założeniu braku skośności rozkładu H ($\mu_{3H}=0$) oraz małego rozproszenia H i R - z powyższej formuły wynika zależność na współczynnik korelacji funkcyjnej między $\bar{\bar{\Pi}}$ i $\bar{\bar{Q}}$

$$\varrho_{\bar{\bar{\Pi}},\bar{\bar{Q}}} = \sqrt{1-\frac{1}{(n+2/n)^2+1}}, \tag{19}$$

gdzie $n=V_R:V_H$ jest stosunkiem współczynników zmienności R i H.

Minimalny współczynnik (19) wynosi 0,94 przy $n=\sqrt{2}$. Tak silna korelacja między $\bar{\bar{M}}$ i $\bar{\bar{Q}}$ występuje przy braku korelacji między R i M. Tymczasem własności materiału i geometria przekroju są skorelowane statystycznie, a stopień tej korelacji określony na drodze badań statystycznych może być duży.

Rozsądnie jest przyjąć pełną korelację między plastycznym momentem i siłą poprzeczną. Wtedy rozkład losowego wektora $[\bar{\bar{M}},\bar{\bar{Q}}]$ można scharakteryzować jednowymiarowym rozkładem jednej ze współrzędnych, gdyż obie współrzędne powiązane są w pełni określoną zależnością funkcyjną.

Jeśli rozkład statystyczny nośności przekroju opiszemy dystrybuantą $F_{\bar{\bar{M}}}(\bar{\bar{M}})$, to

$$\bar{\bar{Q}} = k_Q \cdot \bar{\bar{M}}, \tag{20}$$

gdzie $k_Q = \delta : (\beta \bar{M})$ na podstawie (18) i przy założeniu $\varrho_{\bar{\bar{M}},\bar{\bar{Q}}} = 1$. Przekrój krytyczny realizacji belki nie ulegnie zniszczeniu plastycznemu, jeśli zachowana będzie relacja

$$\mathbb{M} = [M,Q] < \bar{\bar{\mathbb{M}}} = [\bar{\bar{M}},\bar{\bar{Q}}],$$

dla realizacji losowego wektora $\mathbb{M}$ i $\bar{\bar{\mathbb{M}}}$. Operator „$<$" zdefiniujmy przy użyciu równania plastycznej krzywej interakcji w postaci

$$f\left(\frac{M}{\bar{\bar{M}}}, \frac{Q}{\bar{\bar{Q}}}\right) - 1 < 0, \tag{21}$$

wiążącej realizacje sił przekrojowych i wytrzymałości przekroju. Zredukujmy nierówność(21) do postaci jednowymiarowej

$$M_* - \bar{\bar{M}} < 0, \tag{22}$$

w którym M_* jest realizacją zredukowanego momentu zginającego powiększonego przez siły styczne. Po odpowiednim przekształceniu lewych stron nierówności (21) i (22), moment M_* można zapisać w postaci

$$M_* = k_M \cdot M. \tag{23}$$

Współczynnik k_M zależy od k_Q oraz konkretnej postaci (21).

Na przykład dla przekroju prostokątnego i krzywej interakcji Sobotki $m^2 = -q^2 + 1$, otrzymany

$$k_M = \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{k_Q M}\right)^2} \quad , \tag{24}$$

gdzie $k_Q = 2:\bar{H}$ dla hipotezy plastyczności Treski.

Dla wspornika obciążonego siłą skupioną w odległości l od przekroju krytycznego wzór (24) przyjmie postać

$$k_M = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{H}}{2l}\right)^2} \quad .$$

Zgodnie z tym wzorem $k_M = 1{,}03$ dla $l:\bar{H} = 2$ i szybko maleje wraz ze zwiększającą się smukłością wspornika.

Współczynnik k_M jest deterministyczny dla populacji belek wytężonych deterministycznymi siłami przekrojowymi, jeśli funkcja f w równaniu interakcji $f(m,q)=1$ jest jednorodna *). Dotyczy to belek statycznie wyznaczalnych z nielosowym obciążeniem i geometrią układu, podlegających krzywej interakcji typu równania Sobotki. Jednakże ze względu na małe wartości współczynnika k_M, z wystarczającą dla praktyki dokładnością można przyjąć, że k_M jest deterministyczny również dla belek nie spełniających powyższych warunków.

W przypadku ustrojów statycznie niewyznaczalnych zachodzi redystrybucja sił przekrojowych i stosunek Q:M w przekroju nie jest stały dla różnych obciążeń. Dlatego ścisła wartość współczynnika k_M należałoby wyznaczać w procedurze iteracyjnej. Nie popełnimy jednak dużego błędu, jeśli oszacujemy wartość k_M w oczekiwanym stanie granicznym prostego zginania belki i przyjmiemy, że współczynnik ten jest stały dla dowolnego poziomu obciążenia. Podejście takie prowadzi do niewielkiego niedoszacowania nośności ustroju lub niedoszacowania jego bezpieczeństwa.

Powyższe rozważania dotyczą przekroju krytycznego belki, który występuje poza obszarem sprawczego działania naprężeń σ_y od docisku sił powierzchniowych (patrz p.11).

Jeśli zdecydujemy się na wyznaczanie przekrojów krytycznych na podstawie maksimów momentów zginających, to konieczność uwzględnienia sił stycznych będzie przypadkiem szczególnym. Współczynnik $k_M > 1$ w formule (23) należy obliczać w przypadku

*) Funkcja wielu zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots)$ jest jednorodna rzędu n, jeśli $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda^n f(x_1, x_2, \ldots)$.

braku redukującego wpływu naprężeń σ_y, to znaczy wtedy, gdy naprężenia σ_y od docisku i naprężenia σ_x od zginania są różnych znaków. Na przykład siła dociskająca (lub rozciągająca) może być przyłożona do pasa rozciąganego (lub ściskanego) albo niekorzystne naprężenia mogą być przekazywane na wysokości przekroju. Zwykle można przyjmować $k_{II}=1$. Szczególnej analizie należy natomiast poddać przekroje, dla których $q=\bar{Q}:\bar{Q}>0,5$.

Powyżej zredukowano wymiar probabilistycznego zagadnienia bezpieczeństwa plastycznego przekroju pręta zginanego poprzecznie z uwzględnieniem sił stycznych. Zamiast określenia prawdopodobieństwa zdarzenia opisanego nierównością (21) wystarczy określić prawdopodobieństwo zdarzenia (22). Formuła (22) ma postać analogiczną do klasycznych warunków probabilistycznych, umożliwiającą stosowanie procedur opracowanych dla ustrojów zginanych bez udziału sił stycznych.

Procedury szacowania niezawodności i granicznej nośności plastycznej konstrukcji poddanych zginaniu prostemu w których nośności plastyczne przekrojów krytycznych są niezależnymi zmiennymi losowymi podaje wielu autorów. Odpowiednie adaptacje twierdzeń nośności granicznej opracowali Augusti i Baratta [4, 5]. Metodę Barlow i Proschana [8, 9] adaptowali do potrzeb konstrukcji budowlanych Dziubdziela i Kowal [25]. Losową nośność konstrukcji należy znajdować w optymalizacji stochastycznej. Zestawienie zagadnień optymalizacji stochastycznej można znaleźć w pracy przeglądowej [73].

22. Uwagi i wnioski

W pracy oszacowano wpływ sił stycznych na proces zniszczenia, nośność oraz przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek zginanych poprzecznie. Szczególną uwagę zwrócono na wyjaśnienie zjawisk fizycznych w stanach krytycznych belek, na użytek szacowania przemieszczeń i nośności granicznej złożonych układów konstrukcyjnych.

W pracy wykazano lub udowodniono między innymi następujące tezy:

1. Istotny wpływ na mechanizm zniszczenia, kształty i propagację frontów plastycznych oraz nośność plastyczną belek zginanych poprzecznie mają naprężenia σ_y pochodzące od docisku sił powierzchniowych. Naprężenia σ_y powodują:
   1.1. Zwiększenie granicznej nośności plastycznej belki ponad wartość wynikającą z konwencjonalnych teoretycznych krzywych interakcji momentów zginających i sił poprzecznych.
   1.2. Brak pełnego uplastycznienia przekrojów pod siłą skupioną.
   1.3. Przesunięcie przekroju krytycznego belek o t od siły skupionej. Długość odcinka sprawczego działania naprężeń σ_y można szacować według formuł podanych w p.11.
2. W obszarch nie objętych redukującym działaniem naprężeń σ_y oczekiwane fronty plastyczne dobrze opisuje techniczna teoria prostego zginania belek. W tych obszarach naprężenia styczne nie wpływają praktycznie na kształt i propagację stref plastycznych.
3. Potwierdzono doświadczalnie, że obszary belek uplastycznione zginaniem (naprężeniami σ_x wywołanymi momentami zginającymi) nie przenoszą obciążeń poprzecznych. Wniosek ten, wynikający z badań fotomechanicznych, jest silnym argumentem za hipotezą rozkładu naprężeń stycznych w jądrze sprężystym przekroju i za stowarzyszoną z tą hipotezą krzywą interakcji zginania i ścinania.
4. Pośrednie metody szacowania granicznej nośności plastycznej belek (wykorzystujące pomiary procesu przemieszczeń lub propagacji stref plastycznych) nie dają statystycznych podstaw do wyboru hipotezy rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym belki i krzywej interakcji.

5. Realizacje frontów plastycznych mają kształt nieregularny. Nieregularność ta ma charakter losowy związany z rozmieszczeniem i kształtem krystalitów rzeczywistego materiału.

6. Dotychczasowe badania eksperymentalne interakcji zginania i ścinania obarczone były błędem, wynikającym z nieobiektywnego szacowania nośności plastycznej na podstawie przemieszczeń i nieuwzględniania wpływu naprężeń σ_y (pochodzących od docisku obciążeń powierzchniowych).

7. Plastyczną nośność graniczną konstrukcji można obiektywnie ocenić na podstawie zależności rzędu izochromy od obciążenia w sposób pokazany w p. 8 pracy lub na podstawie badania propagacji stref plastycznych (patrz p.9).

8. Plastyczną nośność konstrukcji można obiektywnie oszacować na podstawie procesu przemieszczeń według kryteriów opisanych w p. 20.

9. Graniczną nośność oraz przemieszczenia belek zginanych poprzecznie należy szacować z uwzględnieniem losowych właściwości materiału i geometrii konstrukcji a także losowej podatności podpór.

10. Model zastępczego elementu belki sprężysto-plastycznej można budować przy wykorzystaniu modelu Prandtla stali niskowęglowej, przyjmując za granicę plastyczności pierwsze minimum na statycznej ścieżce równowagi materiału rzeczywistego.

11. Zastępczy element belkowy w którym pominięto działanie naprężeń σ_y może służyć do szacowania przemieszczeń belek zginanych poprzecznie o smukłości $L/H > 10$. Natomiast do szacowania naprężeń oraz nośności plastycznej można go wykorzystywać w przekrojach belek obciążonych siłami skupionymi już o smukłości przęsła $L/H = 2$.

12. Naprężenia normalne σ_y od docisku sił powierzchniowych zwiększają przemieszczenia sprężyste belek szacunkowo w tym samym stopniu co naprężenia styczne.

13. Naprężenia styczne mają istotny wpływ na przemieszczenia belek (o dowolnej smukłości) przy obciążeniu bliskim granicznemu obciążeniu plastycznemu.

14. Losowe rozproszenie przemieszczeń belki blisko granicznego stanu plastycznego znacznie przekracza rozproszenie losowej sztywności przekrojów konstrukcji.

15. Uwzględnienie naprężeń stycznych likwiduje niespójność teorii wyznaczania nośności granicznej belek obciążonych siłami skupionymi i wykonanych z materiału Prandtla, gdyż siły styczne wywołują:
    15.1. Jednoczesność zakończenia procesu formowania przegubów plastycznych we wszystkich przekrojach poprzecznych belki, należących do minimalnego zbioru krytycznego.
    15.2. Nieskończone przemieszczenia w giętnym granicznym stanie plastycznym belki.

16. W belkach rzeczywistych pełne przeguby plastyczne formują się kolejno na skutek wzmocnienia materiału, a więc różnic chwilowych nośności przekrojów krytycznych (nośność przekroju jest parametryczną funkcją odkształceń punktów przekroju).

17. Zadanie obliczania niezawodności i losowej nośności granicznej belek zginanych z udziałem sił stycznych sprowadzić można, w sposób pokazany w p.21, do klasycznego sformułowania stochastycznej mechaniki zniszczenia konstrukcji poddanych prostemu zginaniu.

W pracy podano również wskazówki dla praktyki normalizacyjnej i projektowej, jak na przykład:

18. Redukujące działanie naprężeń σ_y, pochodzących od docisku obciążeń powierzchniowych, można wykorzystać do zwiększenia granicznej nośności plastycznej belek.

19. Elementy statycznie niewyznaczalnych konstrukcji, wytężone w zakresie liniowym, wykazują nieliniowość sił przekrojowych i lokalnych przemieszczeń w funkcji obciążenia całkowitego, jeśli współpracują z elementem pracującym w obszarze nieliniowym.

Literatura cytowana

1. Abramowicz M., Badanie elementów betonowych i żelbetowych przy zastosowaniu czułej warstwy powierzchniowej, Praca doktorska , Politechnika Warszawska, 1968
2. Aleksandrov A.I., Ob odnoj vozmožnoj scheme primenenija metoda fotouprugosti k issledowaniju ploskich uprugo-plastičeskich deformacij, Zawod.lab.,No5, 1952
3. Argyris J.H., Kelsey S., Energy theorems and Structural analysis, Butterworths, London 1960
4. Augusti G., Baratta A., Limit analysis of structures with stochastic strength variations, J.Struct.Division, Proc. ASCE 1,1, 1972
5. Augusti G., Probabilistic methods in plastic structural analysis, Nuclear Engineering and Design, 57, 2, 1980
6. Baker J.F., Horne M.F., Heyman J., The Steel Skeleton II. Plastic Behaviour, Cambridge University Press, Cambridge 1956
7. Baker J.F., Roderick J.W., Investigation into the Behaviour of Welded Rigid Structures, Further Tests on Beams and Portals, Trans.Inst.Welding, Vol.3, 2, 1940
8. Barlow R.E., Proschan F., Mathematical theory of Reliability, New York-London-Sydney, Wiley and Sons, Inc. 1965
9. Barlow R.E., Proschan F., Statistical Theory of Reliability and Live Testing, Probability Models. Holt, Rinehart and Winston Inc., New York 1975
10. Bezuchov N.I., K teorii plastičeskogo rasčeta na izgib, Vestnik Inženerov i Technikov, 10, Moskva 1936
11. Biegus A., Kowal Z., Seidel W., Investigation on the random ultimate bearing capacity of beams in bending, 7-th Congress on Material testing, Budapest 1978
12. Borkowski A., Statyczna analiza układów prętowych w zakresach sprężystym i plastycznym, PWN, Warszawa-Poznań 1985
13. Brandt K., Klee S., Tranglastversuche an gewaltzen Breitflanschprofilträgern, Der Stahlbau 48, 7, 1979
14. Britisch Standards Institution - Draft Standard Specification for the Structural Use of Steelwork in Building. Part 1, 1977, Part 2, 1978
15. Broude B.M., Predelnyje sostojanija stalnych balok, Gos. izdatelstva literatury po stroitelstvu i architekture, Moskva 1953
16. Burth K., Immenkötter K., Reckling K.A., Experimentelle Untersuchen über den Einfluss von Querkraften die Traglast kürzer Balken, Der Stahlbau, 3, 1980
17. Byczyński E., Jarzębowski W., Orłoś Z., Piątkowski A., Wacewicz H., Badanie metodą warstwy optycznie czułej odkształceń belki o przekroju skrzynkowym zamkniętym, Konf. Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Referaty t.2, Kraków--Krynica 1975

18. Chen W.P., Shomaker E.H., Collapse Loads of Centilever Beams under End Shear, Acta Mechanica, 13, 1972

19. Chodor L., Kowal Z., Teoretyczne oszacowanie integralnej nośności losowej belek zginanych, XXVII Konferencja KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1981

20. Cywiński Z., On collapse loads of hybrid I-beams, Staveb. Čas.,26, 2, 1978

21. ČSN 731401/1976, Navrhování ocelových konstrukcí.

22. D'Agostino J., Drucker D.C., Liu C.K., Mylanos C., An analysis of plastic behaviour of metals with bonded birefringent plastic, Proc.Soc.Exp.Stress Anal., vol.12, No2, 1955

23. Doroszkiewicz R.S., Elastooptyka, Warszawa-Poznań, PWN, 1975

24. Drucker D.C., The effect of shear on them plastic bending of beam, Journ.Appl.Mech., 23, 1956

25. Dziubdziela W., Kowal Z., Evalution of the Reliability of Structural Systems with Critical Sets having joint Elements in Common, Rozprawy Inżynierskie, 26, 3, 1978

26. Fujita Y., Kusuda Tm, Thürlimann B., Influence of Shear on the Full Plastic Moment of Beams, Report No 205, B 23, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University Bethlehem, Pa.,1955

27. Green A.F., Hundy B.B., Plastic Yielding of I-Beams, Engineering, July 1957

28. Hall J., Newmark N.M., Shear Deflection of Wide-Flange Steel Beams in the Plastic Range, Trans. ASCE, Paper No 2878, 1955

29. Hendry A.W., An Investigation of the Strength of certain Welded Portal Frames in Relation to Plastic Method of Design, Struct.Eng., London, December, 1950

30. Heyman J., Dutton V.L., Plastic Design of Plate Girders with Unstiffened Webs, Welding and Metal Fabrication, July 1954

31. Hodge P.G., Interaction curves for shear and bending of plastic beams, Journ.Appl.Mech. 24, 1957

32. Hodge P.G., Plastic analysis of structures, Mc Graw-Hill Book Co.Inc, New York-Toronto-London 1959

33. Horne M.R., Plastic theory of Structures, Pergamon Press, Oxford 1979

34. Horne M.R., The plastic theory of bending of milds steel beams with particular reference to the effect of shear forces, Proc.Roy.Soc.A, 1951

35. Instructions for Molding and Contouring Photolastic Sheets, Photolastic Inc. Bulletin IB-P-310

36. Johnston B.G., Yang C.H., Beedle L.S., An Evaluation of Plastic Analysis as Applied to Structural Design, Welding Journal, 32, 1963

37. Juhas P., Plastická únosnosť oceľových nosníkov namahaných ohybom a smykom, Staveb.Čas., 23, 10, 1975

38. Kapkowski J., Propagacja obszarów plastycznych w warunkach płaskiego stanu naprężeń, praca habilitacyjna , Politechnika Warszawska, prace Naukowe, seria Mechanika, z.50, Warszawa 1978

39. Kapkowski J., Stupnicki J., Badania sprężysto-plastycznych płaskich stanów naprężeń metodą pokryć optycznie czynnych, Archiwum Budowy Maszyn, t. XVIII, z.1, 1971

40. Klöppel K., Yamada M., Fliesspolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter Wirkung von Bigemoment, Normalkraft und Querkraft, Der Stahlbau 27, i1, 1958

41. Kowal Z., Chodor L., Rządkowski J., Theoretical Estimation of Parameters of Random Deflection of Bending Beams, Konferencja "Limit States of Metal Structures", Karlovy Vary, April 7-9, 1981

42. Kuske A., Separation of principal stresses by means of an improved shear-difference method, Experimental Mechanics, January, 1966

43. Kusuda T., Thürlimann B., Strength of Wide-Flange Beams under Combined Influence of Moment, Shear and Axial Force, Report No 248.1, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh Universitety, Bethlehem, Pa, 1958

44. Kuznecov B.A., Polarizacionnyj metod issledowanija malych plastičeskich deformacij, Zawod.Lab., No5, 1957

45. Landman F., Wood M.R., Photostress, Prod.Eng.,vol.27,No9, 1956

46. Langendock T., Einfluss der Querkraft auf die Grösse des Biegemoments das die plastischen Gelenke erzeugt,Bautechnik, Berlin, 33, 3, 1956

47. L'Hermite, L'experience et les theories nouvelles en resistance des materiaux, Paris, 1942

48. Linge J.R., Photoelastic measurement of surface strain, Aircraft Eng., vol. 32, No5, 1960

49. Łubiński M., Giżejowski M., Uwzględnienie wpływu naprężeń stycznych na stan graniczny belek zginanych, Inżynieria i Budownictwo 9-10, 1980

50. Massonnet C.E., Save M.A., Plastic Analysis and Design,v.1, Blaisdell Publishing Company, New York-Toronto-London 1963

51. Mc Dermott J.F., Plastic Bending of A 514 Stell Beams,Proc. ASCE, vol.95, J.St.Div., No9, 1969

52. Merunowicz Wł., Strzelecki A., Zastosowanie metody ograniczonej plastyczności w przypadku złożonego stanu naprężeń, Arch.Inż.Ląd., 1985

53. Mitinsky A.N., Shering stresses in elastic-plastic bending, Trudy Vsesojuznogo Naučno-Techničeskovo Obščestva Sudostrojenija III, 3, 1939

54. Mrázik A., Škaloud M., Tocháček M., Navrhování ocelových konstrukcí podle teorie plasticity, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha 1980

55. Mutermilch J., Olszewski E., Lubiński H., Wymiarowanie konstrukcji stalowych.Nowe metody, Wyd.Bud.i Archit., Warszawa 1956

56. Neal B.G., Limit load of a cantilever in plane stress, Engineering Plasticity, Cambridge University Press, 1968

57. Neal B.G., The plastic method of Structural Analysis,Chapman and Hall LTD, London 1956

58. Paľčevskij S.A.,Opredelenije nesuščej sposobnosti stalnych steržnej dlja nekotorych slučajev složnogo naprjažennego sostojanija. In: Kievskij inženerno-stroitelnyj Institut. Sbornik trudov VIII. Kijev-Lvov 1948

59. Papkovič P.R., Fundamentals of the theory of elastic-plastic statically determinate beams, Trudy Vsesojuznovo Naučno--Techničeskogo Obščestva Sudostrojenija 111,3,1939

60. Piechnik S., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa-Kraków 1980

61. Plastic Design in Stell. ASCE-Manuals and Reports on Engineering Practice, No41, New York 1971

62. Popov E.P., Willis J.A., Plastic Design of Cover-Plated Continuous Beams, J.Eng.Mech.Div.,Proc.ASCE 84, 1958

63. Prager W., Hodge Jr P.G., Theory of perfectly plastic solids, Wiley, New York 1951

64. Pratusevič J.A., Variacionnyje metody v stroitelnoj mechanike , OGIZ, Moskva-Leningrad 1948

65. Pugačev V.S., Teorija verojatnostej i matematičeskaja statistika, Nauka, Moskva 1979

66. Rachimbekova Z.N., Izgib balok za predelom uprugosti, AN Kazachskoj SSR, Izd.Nauka Kazachskoj SSR, Alma Ata 1980

67. Reckling K.A., Beitrag zum Traglastverfahren speziell für die Balkenbiegung mit Querkräften, Der Stahlbau,12,1975

68. Reckling K.A., Der ebene Spannungszustand bei der plastischen Balkenbiegung Festschrift, I.Szabo, Berlin-München-Düsseldorf, Wilhelm Ernst und Sohn 1971

69. Reckling K.A., Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag 1967

70. Richtlinien 008 zur Anwendung des Traglastverfahrens im Stahlbau. Deutscher Ausschauss für Stahlbau, März 1973

71. Roeder C.W., Popov E.G., Cyclic Shear Yielding of Wide-Flange Beams, J.Eng.Mech.Div.,ASCE,vol.104, Aug. 1978

72. Ržanicyn A.R., Rasčet sooruženij z učetom plastičeskich svojstv materiałov, Strojvojenmorizdat, Moskva 1949

73. Sikorski K.A., Zastosowanie programowania stochastycznego w teorii niezawodności konstrukcji, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1986

74. Šmiřák S., K otázce mezní plastické únosnosti průřezu v ohybu při současném působení smyku a tahu či tlaku. In: Sborník VUT Brno, č. 3-4, 1967

75. Snitko N.K., Ustojčivost' sterżnievych sistem, Strojizdat, Moskva 1952

76. Sobotka Z., Plasticity of Stell beams under combined bending, shear and normal load, Staveb. Čas, 23, 9, 1975

77. Sobotka Z., Theorie plasticity, t.I-II, CSAV, Praha 1954,1955

78. Strelbitskaya A.I., Issledovanie pročnosti tonkostennych sterżnej za predelom uprugosti. Izd.AN USSR, Kiev 1958

79. Strelbitskaya A.I., Jevsejenko T.I., Eksperimentalnoje issledovanie uprugo-plastičeskoj roboty tonkostennych konstrukcij, Naukova Dumka, Kiev 1968

80. Stüssi F., Über den Verlauf der Schubspannungen in auf Biegung beanspruchten Balken aus Stahl, Shweizeriche Bauzeitung, Zürich, 98, 2, 1931

81. Szczepiński W., The method of characteristics for determining principal directions by means of the isochromes only, Arch. Bud.Masz., 11, 1964

82. Szczepiński W., Szlagowski J., Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń, Biblioteka Mechaniki Stosowanej IPPT PAN, PWN, Warszawa 1985

83. Theocaris P.S., Experimental Solution of Elastic-Plastic Plane Stress Problems, J.Appl.Mech., December 1962

84. Washizu K., Variational methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, Oxford 1975

85. Windels R., Der Querkrafteinfluss bei plastischer Balkenbiegung, Stahlbau 3, 1974

86. Yang C.H., Beedle L.S., Behaviour of I- and W-Beams in Shear, Report No 205, B.21, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem Pa. 1951

87. Yang C.H., Plastic Behaviour of Continuous Beams. Thesis presented to Lehigh University Bethlehem, Pa., 1953

88. Życzkowski M., Combined Loadings in the Theory of Plasticity, PWN, Warszawa 1981.

Załącznik

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH PROCEDUR INTERAKCYJNYCH

Wykaz obejmuje wybrane programy mikro- i minikomputerowe opracowane i uruchomione przez autora na użytek niniejszej pracy. Znajdują się w bibliotece autora i dostosowane są do pracy na minikomputerze PDP 11-04 w systemie pomiarowym SOLARTRON lub mikrokomputerze ATARI lub SPECTRUM albo na kilku jednocześnie.

Program	Działanie	Uwagi
	PROGRAMY POMIAROWE (system SOLARTRON - PDP 11-04 z możliwością pomiaru czasu i wszelkich wielkości napięciowych oraz wstępnego przetwarzania wyników pomiaru)	
STALA'LCH	pomiar stałej czujnika napięciowego i interpolacja wielomianami potęgowymi lub Czebyszewa.	wzmianka na str. 27
PRASA1'LCH	pomiar statycznej ścieżki równowagi elementu rozciąganego.	wzmianka na str. 25
PRASA2'LCH	pomiar statycznej ścieżki równowagi elementu ściskanego bez wpływu smukłości.	wzmianka na str. 25
GRAZKA'LCH	zasadniczy program pomiarowy wykorzystywany w niniejszej pracy. Pomiary wielkości statycznych belek zginanych w zakresie sprężystym i plastycznym.	schemat blokowy - rys. 9
	PROGRAMY PRZETWARZANIA WYNIKÓW POMIARU	
STATYS1'LCH	opracowanie wyników pomiaru wielowymiarowego procesu stochastycznego z: interpolacją funkcjami sklejanymi bezpośrednich pomiarów, analizą wariancji, obliczaniem kwantyli rozkładu t-Studenta i interpolacją trendu wielomianami ortogonalnymi na zbiorze punktów (z testowaniem istotności składników wielomianu testem F-Snedecora).	schemat blokowy - rys. 10

Program	Działanie	Uwagi
STATYS2'LCH	parametry statystyczne wyników pomiarów: wielu obiektów, wykonywane w wielu punktach jednego obiektu i wielokrotnie w jednym punkcie.	
STATYS3'LCH	działanie podobne jak programu STATYS1'LCH, lecz bezpośrednie wyniki pomiarów są klasowane bez interpolacji i zapamiętywane w pamięci zewnętrznej. Możliwość uzupełniania danych przy następnym uruchomieniu komputera, a łączna ilość danych obrobionych może być nieograniczona.	
REGRES'LCH	krzywe regresji, otrzymywane metodą minimów kwadratów. Procedura REGRES1 - wielowymiarowa regresja wielomianami potęgowymi bez zamiany zmiennych. Procedura REGRES2 - jednowymiarowa regresja dowolnymi funkcjami; można narzucić dowolne warunki brzegowe.	
SPLIN'LCH	interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. Procedura SPLIN1 - zerowe drugie pochodne na końcach przedziału. Procedura SPLIN2 - zadane pierwsze pochodne na końcach przedziału interpolacji	wykorzystywane do opisu statycznych ścieżek równowagi
IZOCH1'LCH	kompensacja numeryczna obrazów izochrom	Schemat blokowy-rys.15
IZOCH2'LCH	rozdzielanie naprężeń z obrazów izochrom	Schemat blokowy-rys.23
	PROGRAMY OBLICZENIOWE	
TARRITZ'LCH	rozwiązywanie sprężystej tarczy metodą Castigliano - Ritza	Przykład zastosowania p. 16.3.
TARMES'LCH	rozwiązywanie sprężysto-plastycznej tarczy przemieszczeniową metodą elementów skończonych. Uwzględniono różnice ścieżek równowagi materiału przy rozciąganiu i ściskaniu. Uwzględniono osłabienie materiału. Program złożony z procedur: DANED, TARSPR, TARPL1, TARPL2.	Przykład zastosowania p. 16.2.
PLASEL'LCH	stochastyczna metoda elementów skończonych w zastosowaniu do nieliniowej analizy sprężysto-plastycznych belek. Złożony z procedur BELKA0, BELKA1, BELKA2.	Przykład zastosowania p. 19.2. p. 19.2.

LOSOWA NOŚNOŚĆ USTROJÓW ZGINANYCH Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ STYCZNYCH

Streszczenie

W pracy przeprowadzono doświadczalną i teoretyczną analizę wpływu sił stycznych na przemieszczenia i losową nośność plastyczną belek zginanych poprzecznie.

Fotomechaniczne badania doświadczalne pozwoliły określić rzeczywiste kształty i propagację frontów plastycznych. Oszacowano doświadczalne rozkłady naprężeń w przekrojach belki. Rozpoznano mechanizm zniszczenia. Określono losowy proces przemieszczeń belek jednoprzęsłowych oraz belek dwuprzęsłowych z uwzględnieniem losowej podatności podpór.

Stwierdzono, że znaczny wpływ na mechanizm zniszczenia, kształty i propagację stref plastycznych mają naprężenia σ_y od docisku sił powierzchniowych. W obszarach nie objętych redukującym działaniem naprężeń σ_y rozkłady naprężeń i kształty frontów plastycznych są zgodne z hipotezą jądra sprężystego. Weryfikuje to pozytywnie krzywe interakcji zginania i ścinania otrzymane na bazie hipotezy jądra sprężystego. Natomiast losowe wpływy w pomiarach obciążenia niszczącego belkę nie dają statystycznych podstaw do wyboru teoretycznej krzywej interakcji.

Pokazano, że sprężystą i plastyczną nośność graniczną konstrukcji można obiektywnie ocenić na podstawie izochrom. Ustalono kryteria według których można szacować graniczną nośność plastyczną na podstawie procesu przemieszczeń.

Wykazano, że nośność konstrukcji sprężysto-plastycznej z warunku ograniczenia przemieszczeń lub z warunku zniszczenia plastycznego należy szacować z uwzględnieniem losowych właściwości materiału i geometrii konstrukcji. Należy uwzględnić losowe rozproszenie podatności podpór.

Na drodze rozważań teoretycznych ustalono kryteria przydatności sprężysto-plastycznego zastępczego elementu belkowego do szacowania naprężeń i przemieszczeń z uwzględnieniem sił stycznych. Teoretyczną analizę problemu w zakresie sprężystym przeprowadzono przez minimalizację tarczowego funkcjonału Castigliano

metodą Ritza. Natomiast sprężysto-plastyczny płaski stan naprężeń analizowano metodą elementów skończonych . Uwzględniono różnice między ścieżkami równowagi materiału ściskanego i materiału rozciąganego a także uwzględniono osłabienie materiału. Pokazano, że trójkątny tarczowy element skończony nie daje dostatecznej dokładności szacowania przemieszczeń .

Zastosowanie ekstremalnych twierdzeń energetycznych oraz linearyzacji stochastycznej pozwoliło uzyskać teoretyczne oszacowania losowych przemieszczeń oraz sił przekrojowych sprężysto-plastycznych belek przy uwzględnieniu sił stycznych oraz losowego rozproszenia podatności podpór.

Pokazano, że siły styczne mają istotny wpływ na przemieszczenia belek przy obciążeniu bliskim nośności plastycznej. Naprężenia styczne likwidują niespójność teorii dla belek wykonanych z materiału Prandtla i obciążonych siłami skupionymi poprzez:

a) wywołanie nieskończonych przemieszczeń w giętnym granicznym stanie plastycznym,
b) jednoczesność uformowania pełnych przegubów plastycznych we wszystkich przekrojach belki należących do minimalnego zbioru krytycznego (minimalnego cięcia).

Pokazano sposób szacowania losowej, granicznej nośności plastycznej belek zginanych z udziałem sił stycznych.

RANDOM LOAD CAPACITY OF BENDING STRUCTURES TAKING INTO CONSIDERATION SHEAR FORCES

Summary

This work provides an experimental and theoretical analysis of the influence of shear forces on displacements and random plastic load capacity of beams bended transversely.

Photomechanical experimental tests permitted to determine the real shapes and propagation of plastic fronts. Experimental distributions of stresses in the beam intersections have been estimated. Failure mechanism has been identified. Random displacement process of one-span and two-span beams has been determined taking into consideration random deformability of supports.

It has been found that stresses σ_y by the pressure of surface forces exert a considerable influence on the failure mechanism, shapes and propagation of plastic zones. In areas which are not included in the reducing action of stresses σ_y, stress distributions and the shapes of plastic fronts are in agreement with the hypothesis of elastic nucleus. This provides a positive verification of bending and shearing interaction curves obtained on the basis of the elastic nucleus hypothesis. However, random influence in the measurements of beam failure load does not give a statistical reason to choose the theoretical interaction curve.

It has been shown that the elastic and plastic limit load capacity of a structure can be objectively estimated on the basis of isochromatic fringe patterns. Criteria have been established according to which plastic limit load can be estimated on the basis of a displacement process.

It has been demonstrated that the load capacity of an elastic-plastic structure from the condition of displacement restriction or from the condition of plastic failure should be estimated taking into consideration random properties of material and the structure geometry. Random variance of support deformability should be taken into consideration.

In theoretical considerations, criteria have been established for usability of the elastic-plastic substitute beam element to estimate stresses and displacements taking into consideration

shear forces. A theoretical analysis of the problem in the elastic range has been carried out by minimization of Castigliano's functional using Ritz's method. However, the elastic-plastic plane stresses has been analyzed by the finite element method. Differences between equilibrium paths of the compressed and tensioned material as well as material weakening have been taken into account. It has been shown that a triangular plate finite element (in-plane forces) does not give a sufficient accuracy of estimated displacement.

Application of extreme energy theorems and of stochastic linearization permitted to obtain theoretical estimations of random displacements and intersection forces of elastic-plastic beams taking into consideration shear forces and random variance of support deformability.

It has been shown that shear forces have a considerable influence on beam displacements under load approaching plastic load capacity. Shear stresses eliminate incoherence of the theory for beams made from Prandtl's material and loaded by cocentrated forces through:

a) causing infinite displacements in flexural plastic limit state,
b) simultaneity of forming full plastic hinges in all beam intersections belonging to the minimal critical set (minimal cut).

A technique of estimating random plastic load capacity of beams bended with the contribution of shear forces has been presented.

KEY WORDS:

- random process of inelastic transverse bending;
- shear forces;
- random limit load capacity;
- random displacements;
- photomechanics;
- finite element method.

Analiza dokumentacyjna

‹D Oszacowano wpływ sił stycznych na losowy proces zniszczenia, losową nośność graniczną i losowe przemieszczenia sprężysto-plastycznych belek zginanych poprzecznie.

Stwierdzono, że znaczny wpływ na proces zniszczenia belek mają naprężenia normalne wywołane dociskiem sił powierzchniowych. Pokazano, że siły styczne powodują jednoczesność uformowania się pełnych przegubów plastycznych we wszystkich przekrojach poprzecznych należących do minimalnego zbioru krytycznego belki wykonanej z materiału Prandtla. Fotomechaniczne badania doświadczalne pozwoliły określić: kształty i propagację frontów plastycznych, rozkłady naprężeń w przekrojach oraz nośność belek.

Wyniki badań doświadczalnych przemieszczeń i sił przekrojowych belek porównano z oszacowaniami teoretycznymi.

Imię i Nazwisko autora analizy

Leszek CHODOR

Słowa kluczowe

‹S losowy proces niesprężystego zginania poprzecznego, siły poprzeczne, losowa nośność graniczna, przemieszczenia losowe, fotomechanika, metoda elementów skończonych

**0480 * 00* _____

‹A_____ * B_____ * C_____ * D_____

*E_____ * F_____ * G_____ * H_____ ←←

Tylko PRL	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań	Potwierdzenie przyjęcia poprawki	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Dokumentacji
Wpisać TAK lub NIE						

ZGPWr. Zam. 1527/83 — 2000.