

Dobór elementów struktury konstrukcyjnej z warunku ustalonej niezawodności, mierzonej wskaźnikiem niezawodności β . Przykład liczbowy dla ramy statycznie niewyznaczalnej.

Leszek Chodor, Joanna Kłosowska

Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

Wydział Budownictwa i Architektury

Katedra Mechaniki Budowli, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych

Kielce, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-312 Kielce,

e-mail: biuro@chodor-projekt.net

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono analizę sprężysto-plastyczną ramy portalowej w sensie teorii niezawodności. W analizie niezawodnościowej przyjęto współczynnik zmienności obciążenia równy 15%, co szacunkowo odpowiada współczynnikowi obciążeń 1,5 wg Eurokodu 3, a także współczynnik zmienności wskaźnika wytrzymałości równy 7% oraz współczynnik zmienności granicy plastyczności stali równy 3,5%, co szacunkowo odpowiada współczynnikowi zmienności nośności na poziomie 7,83%. Z przeprowadzonych analiz wyciągnięto wnioski dotyczące niezawodności konstrukcji dla możliwych mechanizmów zniszczenia rozpatrując je jako niezależne i przy założeniu ich korelacji. Oszacowano współczynnik statystycznego zwiększenia niezawodności systemu równoległego.

Słowa kluczowe: Eurokod, szeregową strukturą niezawodnościową, równoległą strukturą niezawodnościową, mieszany model niezawodnościowy, wskaźnik niezawodności,

1. Wprowadzenie

Projekt konstrukcji wg zasad teorii niezawodności na różnych poziomach, sprowadza się najczęściej do kalibracji miar niezawodności niższego poziomu, za pomocą miar wyższego poziomu. Przykładowo w normie [1] podano zasady kalibracji częściowych współczynników bezpieczeństwa na podstawie zadanych współczynników niezawodności β . Podstawę do tej metody zawarto w normie [2].

W niniejszym opracowaniu zaprojektowano ramę portalową z warunku założonego poziomu niezawodności, mierzonego współczynnikiem bezpieczeństwa $\beta=3,8$, co odpowiada klasie niezawodności konstrukcji RC2 i projektowemu okresowi użytkowania 50 lat.

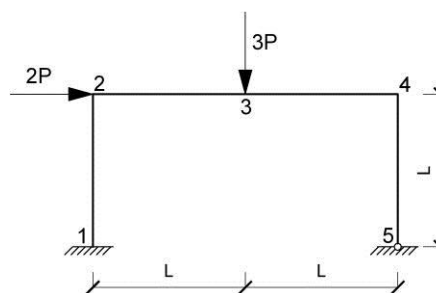
Nośność graniczną (plastyczną) systemu oszacowano z zastosowaniem kinematycznego twierdzenia nośności granicznej. Uzyskanie ścisłych wyrażeń na niezawodność lub prawdopodobieństwo zniszczenia dowolnych struktur jest zadaniem złożonym. Mechanizm zniszczenia struktury polega na zniszczeniu tylu elementów w strukturze, by cała struktura uległa zniszczeniu.

2. Postawienie zadania

Zaprojektować ramę portalową przedstawioną na rys 1, tak aby jej niezawodność mierzona współczynnikiem Hasofer-Linda wynosiła $\beta=3,8$.

Pręty struktury wykonane są ze stali S235. Przyjęto, że geometria kratownicy jest nielosowa.

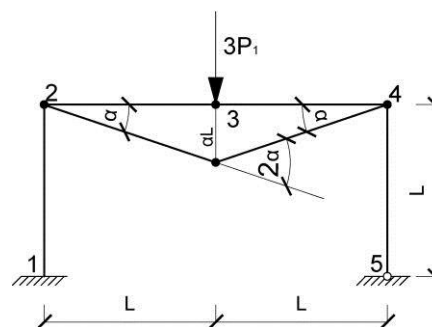
Na rys. 1 pokazano geometrię ramy oraz obciążenie w postaci sił skupionych zależnych od parametru obciążenia p , którego wyznaczenie wartości granicznej, stanowi cel zadania.



Rys.1. Schemat ramy-mieszanego modelu niezawodnościowego

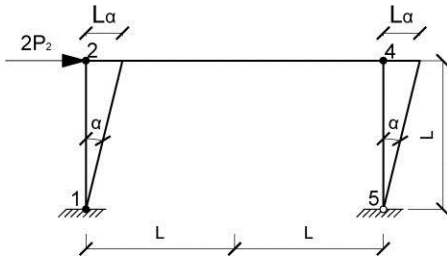
3. Mechanizmy Zniszczenia Plastycznego

Mechanizm zniszczenia struktury polega na zniszczeniu tylu elementów w strukturze, by cała struktura uległa zniszczeniu. Dla zadanej ramy, na podstawie teorii nośności granicznej ustalono trzy mechanizmy zniszczenia: MK1, MK2, MK3, które tworzą różne zbiory elementów krytycznych. Dla zidentyfikowanych mechanizmów (cięć systemu), zapisano równania prac wirtualnych, uzyskując trzy marginesy bezpieczeństwa.



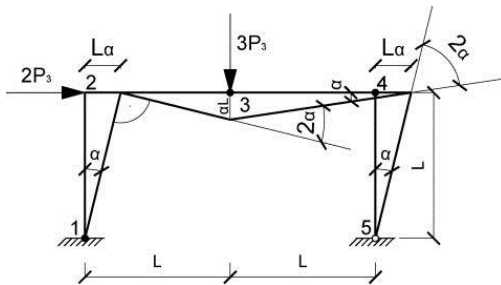
Rys.2. Mechanizm zniszczenia plastycznego ramy MK1- mechanizm belkowy

Równanie prac wirtualnych dla mechanizmu MK1
 $3p_1 \cdot \alpha L = \alpha M_2 + 2\alpha M_3 + \alpha M_4$
 gdzie :
 M_i - momenty plastyczne przekroju i-tego,
 p_1 - parametr obciążenia dla mechanizmu 1-szego.



Rys.3. Mechanizm zniszczenia plastycznego ramy MK2- mechanizm przechyłowy

Równanie prac wirtualnych dla mechanizmu MK2
 $2p_2 \cdot \alpha L = \alpha M_1 + \alpha M_2 + \alpha M_4$
 gdzie :
 p_2 - parametr obciążenia dla mechanizmu 2-go.



Rys.4. Mechanizm zniszczenia plastycznego ramy MK3- mechanizm mieszany

Równanie prac wirtualnych dla mechanizmu MK3
 $2p_3 \cdot \alpha L + 3p_3 \cdot \alpha L = \alpha M_1 + 2\alpha M_3 + 2\alpha M_4$
 gdzie :
 p_3 - parametr obciążenia dla mechanizmu 2-go.

Z analizy mechanizmów zniszczenia wynika, że dla poszczególnych parametrów obciążeń uzyskujemy następujące minimalne cięcia systemu:

- p_1 - mechanizm 1, oznaczający wystąpienie przegubów plastycznych w węzłach nr 2,3,4
- p_2 - mechanizm 2, oznaczający wystąpienie przegubów plastycznych w węzłach nr 1,2,4
- p_3 - mechanizm 3, oznaczający wystąpienie przegubów plastycznych w węzłach nr 2,3,4

Z rozwiązania równań prac wirtualnych w stanach granicznych, otrzymujemy parametry obciążenia:

$$p_1 = \frac{1}{3L} (M_2 + 2M_3 + M_4)$$

$$p_2 = \frac{1}{2L} (M_1 + M_2 + M_4)$$

$$p_3 = \frac{1}{5L} (M_2 + 2M_3 + 2M_4)$$

4. Nośności plastyczne przekrojów (przegubów plastycznych, elementów sprawczych)

Założono, że momenty plastyczne nośności M_1, M_2, M_3, M_4 , są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi. Przyjęto, że

wartości średnie nośności i odchylenia standardowe są stałe:
 $\mu_{NRi}, \sigma_{NRi} = \text{const.}$

Wartości oczekiwane nośności poszczególnych prętów $\mu_{NRi} = W_{pl} \cdot f_y$ przyjmowano jako zmienne losowe o wartości oczekiwanej równej iloczynowi wartości oczekiwanej f_y i wskaźnika plastycznego wytrzymałość, ze współczynnikiem zmienności równym $v_{NRi} = 7,83\%$, co szacunkowo odpowiada przypadkowi, gdy współczynnik granicy plastyczności wynosi 3,5 %, a współczynnik zmienności wskaźnika plastyczności wytrzymałości jest równy 7 %,

$$v_{NRi} = \sqrt{v_{Wpl}^2 + v_{f_y}^2} = \sqrt{7^2 + 3,5^2} = 7,83\%.$$

Tabela 1 zawiera obliczenie nośności plastycznej dla przekrojów, z których zaprojektowano konstrukcję.

W tabeli 2 oszacowano nośności plastyczne elementów sprawczych- przegubów plastycznych.

5. Model niezawodnościowy

Rama stanowi ustrój statycznie niewyznaczalny. Do jej zniszczenia w każdym z mechanizmów, będącym przykładem równoległego modelu niezawodnościowego, MK1, MK2, MK3 potrzeba uplastycznienia każdego przekroju należącego do danego mechanizmu. Losowa nośność graniczna (plastyczna) konstrukcji o elementach sprawczych połączonych równolegle wynosi $N = \sum_{i=1}^n a_i \cdot N_{Ri}$, czyli stanowi sumę wagową nośności poszczególnych elementów sprawczych. W tabelicy 3 zestawiono wartości współczynników a_i (wag) dla poszczególnych mechanizmów i elementów sprawczych.

Z punktu widzenia niezawodności oczekiwana nośność graniczna i jej odchylenie standardowe, oszacowano z formuły:

$$N = \sum_{i=1}^n a_i N_{Ri}, \quad \sigma_N = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}.$$

W tabelach 4,5,6 obliczono parametry nośności dla możliwych mechanizmów zniszczenia konstrukcji.

Oczekiwana nośność graniczna w przypadku pierwszego możliwego mechanizmu zniszczenia wynosi $N = 23,44$ kNm, a jej odchylenie standardowe $\sigma_N = 1,73$ kNm. Oczekiwana nośność graniczna dla drugiego mechanizmu zniszczenia wynosi $N = 17,95$ kNm, jej odchylenie standardowe $\sigma_N = 0,81$ kNm. Oczekiwana nośność graniczna w przypadku mechanizmu trzeciego wynosi $N = 16,60$ kNm, jej odchylenie standardowe $\sigma_N = 0,84$ kNm.

6. Mieszany model niezawodnościowy

W praktyce inżynierskiej mamy najczęściej do czynienia ze złożonymi strukturami niezawodnościowymi, polegającymi na połączeniu w szereg struktur równoległych lub równoległym połączeniu łańcuchów lub też innych struktur i na dodatek z elementami wspólnymi w różnych strukturach.

W przypadku- struktury z powielonymi układami statycznie niewyznaczalnymi, prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy można obliczyć z zależności $P_s = [1 - (1 - P_{si})^m]^n$, gdzie m jest liczbą elementów w każdej strukturze równoległej, a n liczbą ogniw w łańcuchu.

Dla nieskorelowanych zdarzeń (mechanizmów zniszczenia) prawdopodobieństwo zniszczenia układu wynosi:

$$p_f = p_1 + p_2 + p_3 \dots + p_n - p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots \quad (1)$$

Tab. 1 Projekt systemu konstrukcyjnego

Przekrój	Oczekiwany wsk. pl. wytrzyma. W_{pl} [cm ³]	Współczynnik zmienności v_{wpl} [%]	Oczekiwana granica pl. stali f_y [Mpa]	Wsp. zmienności granicy pl. stali v_{fy} [%]	Wartość oczekiwana nośności $N_{Ri}=W_{pl} \cdot f_y$ [kNm]	Współczynnik zmienności nośności v_{NR} [%]	Odchylenie stand. nośności σ_{NRi} [kNm]
Rygiel HEB 200	642,0	7	215	3,5	138,03	7,8262	10,80
Słup1 I 220	324,0	7	215	3,5	69,66	7,8262	5,45
Słup2 HEB 160	354,0	7	215	3,5	76,11	7,8262	5,96

Tab. 2 Nośność plastyczna przekrojów krytycznych

Przekrój	element	Wartość oczekiwana nośności $\mu_{NRi}=W_{pl} \cdot f_y$ [kNm]	Odchylenie stand. nośności σ_{NRi} [kNm]
1	słup	69,66	5,45
2	naroże	69,66	5,45
3	rygiel	138,03	10,80
4	naroże	76,11	5,96

Tab. 3 Wagi nośności poszczególnych elementów sprawczych

Mechanizm zniszczenia	Waga nośności poszczególnych elementów sprawczych			
	a_1 [1/m]	a_2 [1/m]	a_3 [1/m]	a_4 [1/m]
MK1	0,0000	0,0556	0,1111	0,0556
MK2	0,0833	0,0833	0,0000	0,0833
MK3	0,0333	0,0000	0,0667	0,0667

Tab. 4 Parametry nośności w przypadku 1-go mechanizmu zniszczenia

Przekrój	a_i [1/m]	μ_{NRi} [kNm]	σ_{NRi} [kNm]	Oczekiwana nośność graniczna $a_i \cdot \mu_{NRi}$	$a_i^2 \cdot \sigma_{NRi}^2$
1	0,0000	69,66	5,45	0,0000	0,0000
2	0,0556	69,66	5,45	3,8700	0,0462
3	0,1111	138,03	10,80	15,3367	2,9039
4	0,0556	76,11	5,96	4,2283	0,0552
Suma				23,4350	3,0053

Tab. 5 Parametry nośności w przypadku 2-go mechanizmu zniszczenia

Przekrój	a_i [1/m]	μ_{NRi} [kNm]	σ_{NRi} [kNm]	Oczekiwana nośność graniczna $a_i \cdot \mu_{NRi}$	$a_i^2 \cdot \sigma_{NRi}^2$
1	0,0833	69,66	5,45	5,805	0,2064
2	0,0833	69,66	5,45	5,805	0,2064
3	0,0000	138,03	10,80	0	0,0000
4	0,0833	76,11	5,96	6,3425	0,2464
Suma				17,9525	0,6592

Tab. 6 Parametry nośności w przypadku 3-go mechanizmu zniszczenia

Przekrój	a_i [1/m]	μ_{NRi} [kNm]	σ_{NRi} [kNm]	Oczekiwana nośność graniczna $a_i \cdot \mu_{NRi}$	$a_i^2 \cdot \sigma_{NRi}^2$
1	0,0333	69,66	5,45	2,322	0,033024065
2	0,0000	69,66	5,45	0	0
3	0,0667	138,03	10,80	9,202	0,518645425
4	0,0667	76,11	5,96	5,074	0,157691041
Suma				16,5980	0,7094

Zidentyfikowane minimalne cięcia systemu są skorelowane – mają elementy wspólne, w takim przypadku oszacowanie nośności i niezawodności systemu jest skomplikowane.

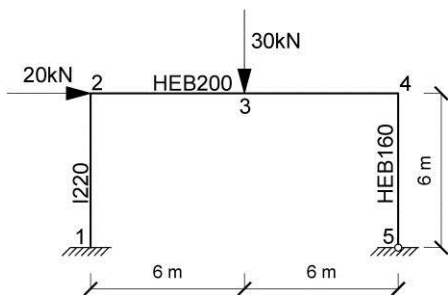
W przypadku skorelowanych mechanizmów prawdopodobieństwo zniszczenia układu wyznaczone jest poprzez stosowanie pewnych oszacowań, najprostsze z nich zakłada, że prawdopodobieństwo zniszczenia całej konstrukcji będzie mniejsze niż maksymalne prawdopodobieństwo uzyskane dla poszczególnych mechanizmów i nie większe niż suma prawdopodobieństw zniszczenia możliwych mechanizmów:

$$\max p_{jk} \leq p_f \leq p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k \tag{2}$$

7. Prawdopodobieństwo zniszczenia i wskaźnik β dla poszczególnych mechanizmów

Wartości oczekiwane oraz wariancje marginesów bezpieczeństwa dla kolejnych mechanizmów zniszczenia obliczono przy założeniu, że wymiary ramy i sposób obciążenia konstrukcji jest zgodny z rys. 5.

Przyjęto, że oczekiwana wartość parametru obciążenia wynosi 10 kN, a współczynnik zmienności obciążenia wynosi 15%, co szacunkowo odpowiada współczynnikowi obciążeń 1,5.



Rys.5. Schemat ramy

W tabelach 7, 8, 9 obliczono prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji dla kolejnych możliwych mechanizmów zniszczenia oraz odpowiadające im wskaźniki niezawodności Hasofera- Linda.

8. Prawdopodobieństwo zniszczenia i wskaźnik β dla całego układu

Przy założeniu, że cięcia krytyczne nie mają wspólnych elementów sprawczych, oszacowana prawdopodobieństwo zniszczenia układu konstrukcyjnego dokonano w oparciu o formułę (1) i otrzymano $p_f = 6,424 \cdot 10^{-5}$, a współczynnik Hasofera-Linda (indeks niezawodności) w przestrzeni normalnych, standaryzowanych zmiennych losowych, będący odwrotną dystrybuantą prawdopodobieństwa zniszczenia, obliczono z formuły $\beta = -\varphi^{-1}(p_f)$. Dla przykładowej ramy wynosi $\beta = -\varphi^{-1}(6,424 \cdot 10^{-5}) = 3,829$.

Korzystając z zależności (2), czyli uwzględniając korelacje poszczególnych mechanizmów zniszczenia, uzyskano: $\max p_f = 6,267 \cdot 10^{-5} \leq p_f \leq p_{f1} + p_{f2} + p_{f3} = 6,424 \cdot 10^{-5}$, tym samym: $3,829 \leq \beta \leq 3,835$.

Tab. 7 Oszacowanie wskaźnika niezawodności konstrukcji dla 1-go mechanizmu zniszczenia

Obciążenie oczekiwane μ_Q	Odchylenie standardowe obciążenia σ_Q	Oczekiwana nośność konstrukcji N	Odchylenie standardowe nośności σ_N	Margines bezpieczeństwa μ_g	Odchylenie standardowe marginesu bezpieczeństwa σ_g	$t = \mu_g / \sigma_g$	Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji p_f
10,000	1,500	23,435	1,734	13,435	2,292	5,861	2,306E-09
Wskaźnik niezawodności β							5,861

Tab. 8 Oszacowanie wskaźnika niezawodności konstrukcji dla 2-go mechanizmu zniszczenia

Obciążenie oczekiwane μ_Q	Odchylenie standardowe obciążenia σ_Q	Oczekiwana nośność konstrukcji N	Odchylenie standardowe nośności σ_N	Margines bezpieczeństwa μ_g	Odchylenie standardowe marginesu bezpieczeństwa σ_g	$t = \mu_g / \sigma_g$	Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji p_f
10,000	1,500	17,953	0,812	7,953	1,706	4,662	1,562E-06
Wskaźnik niezawodności β							4,662

Tab. 9 Oszacowanie wskaźnika niezawodności konstrukcji dla 3-go mechanizmu zniszczenia

Obciążenie oczekiwane μ_Q	Odchylenie standardowe obciążenia σ_Q	Oczekiwana nośność konstrukcji N	Odchylenie standardowe nośności σ_N	Margines bezpieczeństwa μ_g	Odchylenie standardowe marginesu bezpieczeństwa σ_g	$t = \mu_g / \sigma_g$	Prawdopodobieństwo zniszczenia konstrukcji p_f
10,000	1,500	16,598	0,842	6,598	1,720	3,835	6,267E-05
Wskaźnik niezawodności β							3,835

9. Zjawisko statystycznego zwiększenia niezawodności systemu równoległego

Jeżeli minimalne cięcia systemu nie posiadałyby elementów wspólnych, to wówczas konstrukcję można by traktować jako szeregowo połączone mechanizmy zniszczenia, a w rozpatrywanym przypadku o nośności decydowałby trzeci mechanizm zniszczenia: $N = \min N_k$, dla którego oczekiwana nośność graniczna wynosi $N = 16,60$ kNm, a jej odchylenie standardowe $\sigma_N = 0,84$ kNm.

Dla wskaźnika niezawodności $\beta = 3,8$, odpowiadającemu klasie niezawodności konstrukcji RC2 i projektowemu okresowi użytkowania 50 lat, nośność obliczeniową systemu można oszacować wg formuły: $N_d = N \cdot \beta \cdot \sigma_N$, co daje $N_d = 16,60 \cdot 3,8 \cdot 0,84 = 13,40$ kN.

Na założonym poziomie niezawodności obliczeniowa nośność i-tego elementu wynosi: $N_{di} = N_i \cdot \beta \cdot \sigma_{Ni}$, uzyskane wartości dla poszczególnych przekrojów krytycznych zestawiono w tabeli 10. Nośność systemu, obliczona z nośności obliczeniowych poszczególnych przekrojów wynosi:

$$\bar{N}_d = \sum_{i=1}^n a_i \cdot N_{di} = 11,66 \text{ kN.}$$

Tab. 10 Oszacowanie wskaźnika niezawodności konstrukcji dla 3-go mechanizmu zniszczenia

Przekrój	a_i [1/m]	N_{Ri} [kNm]	σ_{NRi} [kNm]	Obliczeniowa nośność i-tego elementu N_{di} [kN]	$a_i \cdot N_{di}$
1	0,0333	69,66	5,452	48,943	1,63
2	0,0000	69,66	5,452	48,943	0,00
3	0,0667	138,03	10,803	96,980	6,47
4	0,0667	76,11	5,957	53,475	3,57
Suma [kN]					11,66

10. Wnioski

Niezawodność układu zależy od losowej zmienności obciążenia i nośności każdego elementu wchodzącego w skład układu, rodzaju rozkładu, a także struktury niezawodnościowej.

Nośność systemu obliczona jako kwantyl globalny jest większa od sumy kwantyli lokalnych, co jest określane statystycznym efektem zwiększenia nośności obliczeniowej system równoległego. Dla analizowanej ramy statystyczny efekt zwiększenia nośności obliczeniowej wynosi:

$$\frac{N_d}{\bar{N}_d} = \frac{13,40}{11,66} = 1,15$$

Struktury niezawodnościowe są skorelowane, ponieważ najczęściej posiadają elementy wspólne. Uzyskanie ścisłych wyrażeń na niezawodność lub prawdopodobieństwo zniszczenia dowolnych struktur jest zadaniem złożonym, dlatego ważne są oszacowania górne i dolne prawdopodobieństwa zniszczenia.

Przy założeniu, że minimalne cięcia systemu nie mają wspólnych elementów oszacowanie nośności granicznej konstrukcji (pkt 9), czyli wybierając $N = \min N_k$, uzyskujemy oszacowanie parametru obciążenia od dołu, faktyczna nośność plastyczna może być większa.

W rozpatrywanym przykładzie o nośności decyduje mechanizm mieszany, co jest najczęściej obserwowane w praktyce inżynierskiej.

Literatura

- [1] PN-EN 1990:2004 *Podstawy projektowania konstrukcji.*
- [2] PN-ISO 2394:2000 *Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych.*
- [3] PN-EN 1993-1-1:2006/AC:2009 *Projektowanie konstrukcji stalowych.*
- [4] Murzewski J., *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa 1989.
- [5] Bobrowski D., *Modele i Metody Matematyczne Teorii Niezawodności*, Wydawnictwo Naukowo techniczne, Warszawa 1985.

