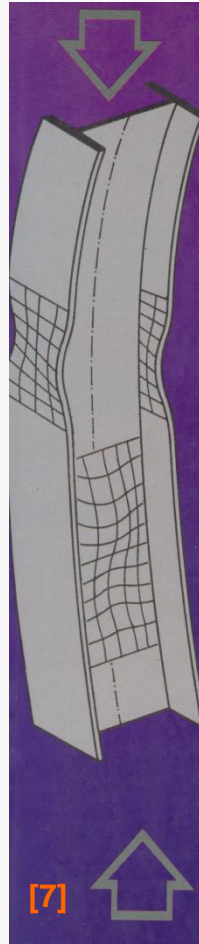


Wykład 7: Pręty cienkościenne i nośność nadkrytyczna

Leszek CHODOR dr inż. bud, inż.arch.

leszek@chodor.co



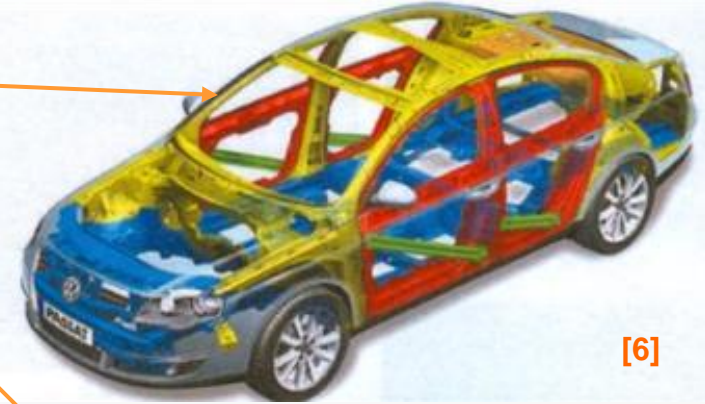
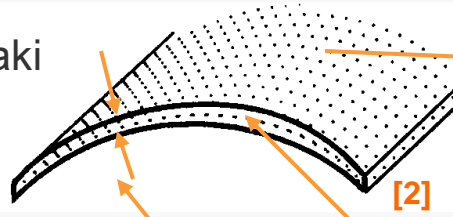
Literatura:

- [1] Piechnik St., Wytrzymałość materiałów dla wydziałów budowlanych, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [2] Piechnik St., Pręty cienkościenne- otwarte, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2000
- [3] Makelainen P. (Ed), Light-Weight Steell and Aluminium Structures, 4-th Int. Conf. on Steel and Espoo FIN , Elsevir 1999
- [4] Kształtowniki stalowe gięte, Poradnik, , Praca zbiorowa, Wydawnictwo Śląsk, 1983
- [5] Bródka J, i in. Kształtowniki gięte. Poradnik, PWT, Warszawa, 2006
- [6] Kotelko M., Nośność i mechanizmy zniszczenia konstrukcji cienkościennych, W N-T, Warszawa 2011
- [7] Biegus A., Nośność graniczna prętowych konstrukcji stalowych , PWN, Warszawa-Wrocław 1997

Pręty cienkościennie i teorie nośności

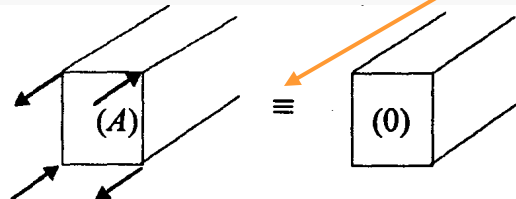
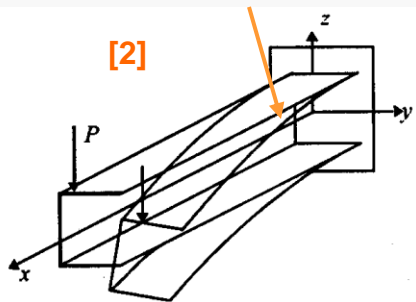
Pręt cienkościenny jest to taki pręt, w którym jeden z wymiarów poprzecznych (grubość ścianki) jest nieporównalnie mały w stosunku do drugiego. Precyzyjnie:
(c-długość linii środkowej mierzona pomiędzy dwoma skrajnymi punktami tej linii.

L-długość pręta
W ramach teorii Własowa można wyjaśnić zjawisko zwichtwienia



$$\delta \leq \frac{1}{8} c \wedge c \leq \frac{1}{8} L$$

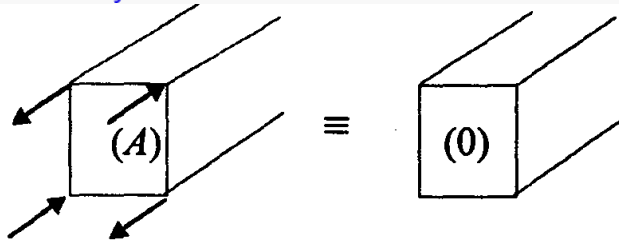
Teoria prętów cienkościennych różni się teorią od teorii od teorii litego, ponieważ podstawowe hipotezy upraszczające :
1) założenie płaskich przekrojów **Bernoulliego NIE** jest spełnione, czyli podstawowy wzór nie obowiązuje bez zastrzeżeń $\sigma = M / I_y z$
2) zasada **de Saint Venanta NIE** obowiązuje



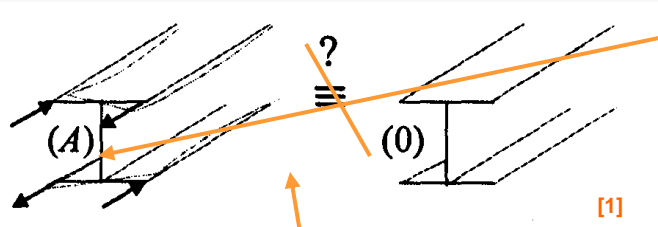
Podstawowe teorie prętów cienkościennych

1. Teoria Własowa (1940)
2. Teoria Wintera (nośności nadkrytycznej, pokrytycznej)
3. Teoria załomów

Pręty cienkościenne Teoria Własowa {1}



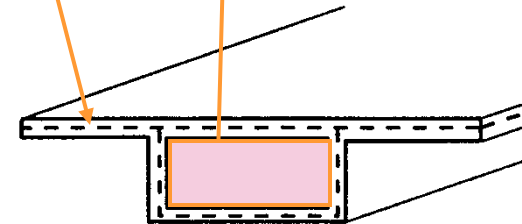
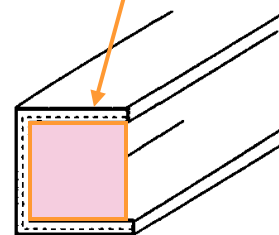
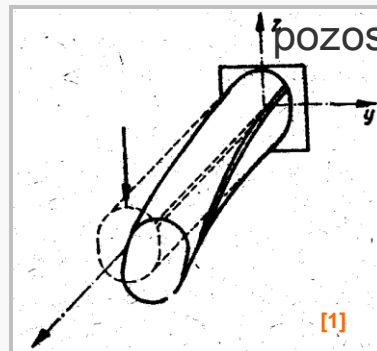
W prętach cienkościennych należy rozpatrywać nie tylko statyczną, ale również **kinematyczną równowagę** układów sił. W tym celu wprowadzimy pojęcie siły przekrojowej – **bimoment (para par)** (para=moment)



Deformacje prętów różnią się jakościowo. Zaburzenia „lokalne” w prętach cienkościennych mogą rozchodzić się wzdłuż całej ich długości. Nie możemy pominąć skręcenia pręta zginanego nawet w płaszczyźnie głównej → wprowadzimy pojęcie **środkła ścinania**

Postawienie zagadnienia teorii prętów cienkościennych:
Założenia Własowa:

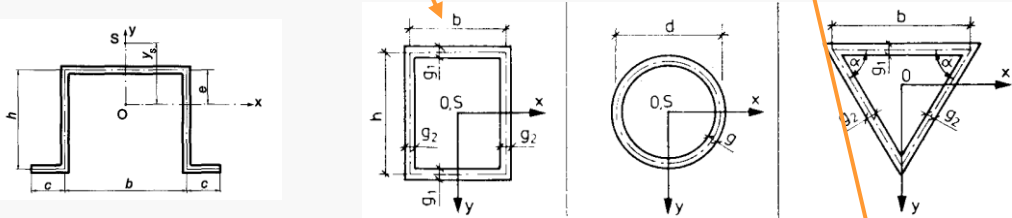
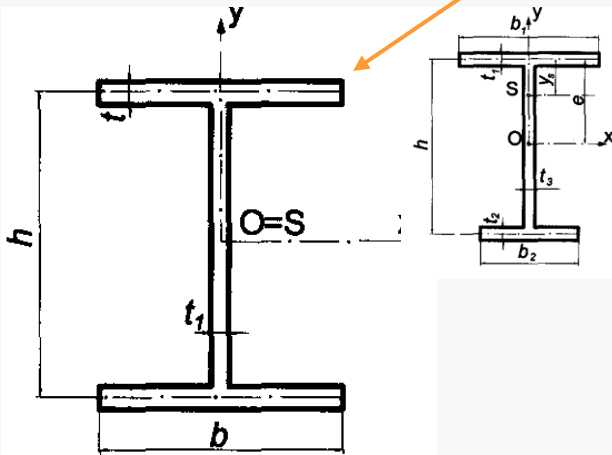
1. Powierzchnia środkowa deformuje się tak, jakby w płaszczyźnie każdego przekroju poprzecznego (y,z) rozpostarta była na linii środkowej sztywna tarcza, idealnie jednak wiotka w kierunku (x), tak że możliwa jest swobodna deplanacja w kierunku osi pręta (**hipoteza sztywnego konturu**) kształtu powierzchni środkowych)
2. powierzchnia środkowa nie doznaje odkształceń kątowych
3. Wartość naprężenia normalnego σ_x dominuje nad pozostałymi naprężeniami normalnymi



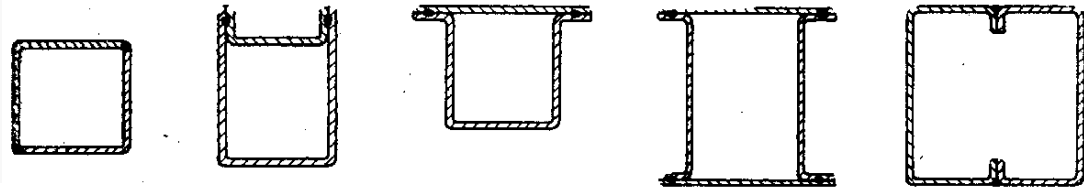
Pręty cienkościennie Teoria Własowa {2}

Pręty cienkościennie dzielimy na: 1. **otwarte**, 2. **zamknięte** (i 3 **quassizamknięte**) – zależnie od rodzaju profilu.

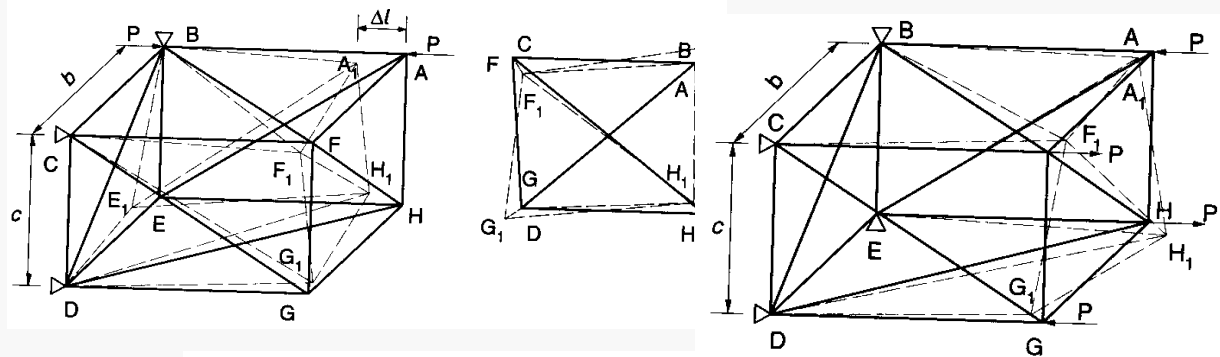
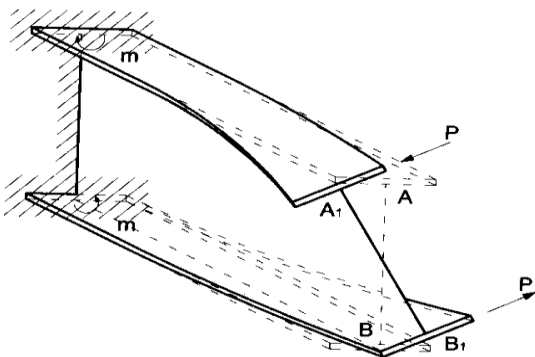
Teoria prętów o profilu otwartym jest przypadkiem szczególnym teorii prętów o profilu zamkniętym, ale pojęcia podstawowe pokażemy w teorii prętów otwartych



Podstawowa cecha profili zamkniętych – **odporne na skręcanie**



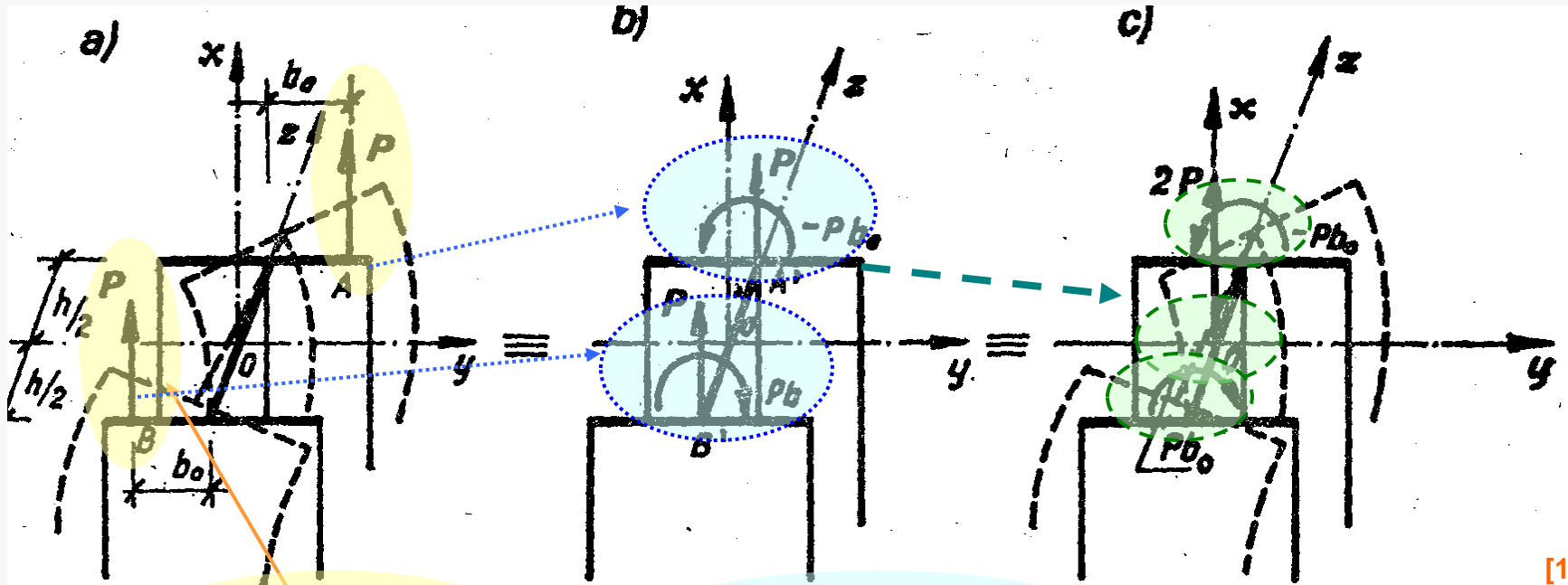
Deplanacja=spaczenie przekroju



Powstanie spaczenia w przekroju ustroju kratowego | [5]

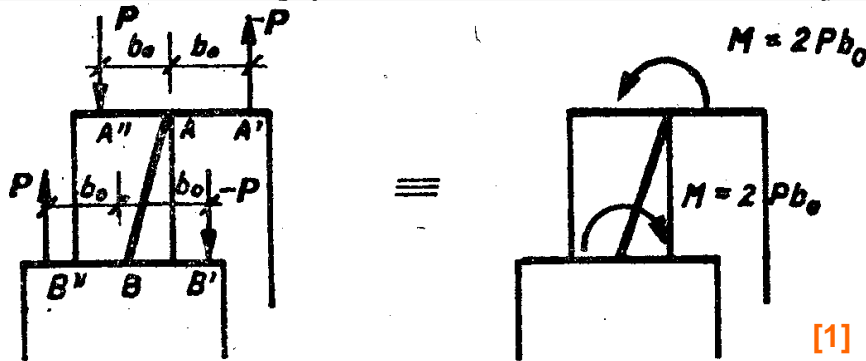
Rys. 4.1 Skręcanie dwuteownika jednostronnie utwierdzonego [5]

Pręty cienkościenne Bimoment . Kinematyczna równoważność



[1]

Układ obciążenia oryginalny $A \rightarrow A' \rightarrow O$ + dodajemy momenty: układy statycznie równoważne, ale również o podobnym efekcie kinematycznym \rightarrow siła $2P$ w p-kcie O (środku ciężkości) + dwa momenty przeciwnie skierowane leżące w równoległych płaszczyznach (półkach)



[1]

← Bimoment = df Liczba

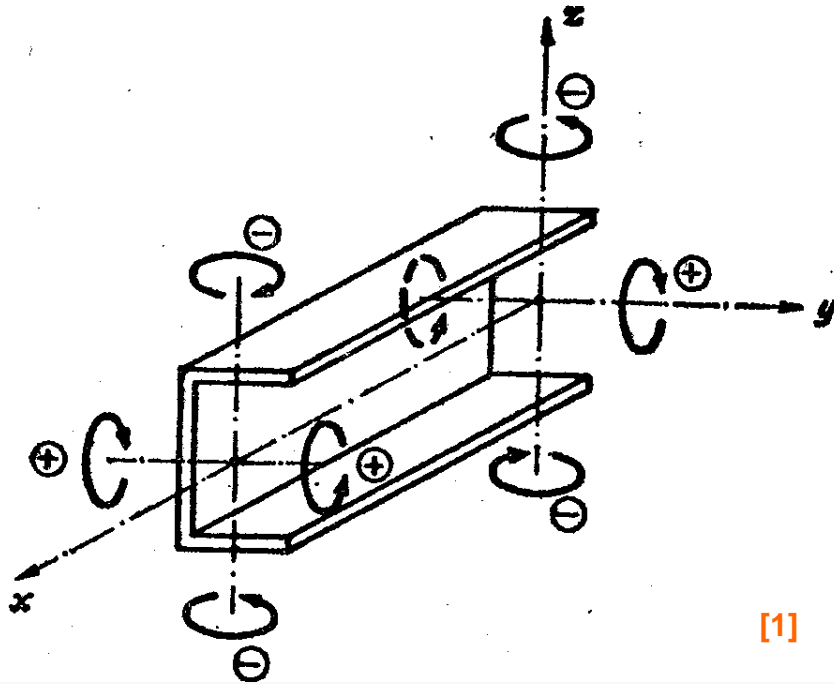
gdzie

$$M = 2Pb_0$$

$$B_\omega = Mh$$

jest momentem pary sił P na krawędziach ścianki (półki), a h odległością tych płaszczyzn.

Bimoment . Znakowanie

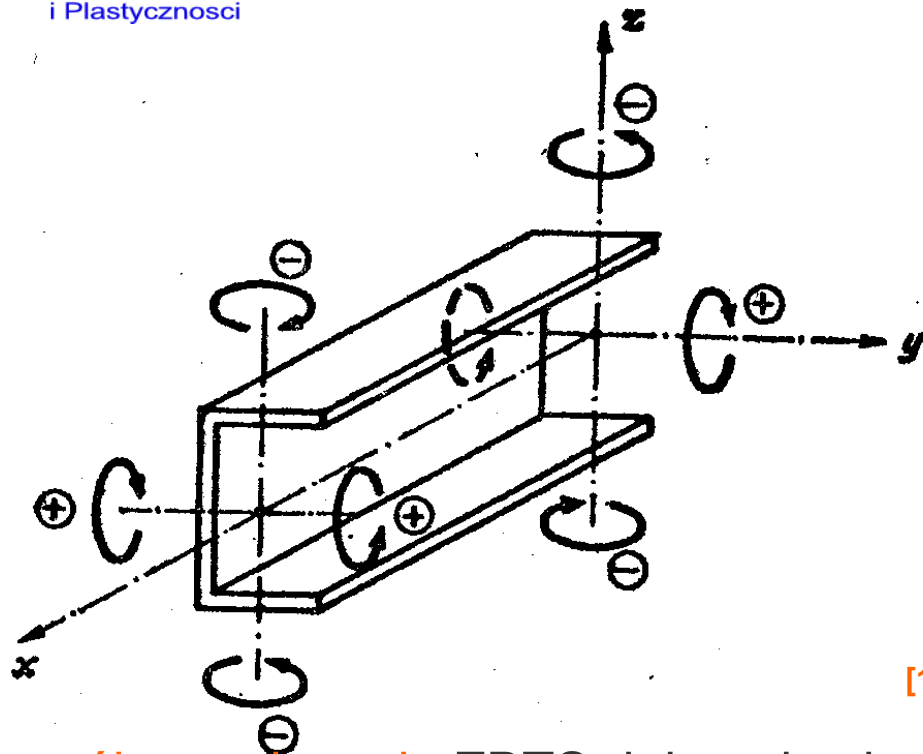


Bimoment jest dodatni, jeżeli normalna zewnętrzna przekroju poprzecznego ma zwrot zgodny ze zwrotem osi układu, do której jest równoległa, i jeśli stojąc między płaszczyznami działania par, parę, którą widzimy ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara

Rozwiązanie ZBTS dokonuje się podejściem kinematycznym. Funkcje przemieszczeń punktów linii środkowej przewiduje się (zgodnie z 1 założeniem Własowa) poprzez złożenie ruchu linii środkowej należącej do nieodkształcalnej tarczy oraz jej spaczenia. Następnie z równań Cauchy'ego i warunku geometrycznej Równoważności obliczamy odkształcenia. Korzystając z trzeciego założenia Własowa i równań Hooke'a otrzymamy

$$\sigma_x = \tilde{E} \varepsilon_x, \text{ gdzie: } \tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

Bimoment . Znakowanie



Bimoment jest dodatni, jeżeli normalna zewnętrzna przekroju poprzecznego ma zwrot zgodny ze zwrotem osi układu, do której jest równoległa, i jeśli stojąc między płaszczyznami działania par, parę, którą widzimy ma zwrot zgodny z ruchem wskazówek zegara

[1]

Sposób rozwiązania ZBTS dokonuje się podejściem kinematycznym. Funkcje przemieszczeń punktów linii środkowej przewiduje się (zgodnie z 1 założeniem Własowa) poprzez złożenie ruchu linii środkowej należącej do nieodkształcalnej tarczy oraz jej spaczenia. Następnie z równań Cauchy'ego i warunku kinematycznej równowagi układu sił obliczamy odkształcenia.

Korzystając z trzeciego założenia Własowa i równań Hooke'a otrzymamy

$$\sigma_x = \tilde{E} \varepsilon_x, \text{ gdzie: } \tilde{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$$

Rozwiązanie ZBTS zagadnienia Własowa

$$M_x = M_s + M_\omega$$

Określenie funkcji bimomentu dokonuje się z warunku równości momentów skręcających od sił wewnętrznych i zewnętrznych

$$M_s = \theta GJ_s = \alpha'(x)GJ_s$$

moment czystego skręcania → patrz rozwiązanie ZBTS

$$M_\omega = \frac{dB\omega}{dx}$$

moment giętno-skrętny

Kąt skręcenia - liniowa funkcja zależna od x

Jeśli przyjmiemy z definicji:

$$B\omega(x) = -EJ_\omega \alpha''(x)$$

$$M'_x(x) = M'_s(x) + M'_\omega(x) = GJ_s \alpha''(x) + B''_\omega(x) = -\frac{GJ_s}{EJ_\omega} B_\omega(x) + B''_\omega(x);$$

$$M'_x(x) = -m(x), \quad \gamma^2 = \frac{GJ_s}{EJ_\omega}$$

$$B''_\omega(x) - \gamma^2 B_\omega(x) = -m(x)$$

$$EJ_\omega \alpha^{(IV)}(x) - GJ_s \alpha''(x) = m(x).$$

$$B_\omega(x) = B_\omega^0(x) + C_1 \sinh \gamma x + C_2 \cosh \gamma x,$$

$$\alpha(x) = \alpha^0(x) + D_1 + D_2 x + D_3 \sinh \gamma x + D_4 \cosh \gamma x,$$

Całkiogólne:

Stałe całkowania

z warunków

brzegowych

Całki szczególne

ze znajomości

$m(x)$

Pręty cienkościenne- naprężenia

- *Naprężenia skrępowanego skracania* σ_ω i τ_ω oraz swobodnego skręcania τ_s oblicza się ze wzorów

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega \omega_s}{J_\omega} ; \quad \tau_\omega = \frac{M_\omega S_\omega}{J_\omega g} , \quad \max \tau_s = \pm \frac{M_s g}{J_s} ,$$

(Klasyczne składowe naprężenia w przekroju pręta zginanego poprzecznie oblicza się standardowo) → Zasada superpozycji (sumuje się naprężenia w punkcie)

gdzie: S_ω – tzw. wycinkowy moment statyczny odciętej części przekroju: g – grubość ścianki.

- *Moment bezwładności swobodnego skręcania* J_s dla przekrojów złożonych z wąskich prostokątów o wymiarach $h \times g$ ($h \geq 10g$) znajduje się ze wzoru

$$J_s = \frac{\eta}{3} \sum h_i g_i^3 , \quad (1.1-6)$$

przy czym dla profili walcowanych współczynnik η – uwzględniający wpływ wyokrąglenia i zmienne grubości pólki – można przyjmować: dla kątowników 1,0, dla dwuteowników 1,2 ÷ 1,3 (średnio 1,25), dla ceowników i teowników 1,12. Dla profili spawanych $\eta = 1$.

- *Wycinkowy moment bezwładności* J_ω dla dowolnego przekroju oblicza się ze wzoru

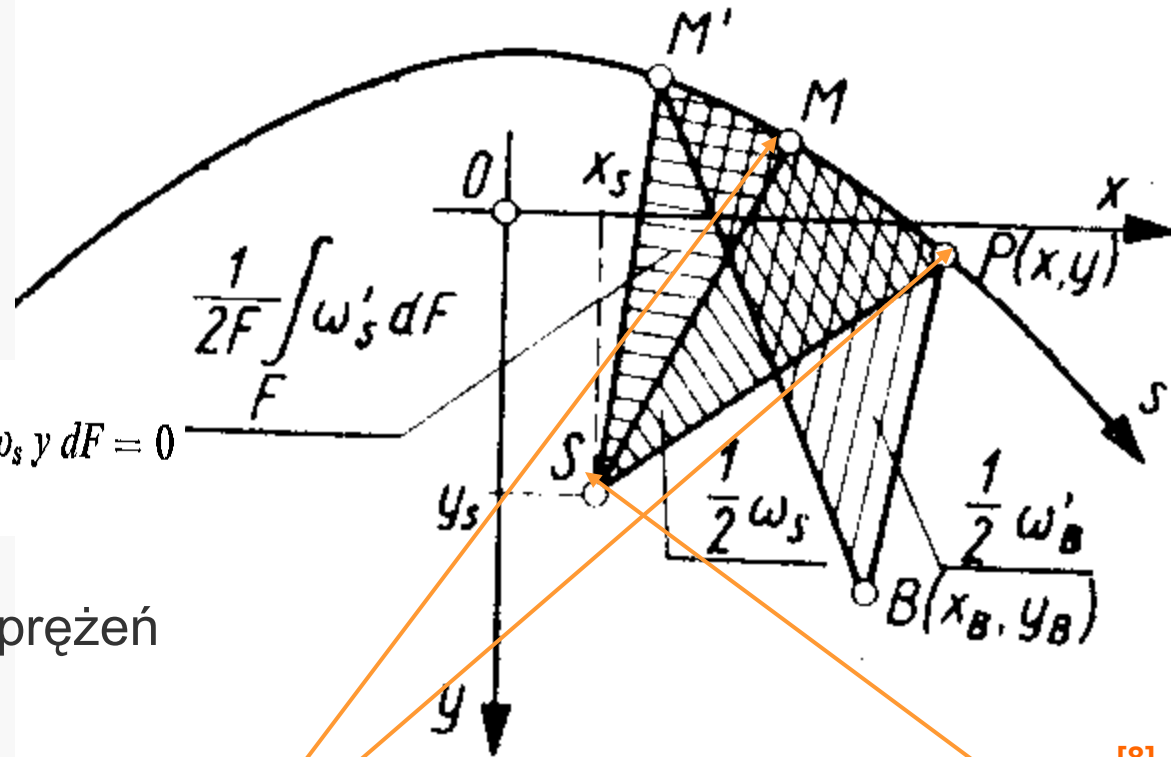
$$J_\omega = \int_F \omega_s^2 dF , \quad (1.1-7)$$

Współrzędna wycinkowa

Położenie punktu początkowego M i punktu S wyznacza się z zależności

$$\int_F \omega_s dF = 0; \quad \int_F \omega_s x dF = 0; \quad \int_F \omega_s y dF = 0$$

wynikającymi z warunku samozrównoważenia się naprężeń normalnych

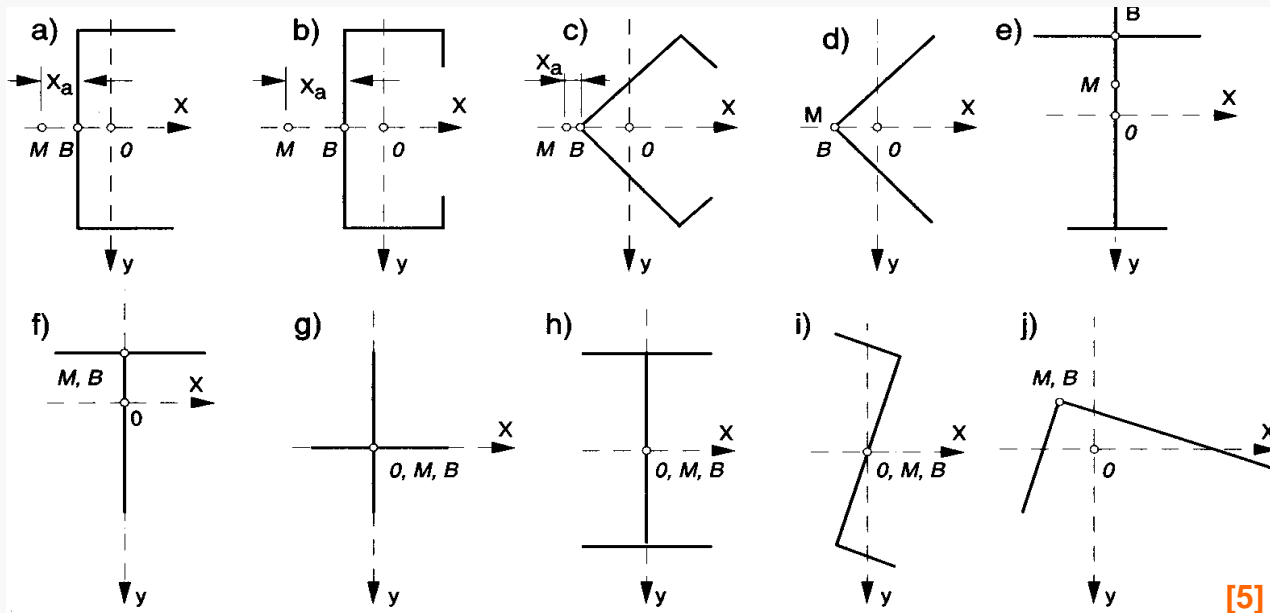


[8]

- *Główne pole wycinkowe ω_s , występujące we wzorze (1.1-7), jest równe podwójnemu polu powierzchni ograniczonej łukiem MP i wyprowadzonymi ze środka ścinania S promień – wektorami: początkowym SM i wodzącym SP, przy czym punkt M – tzw. główny punkt początkowy (rys. 1.1-3). Obrotowi promienia wodzącego w prawo (w lewo) odpowiada dodatni (ujemny) przyrost pola wycinkowego.*

Środek ścinania (zginania)

Biegun $R(a,b)$ dla którego zerują się wycinkowe momenty odśrodkowe nazywać będziemy środkiem ścinania (lub zginania). Nazwa wywodzi się stąd, że obciążenie pionowe przyłożone w środku ścinania nie powoduje skręcania przekroju. Środek ciężkości pokrywa się ze środkiem ścinania tylko dla przekroju symetrycznego, więc tylko dla takich przekrojów obciążenie przyłożone w środku ciężkości nie skręca przekroju.



[5]

Przykłady profili cienkościennych, w których jedna lub dwie rzędne środki ścinania są znane: O – środek ciężkości, S – środek ścinania, B – biegun pomocniczy

- *Współrzędne środka ścinania S* oblicza się w układzie głównych centralnych osi bezwładności ze wzorów

$$x_s = x_B + \frac{1}{J_x} \int_F \omega'_B y dF; \quad y_s = y_B - \frac{1}{J_y} \int_F \omega'_B x dF,$$

gdzie: ω'_B – pole wycinkowe dowolnego punktu P na konturze, określone względem dowolnie obranego bieguna B o współrzędnych x_B, y_B od dowolnego punktu początkowego M' (rys. 1.1-3); x, y – współrzędne dowolnego punktu P ; J_x, J_y – główne, centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego.

- *Położenie głównego punktu początkowego M* na konturze można określić ze wzoru

$$\omega_s = \omega'_s - \frac{1}{F} \int_F \omega'_s dF, \quad (1.1-10)$$

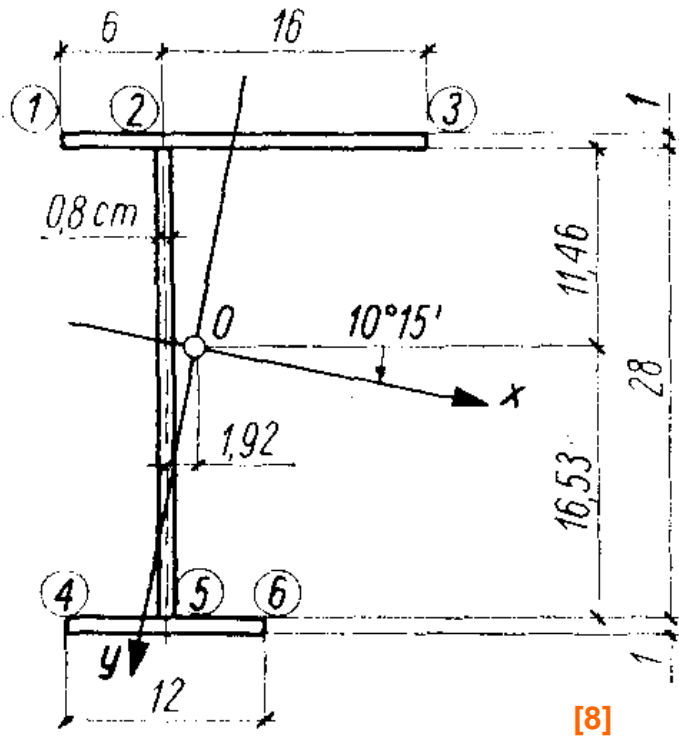
gdzie ω'_s – pole wycinkowe względem środka ścinania S od przyjętego punktu początkowego M' (rys. 1.1-3).

Obliczenie głównych pól wycinkowych ω_s wykonuje się, gdy znane jest pole wycinkowe ω'_s , za pomocą wzoru (1.1-10) lub stosując następujący wzór

$$\omega_s = \omega'_B + (y_s - y_B) x - (x_s - x_B) y - \frac{1}{F} \int_F \omega'_B dF, \quad (1.1-11)$$

Typowe przekroje cienkościenne

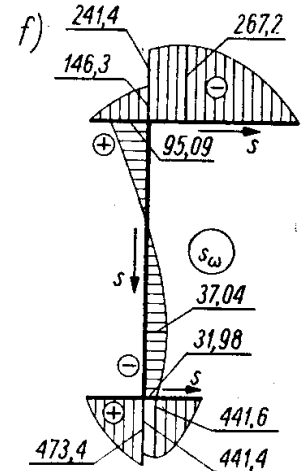
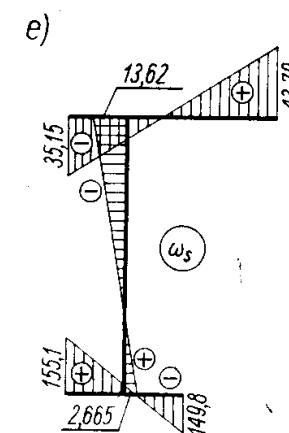
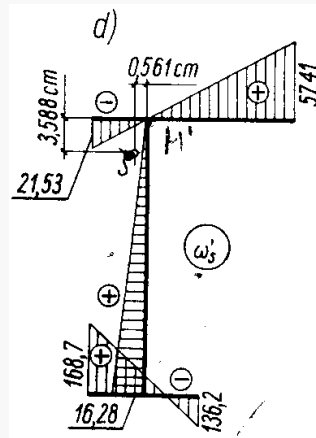
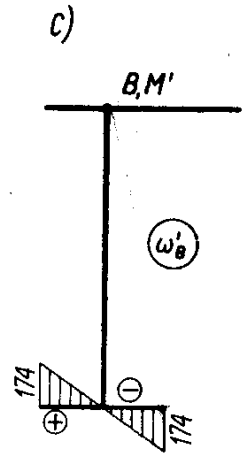
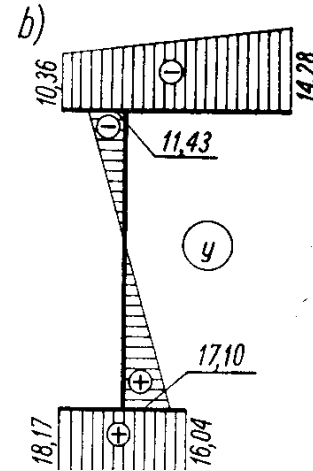
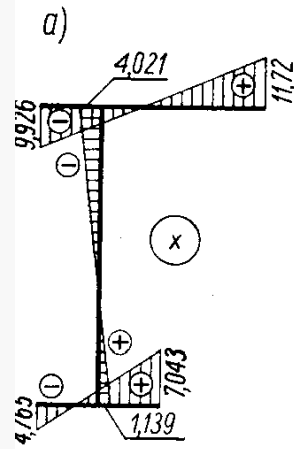
LP	PRZEKRÓJ	WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA ŚCINANIAS	WYKRES PÓŁ WYCINKOWYCH ω_s	WYKRES WYCINKOWYCH MOMENTÓW STATYCZNYCH S_ω
		WYCINKOWY MOMENT BEZWŁADNOŚCI J_ω		
1	2	3	4	5
1		$x_s = y_s = 0$ $J_\omega = \frac{1}{4} J_y h^2$		$\frac{b^2 h g_1}{16}$
2		$x_s = 0, y_s = c - e$ $c = \frac{J_{2y}}{J_y} h, e > 0$ $J_\omega = \frac{J_{1y} J_{2y}}{J_y} h^2$ $(J_y = J_{1y} + J_{2y})$		$\frac{c b_1^2 g_1}{8}$ $\frac{(h-c) b_2^2 g_2}{8}$
3		$x_s = -(c+e), y_s = 0$ $c = \frac{J_{1x}}{J_x} b, e > 0$ $J_\omega = \frac{J_{1x}^2 + 2J_{1x}J_{2x} - b^2}{J_x} \frac{h^2}{3}$		$\frac{b h g_1 (b-2c)}{4}$ $\frac{(b-c)^2 h g_1}{4}$ $\frac{c h^2 g}{8}$
4		$x_s = y_s = 0$ $(d = \frac{b^2 g_1}{2b g_1 + h g})$ $J_\omega = \frac{b^3 h^2 g_1}{12} + \frac{b g_1 + 2h g}{h g + 2b g_1}$		$\frac{b h g_1 (b-2d)}{4}$ $\frac{(b-d)^2 h g_1}{4}$ $\frac{b h g_1 (b-2d)}{4}$
5		$c = \frac{2R (\sin \beta - \beta \cos \beta)}{\beta - \sin \beta \cos \beta}$ $J_\omega = \frac{2}{3} R^5 g \cdot \left[\beta - \frac{6(\sin \beta - \beta \cos \beta)^2}{\beta - \sin \beta \cos \beta} \right]$		



[8]

wyznaczenia wykresu ω'_B (rys. 1.1-5c), obrano punkt 2 o współrzędnych $-4,02$ cm; $-11,43$ cm. Przemnażając wykresy ω'_B i x oraz ω'_B i y obliczono

$$\int_F \omega'_B x dF = -4109,3 \text{ cm}^5; \quad \int_F \omega'_B y dF = 743,0 \text{ cm}^5.$$



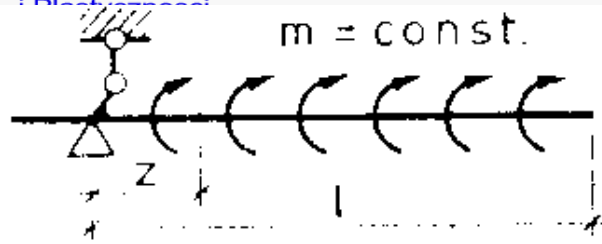
[8]

Stąd współrzędne środka ścinania S wynoszą

$$x_s = x_P + \frac{1}{J_x} \int_F \omega'_B y dF = -4,02 + \frac{743,0}{8645} = -3,93 \text{ cm},$$

$$y_s = y_B - \frac{1}{J_y} \int_F \omega'_B x dF = -11,43 + \frac{4109,3}{1132} = -7,80 \text{ cm}.$$

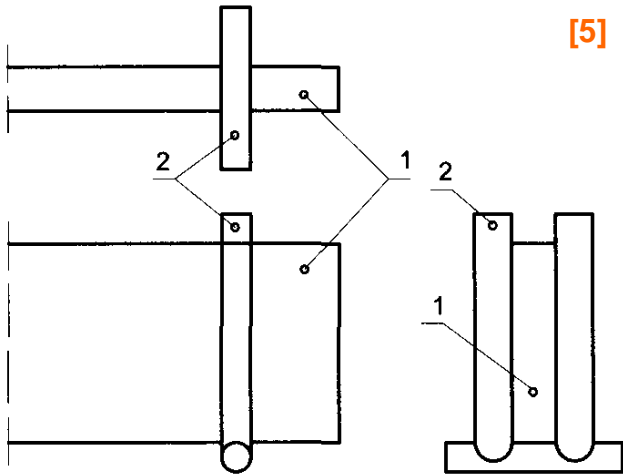
$$J_\omega = \int_F \omega_s^2 dF = 106\,120 \text{ cm}^6.$$



$\varphi = 0$ $M_\omega + M_s = 0$
 $B_\omega = 0$ $B_\omega = 0$ [8]

$$B_\omega = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{\text{chk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_\omega = \frac{m}{k \text{ch} \frac{kl}{2}} \text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)$$

$$M_s = m \left[(l-z) - \frac{\text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{k \text{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad \varphi_{\max} = \varphi(l) = \frac{ml^2}{2k^2 EJ_\omega}$$



Rys. 4.13 Widelkowe ujęcia pręta na podporze:
1 – pręt, 2 – podpora

LP.	SCHEMAT WARUNKI BRZEGOWE	$B_\omega, M_\omega, M_s, \varphi$
1	 $\varphi = 0$ $M_\omega + M_s = 0$ $B_\omega = 0$ $B_\omega = 0$	$B_\omega = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{\text{chk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_\omega = \frac{m}{k \text{ch} \frac{kl}{2}} \text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)$ $M_s = m \left[(l-z) - \frac{\text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{k \text{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad \varphi_{\max} = \varphi(l) = \frac{ml^2}{2k^2 EJ_\omega}$
2	 $\varphi = 0$ $M_\omega + M_s = M$ $B_\omega = 0$ $B_\omega = 0$	$B_\omega = 0; \quad M_\omega = 0; \quad M_s = M$ $\varphi_{\max} = \varphi(l) = \frac{Ml}{k^2 EJ_\omega}$
3	 $\varphi = 0$ $M = 0$ $w = 0$ $B_\omega = 0$	$B_\omega = -\frac{m}{k^2 \text{chkl}} [\text{klshk}(l-z) - \text{chkl} + \text{ch}kz]$ $M_\omega = -\frac{m}{k \text{chkl}} [\text{shk}z - \text{klchk}(l-z)]; \quad M_s = m \left[-l + \frac{\text{shk}z - \text{klchk}(l-z)}{k \text{chkl}} \right]$ $\varphi_{\max} = \varphi(l) = \frac{m}{k^4 EJ_\omega \text{chkl}} \left[\left(\frac{k^2 l^2}{2} + 1 \right) \text{chkl} - \text{klshkl} - 1 \right]$
4	 $\varphi = 0$ $M_\omega + M_s = M$ $w = 0$ $B_\omega = 0$	$B_\omega = -\frac{M}{k} \frac{\text{shk}(l-z)}{\text{chkl}}; \quad M_\omega = M \frac{\text{chk}(l-z)}{\text{chkl}}$ $M_s = M \left[1 - \frac{\text{chk}(l-z)}{\text{chkl}} \right]$ $\varphi_{\max} = \varphi(l) = \frac{M}{k^3 EJ_\omega} (\text{kl} - \text{thkl})$
5	 $\varphi = 0$ $\varphi = 0$ $B_\omega = 0$ $B_\omega = 0$	$B_\omega = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{\text{chk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_\omega = \frac{m}{k} \frac{\text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{ch} \frac{kl}{2}}$ $M_s = ml \left[\frac{1}{2} - \frac{z}{l} - \frac{\text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{k \text{ch} \frac{kl}{2}} \right]$ $\varphi_{\max} = \varphi \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{m}{k^4 EJ_\omega} \left[\frac{(\text{kl})^2}{8} + \left(\text{ch} \frac{kl}{2} \right)^{-1} - 1 \right]$
6	 $\varphi = 0$ $\varphi = 0$ $B_\omega = 0$ $B_\omega = 0$	$B_{\omega(l)} = \frac{M}{2k} \frac{\text{shk}z}{\text{ch} \frac{kl}{2}}; \quad M_{\omega(l)} = \frac{M}{2} \frac{\text{chk}z}{\text{ch} \frac{kl}{2}}$ $M_{s(l)} = \frac{M}{2} \left(1 - \frac{\text{chk}z}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right); \quad \varphi_{\max} = \varphi \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{M}{2k^3 EJ_\omega} \left(\frac{kl}{2} - \text{th} \frac{kl}{2} \right)$ Wzory dla przypadku przyłożenia momentu M w dowolnym przekroju podano w przykazdzie 1.1-3
7	 $\varphi = 0$ $\varphi = 0$ $w = 0$ $w = 0$	$B_\omega = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{k \text{chkl} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{2 \text{sh} \frac{kl}{2}} \right]; \quad M_\omega = \frac{ml}{2 \text{sh} \frac{kl}{2}} \text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)$ $M_s = \frac{ml}{2} \left[1 - \frac{2z}{l} - \frac{\text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh} \frac{kl}{2}} \right]$ $\varphi_{\max} = \varphi \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{m}{k^4 EJ_\omega} \left(\frac{k^2 l^2}{8} - \text{kl} \frac{\text{sh}^2 \frac{kl}{4}}{\text{sh} \frac{kl}{2}} \right)$
8	 $\varphi = 0$ $\varphi = 0$ $w = 0$ $w = 0$	$B_{\omega(l)} = \frac{M}{2k} \frac{\text{chk}z - \text{chkl} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh} \frac{kl}{2}}; \quad M_{\omega(l)} = \frac{M}{2} \frac{\text{shk}z + \text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh} \frac{kl}{2}}$ $M_{s(l)} = \frac{M}{2} \left[1 - \frac{\text{shk}z + \text{shk} \left(\frac{l}{2} - z \right)}{\text{sh} \frac{kl}{2}} \right]$ $\varphi_{\max} = \varphi \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{M}{k^3 EJ_\omega \text{sh} \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl}{4} \text{sh} \frac{kl}{2} - 2 \text{sh}^2 \frac{kl}{4} \right)$

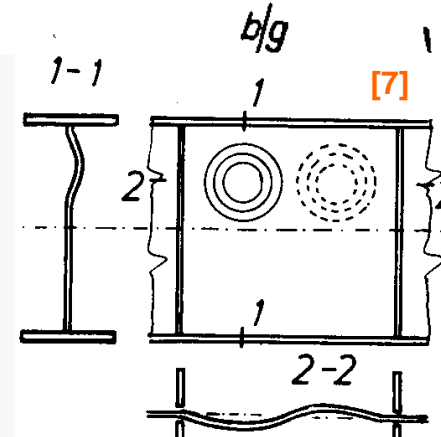
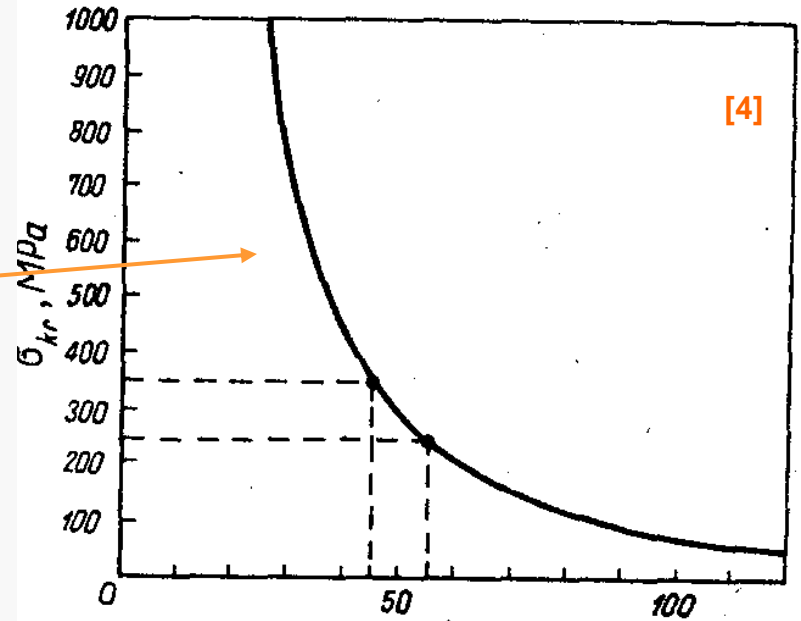
Idea teorii Wintera: Teoria wykorzystuje zjawisko → cienka płyta, podlegająca ścisłkaniu po przekroczeniu **naprężeń krytycznych** → **utracie nośności miejscowej** jest w stanie nadal przenosić obciążenia, z reguły znacznie większe od obciążenia krytycznego.

Korzyści z teorii nośności nadkrytycznej

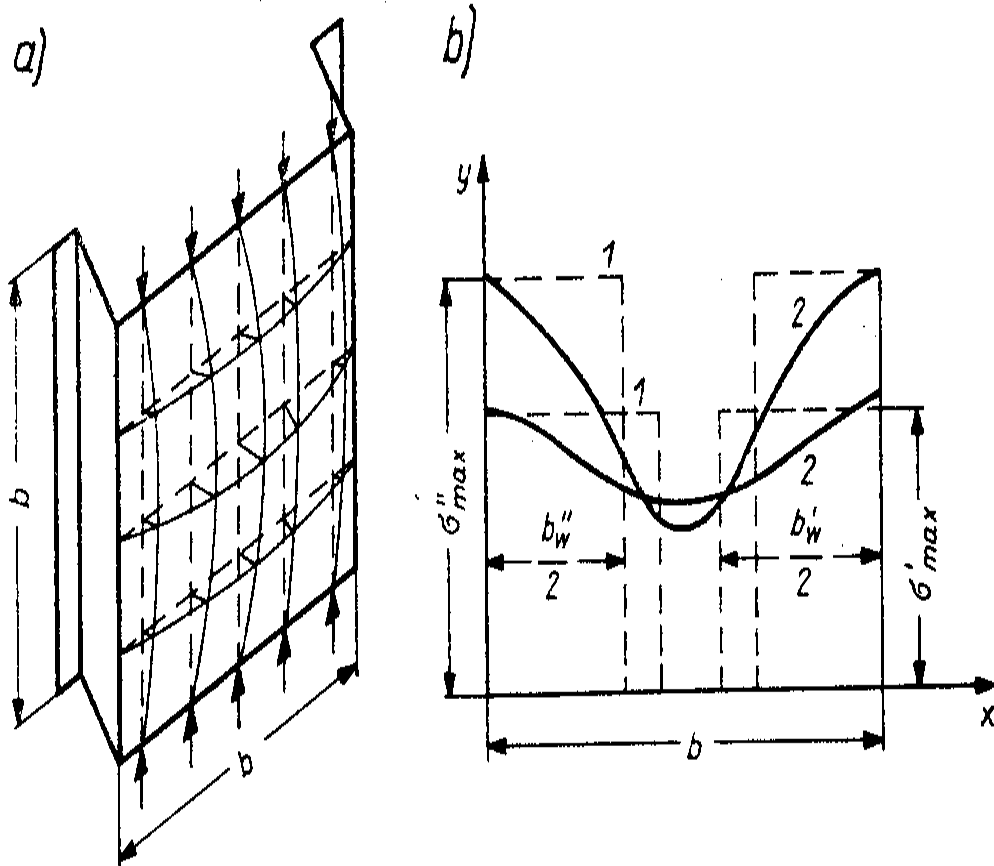
Wpływ szerokości i grubości płyty na naprężenie krytyczne płyt ze wzoru:

$$\sigma_{kr} = \frac{k\pi^2 \cdot E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{g}{b}\right)^2 = 7,6 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{g}{b}\right)^2$$

Przyjmując za Timoshenko, że po utracie stateczności długa płyta podparta przegubowo na dłuższych krawędziach dzieli się w przybliżeniu na płyty kwadratowe, a współczynnik $k=4$, ze wzoru uzyskuje się wynik, że nośność sprężysta płyty jest wyczerpana dla b/g 45 i 55 dla zakresy wytrzymałości $R_k=240$ i 350 MPa. Teoria nośności nadkrytycznej umożliwia natomiast stosowanie przekrojów o stosunku b/g **10-krotnie** większym.



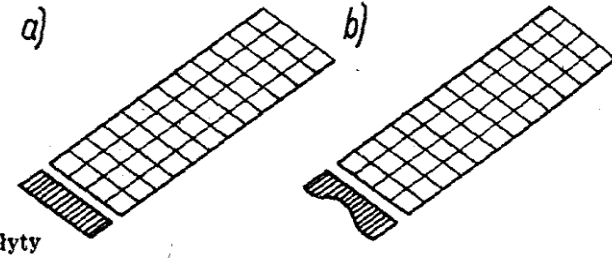
Zjawisko nadkrytyczne {1}



Rys. 6.6. Rozkład naprężeń w przekroju ściskanej płyty prostokątnej podpartej przegubowo

a — model rusztowy płyty w stanie nadkrytycznym podpartej na dwóch krawędziach podłużnych, b — wykres naprężeń zastępczych (1) i rzeczywistych (2)

[4]

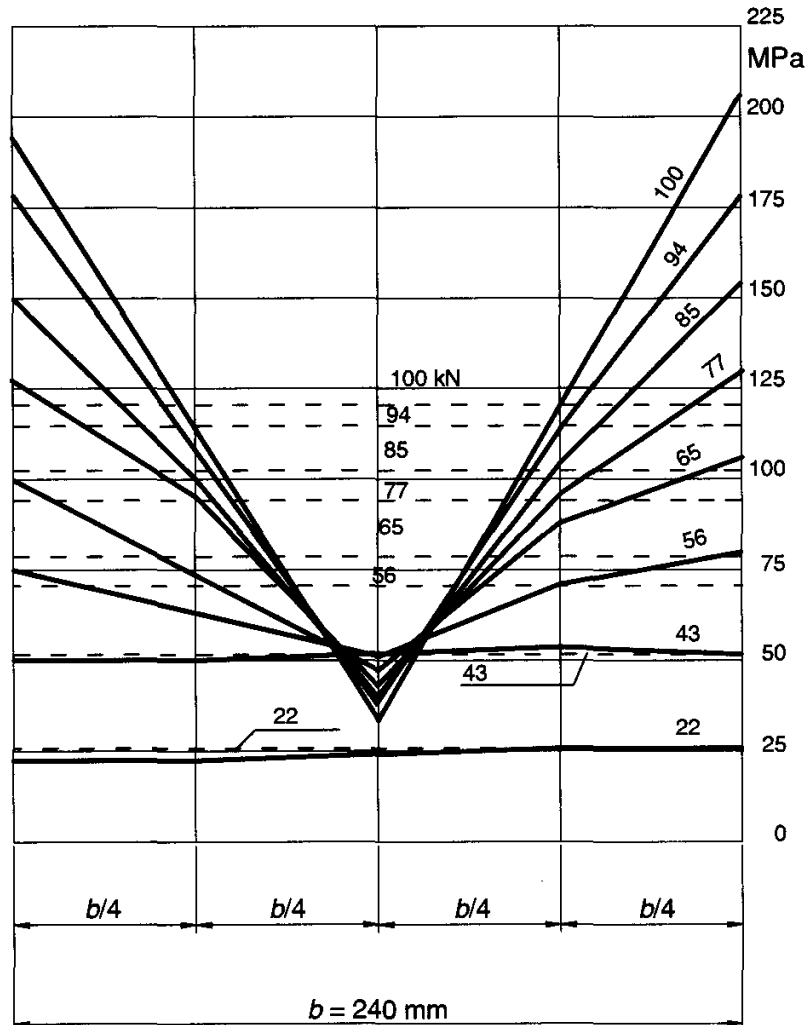


Obraz ściskanej płyty

W modelu elementy płytowe zastąpiono myślowo prętami. Przy wzroście obciążenia, przy obciążeniu krytycznym prętów, uległyby one jednoczesnemu wyboczeniu. W modelu płyty zjawisko nie wystąpi, gdyż pręty poprzeczne zaczynają pracować jako ciągną przeciwdziałające wygięciu prętów pionowych, przy tym najmniejsze wygięcie wykazują pręty przy krawędziach podpartych, a największe – pręty środkowe. W tej sytuacji jest widoczne, że nawet po osiągnięciu naprężenia krytycznego zarówno płyta jak i model nie ulegają wyboczeniu i mogą przenosić dodatkowe obciążenia. Zjawisko to nazywa się **nadkrytycznym stanem** płyty

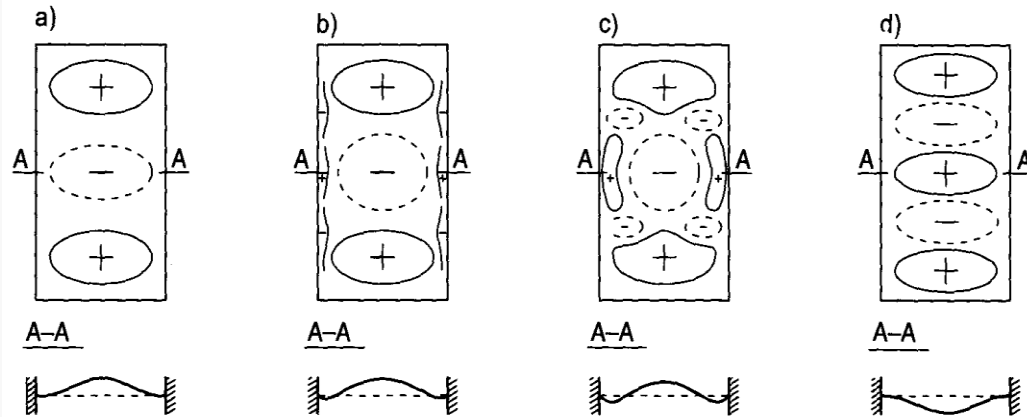
Zjawisko nadkrytyczne {2}

Na skutek „uchylania” się prętów środkowych od przenoszenia obciążeń w miarę wzrostu obciążenia rozkład naprężeń jest coraz bardziej nierównomierny. Płyta ulega wyboczeniu, gdy w pasach przyległych do bocznych krawędzi wystąpi przekroczenie granicy plastyczności



Rozkład naprężeń normalnych w stanie nadkrytycznym płyty podpartej przegubowo na jednym brzegu podłużnym, a na drugim brzegu swobodnym (płyta ze stopu aluminium) [360]

← Z badań wynika, że w stanie nadkrytycznym naprężenia w części płyty znacznie wygiętej mogą zmniejszać się w stosunku do naprężeń krytycznych, a przy dużych stosunkach b/g naprężenia mogą nawet zmieniać znak.

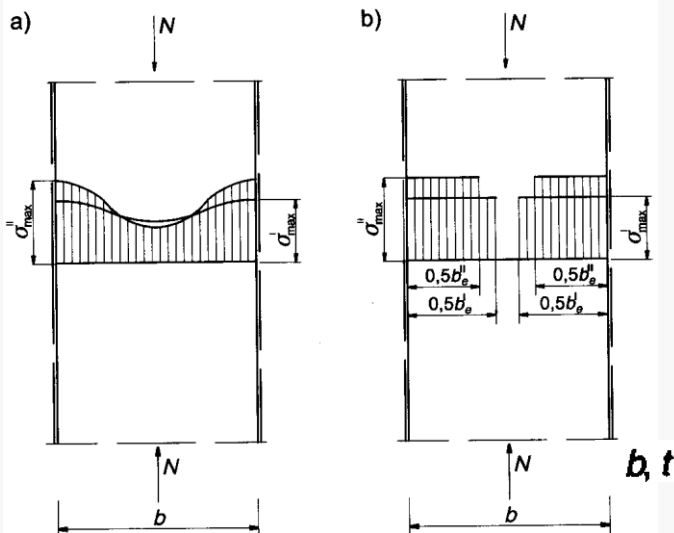


Mechanizm wygięć płyty w stanie nadkrytycznym

Z badań wynika, że już przy obciążeniu nieznacznie większym od krytycznego pasmo płytowe przyjmuje wypukłość. Przy wzroście obciążenia wypukłości tworzą się w strefach brzegowych. Po dalszym rozszerzaniu się wypukłości następuje gwałtowne przejście do nowej postaci wygięcia płyty (d), co jest równoznaczne z osiągnięciem jej nośności granicznej.

Różnica między obciążeniem krytycznym i granicznym jest nieduża, gdy obciążenia krytyczne są bliskie plastycznemu. Zakres nadkrytycznego zachowania płyty zwiększa się wraz ze wzrostem b/g . Wzrost nie jest jednak równomierny. Stwierdzono, że w przypadku płyt cienkich i szerokich ich nośność niewiele wzrasta ponad pewną wartość przy dalszym zwiększaniu b . W zależności od wymiarów płyty i od sposobu jej podparcia, a także występujących w płycie obciążeń, nośność graniczna w stosunku do siły krytycznej może być znaczna, nawet kilka razy większa.

Szerokość współpracująca



$$b_w = \frac{b \int_0^b \sigma \cdot dx}{\sigma_{max}}$$

$$b_e = \frac{\sigma_a}{\sigma_{max}} b,$$

$\sigma_a = N/(bt)$ średnie naprężenie jednostajnie równomiernie rozłożone na całej szerokości płyty, powstające pod przyłożonym obciążeniem, przy założeniu, że nie wystąpiła jej niestateczność,

$\sigma_{max} = N/(b_e t)$ maksymalne naprężenie na brzegu, powstające pod obciążeniem w stanie nadkrytycznym, przy założeniu, że część środkowa płyty jest wyłączona z przenoszenia obciążenia
 obciążenie w stanie nadkrytycznym

b, t szerokość i grubość płyty

N

Karman, Sechler i Donnel

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} = 0,89 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}}, \quad \text{po podstawieniu} \quad \sigma_{cr} = 3,62E \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Sechler

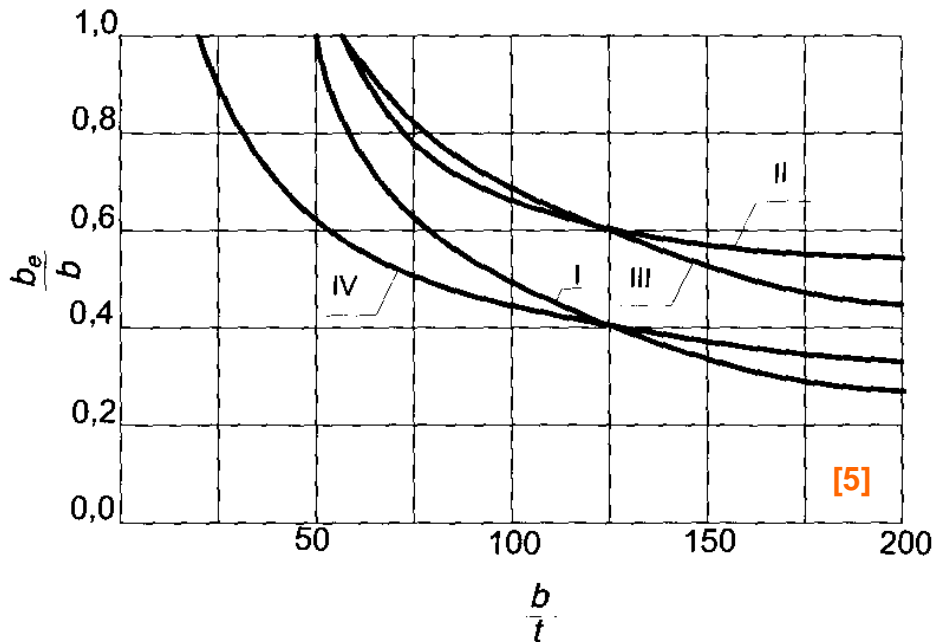
$$b_e = 1,69t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \quad (4.59)$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} = 0,64 \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}}, \quad \text{albo} \quad b_e = 0,827 \sqrt{bt} \cdot \sqrt[4]{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \quad (4.60)$$

Marguerre

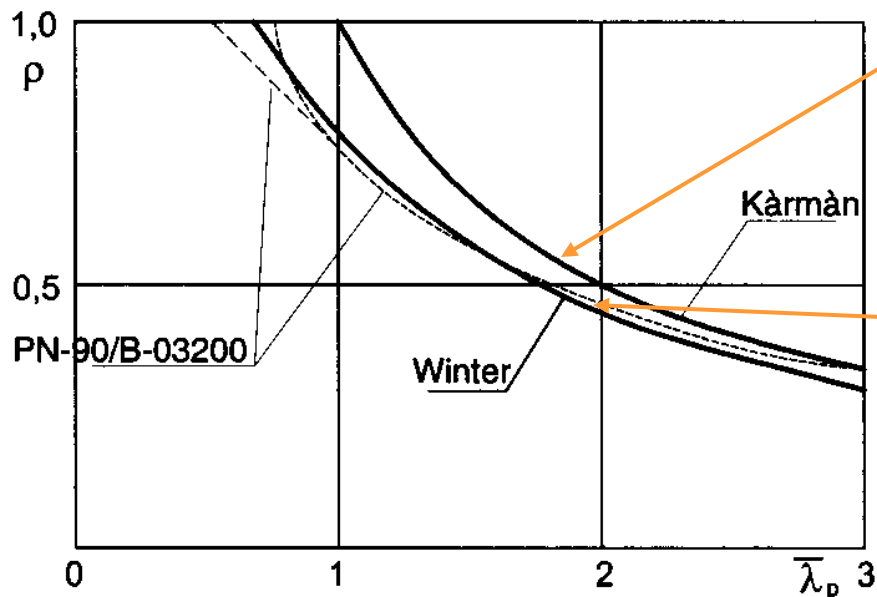
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}}, \quad \text{albo}$$

$$b_e = 1,53b \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{t}{b}\right)^2 \frac{E}{\sigma_{\max}}} \quad \text{zbyt optymistyczne} \quad (4.61)$$



$$b_e = 0,5b \left(1 + \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}} \right) \quad (4.62)$$

Redukcja szerokości rzeczywistej do szerokości współpracującej, obliczona według różnych wzorów, odnoszących się do płyty ściskanej osiowo, podpartej przegubowo na brzegach podłużnych: I – wg wzoru (4.59), II – wg wzoru (4.62), III – wg wzoru (4.61), IV – wg wzoru (4.60)



$$\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_{\max}} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}}$$

lub

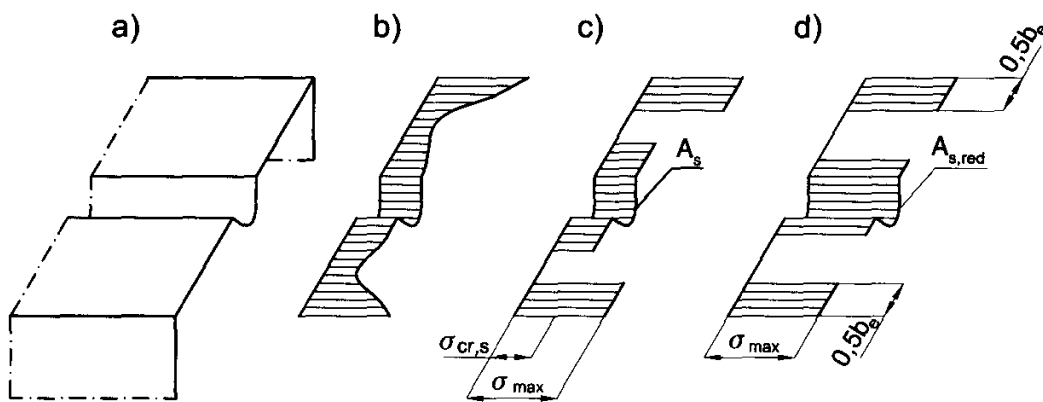
$$\frac{b_e}{b} = \frac{\sigma_{cr}}{f_y}$$

Zaproponowane do pasm płytowych w elementach z kształtowników profilowanych na zimno

Stowell

Ściskanie osiowe płyty

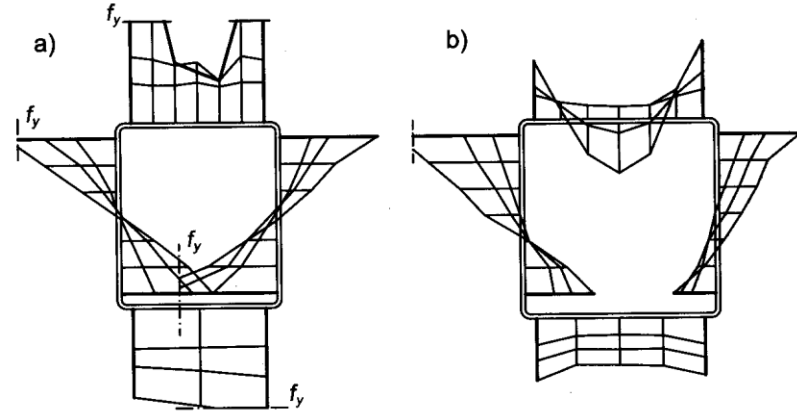
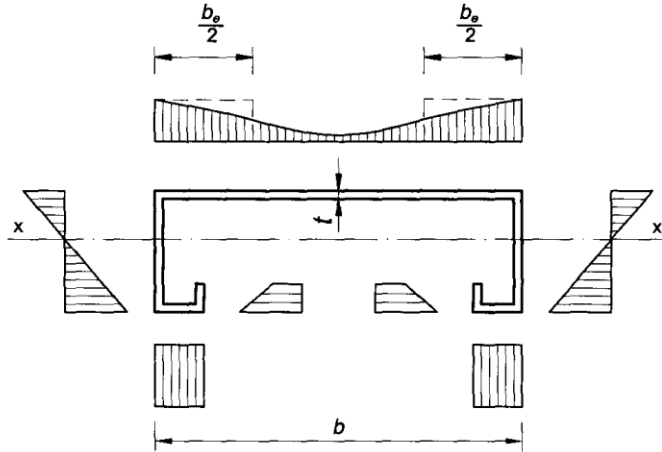
$$\sigma_{cr} = 0,904 \left(\frac{t}{b} \right)^2 \left[0,425 + \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]$$



Model naprężeń normalnych ścianki ściskanej osiowo, podpartej środkamiem

Istotne jest usztywnienie krawędzi kształtowników

Belki



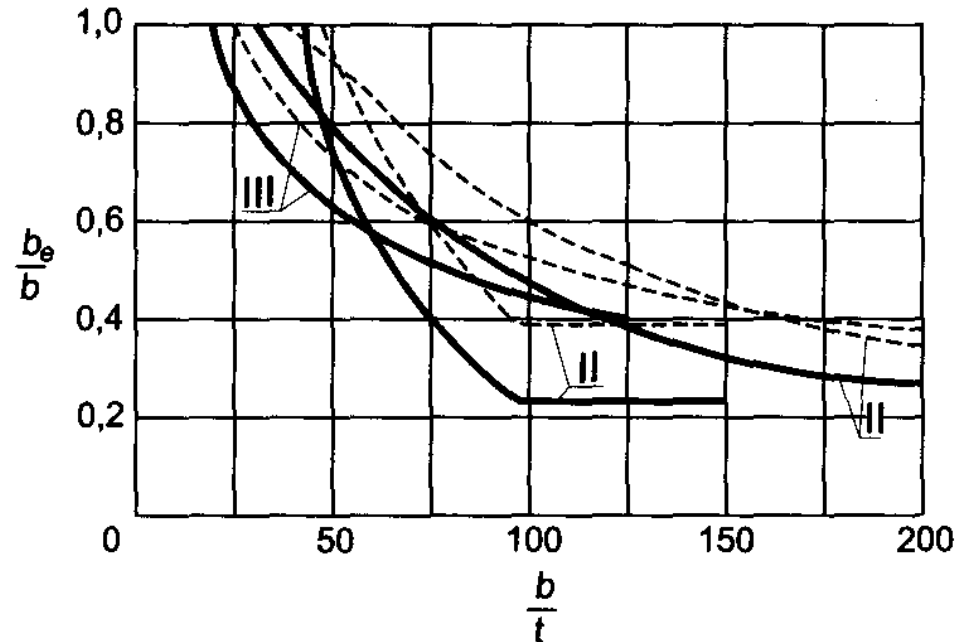
Belki badane przez Bródke [5]

$$b_e = b \cdot \left[0,2 + \frac{1}{6000} \left(25,6 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_{\max}}{E}} - 100 \right)^2 \right] \quad (4.73)$$

Winter (modyfikacja Karmana)

$$b_e = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} - 0,904 \frac{bE}{\sigma_{\max} (b/t)^2} \quad (4.71)$$

Redukcja szerokości rzeczywistej do wartości współpracującej, obliczana według różnych wzorów dla belek o stopkach usztywnionych:
I – wg wzoru (4.71), II – wg wzoru (4.73),
III – wg wzoru (4.59)



Słupy ściskane osiowo

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} = c \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}}, \quad (4.76)$$

gdzie: $c = 0,8$ dla dwuteownika, $c = 0,77$ dla ceownika.

Heimler

$$\sigma_{cr} = \sum_{i=1}^n \sigma_{cr,i} A_i / \sum_{i=1}^n A_i,$$

A_i pole przekroju płyty i ,
 n liczba płyt (ścianek)

$\sigma_{cr,i}$ naprężenie krytyczne przy utracie stateczności miejscowej płyty i jako ścianki usztywnionej (podpartej na brzegach podłużnych) lub nieusztywnionej (podpartej na jednym brzegu podłużnym a na drugim swobodnej)

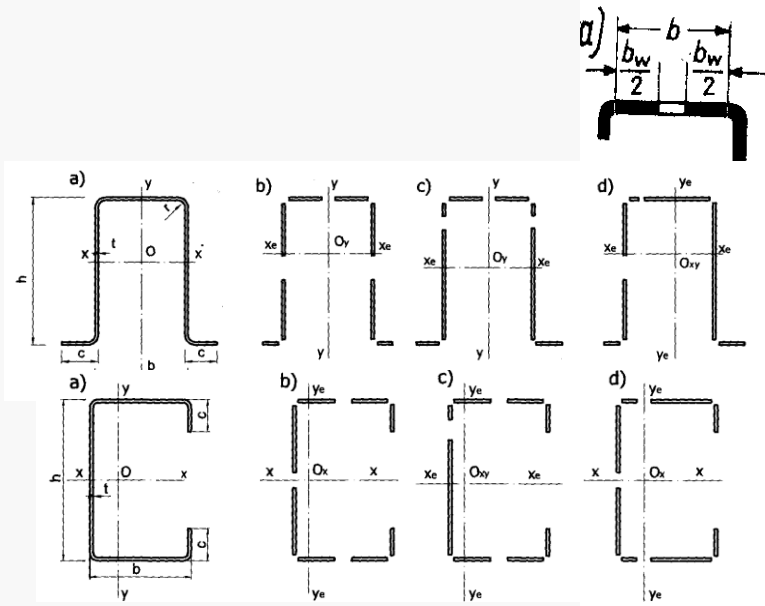
Chilver

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\max}} = 0,724^{10} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{\max}}\right)^3}, \quad (4.78)$$

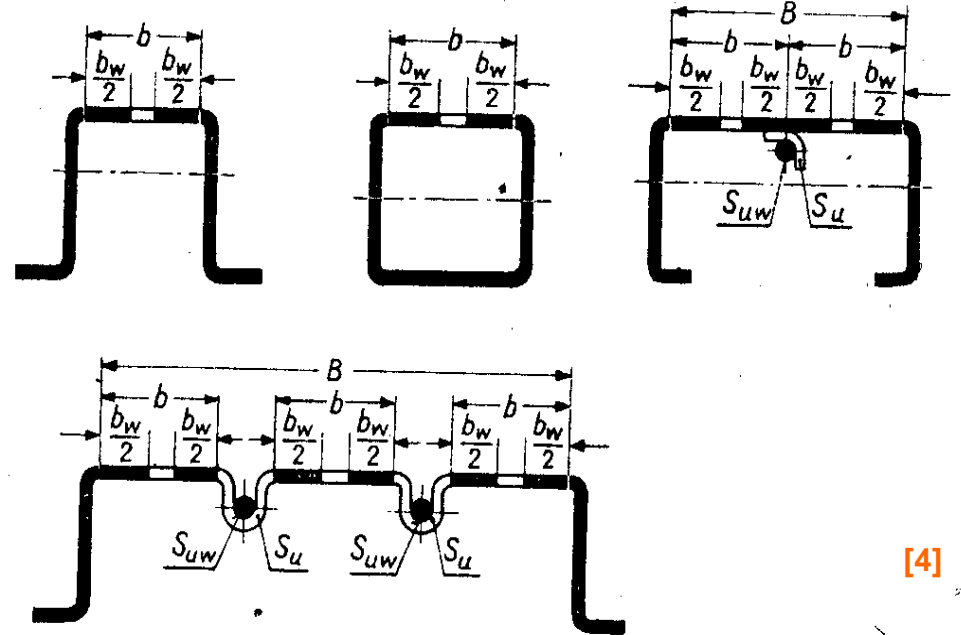
Chilver badał szczegółowo ceowniki z usztywnieniami brzegów lub bez nich.

Hertel proponował obliczać słupy w stanie nadkrytycznym, rozpatrując wydzielone ścianki jako płyty o naprężeniu σ_{\max} na brzegach stykających się ścianek. Badania przeprowadzone na prętach aluminiowych na ogół potwierdziły słuszność takiej metody obliczania.

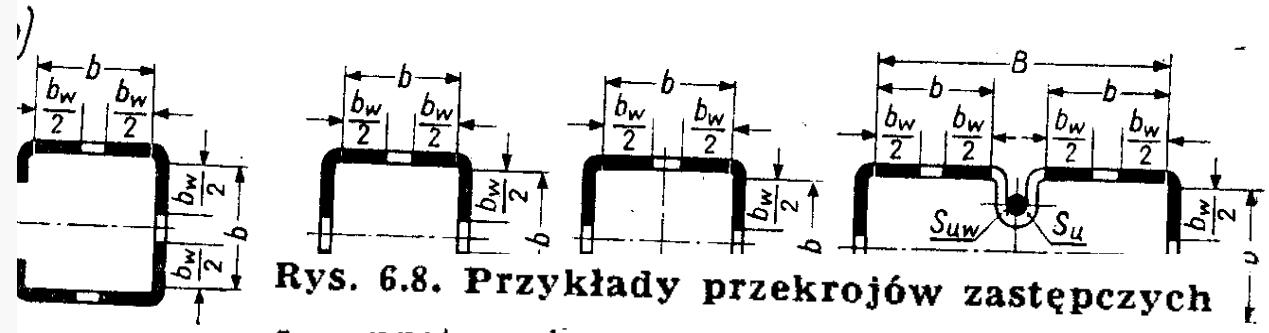
Winter badał również słupy stalowe, jednak jego doświadczenia miały na celu przede wszystkim weryfikację wzorów na szerokość współpracującą, ustaloną wcześniej w odniesieniu do belek. Przeprowadzone eksperymenty potwierdziły je. Posłużyły do opracowania wytycznych amerykańskich metod oceny nośności słupów z kształtowników profilowanych na zimno za pomocą tzw. współczynnika kształtu [52], [209].



[5]



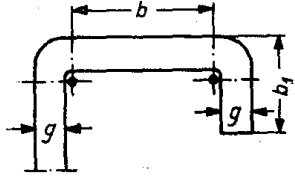
[4]



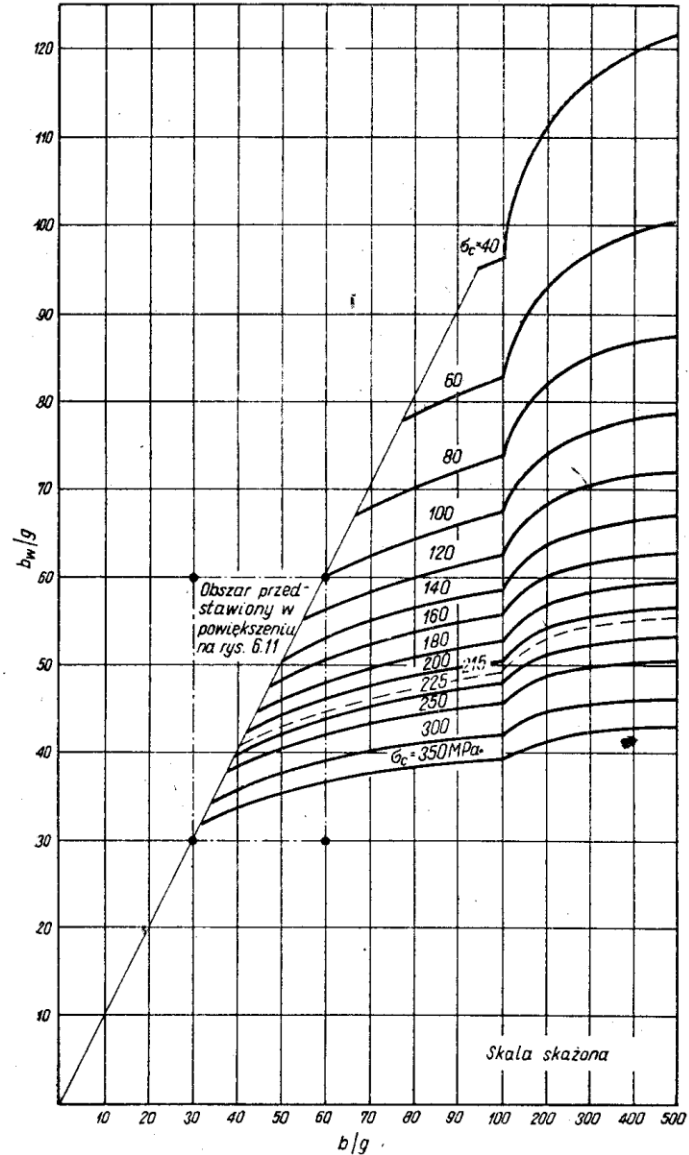
**Rys. 6.8. Przykłady przekrojów zastępczych
a — pręty zginane, b — pręty ściskane**

Szerokość współpracująca {6}

Szerokość współpracująca przy ścianie opartej na dwóch środnikach (rys. 6.10).



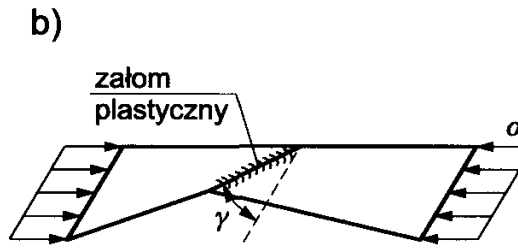
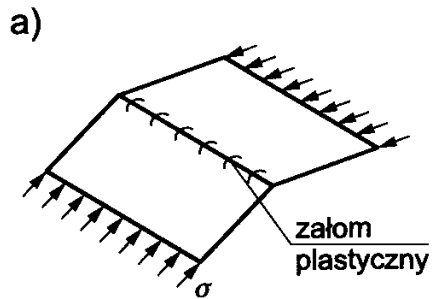
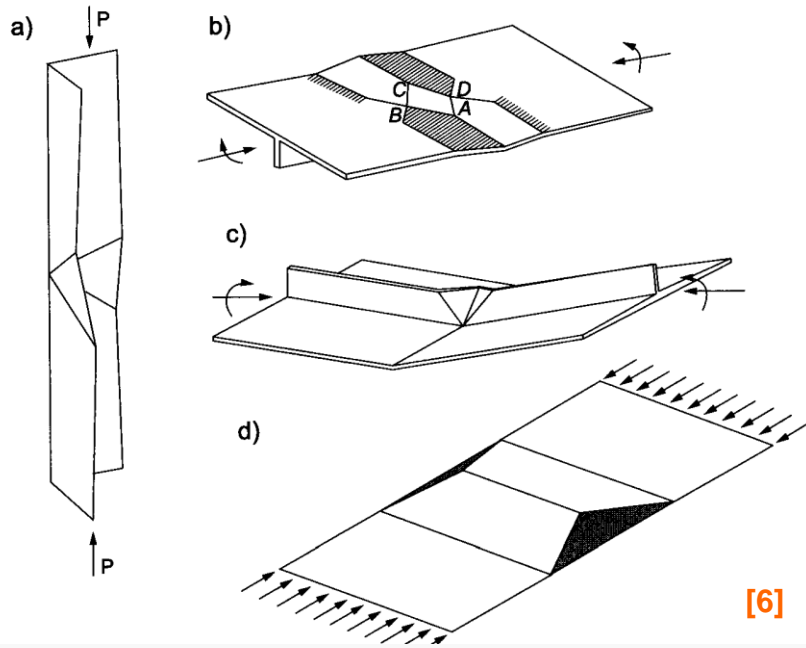
Rys. 6.9. Ceownik półzamknięty



Rys. 6.10. Dobór szerokości współpracującej ścianki ściskanej opartej na dwóch środnikach

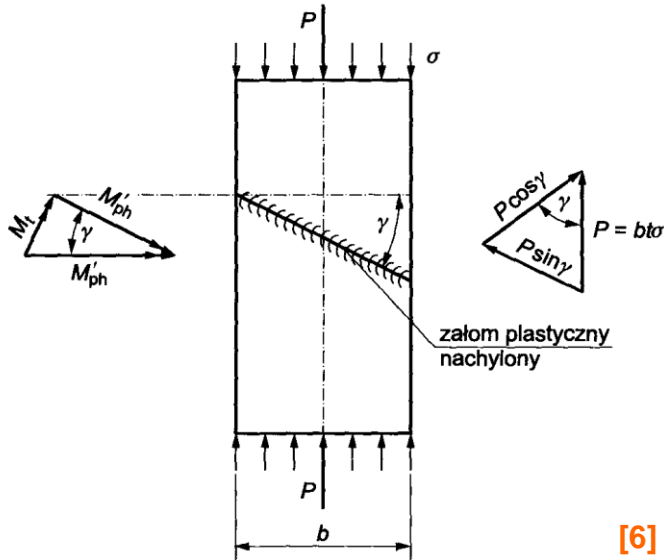
[4]

Przykłady mechanizmów
Zniszczenia
w elementach
cienkościennych



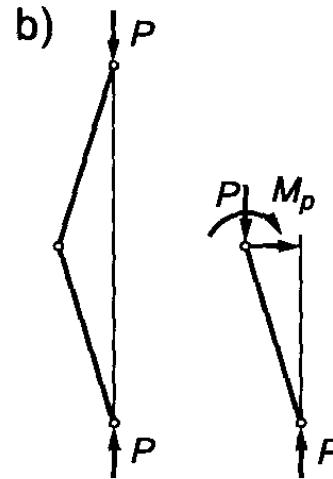
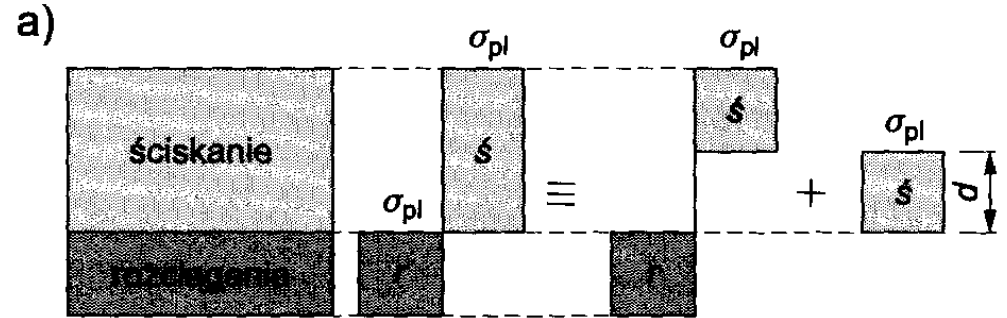
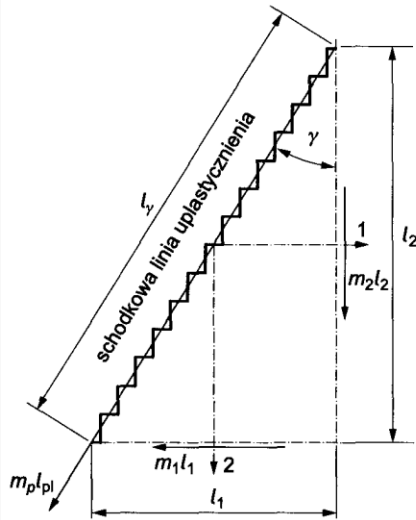
Załomy plastyczne na pełny moment plastyczny:
a) prostopadłe do siły, b) ukośne

Redukcja momentu plastycznego



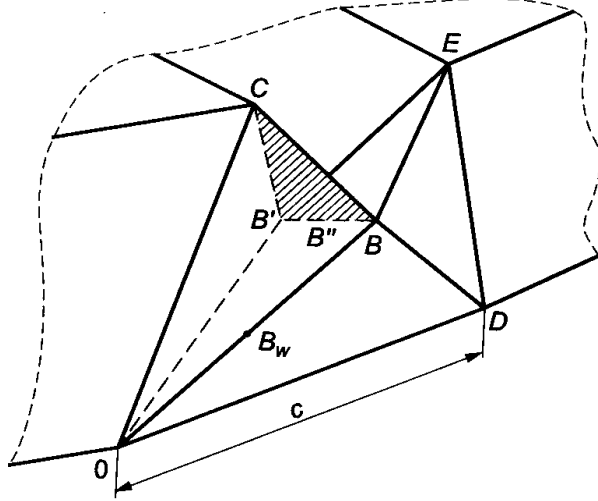
[6]

Nachylony załom plastyczny



Redukcja momentu Muray [1973] a) rozkład naprężeń w przekroju, b) schemat obciążenia

Linia schodkowa

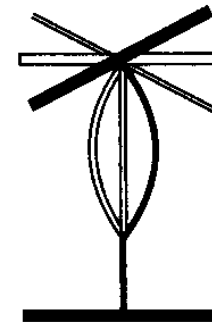
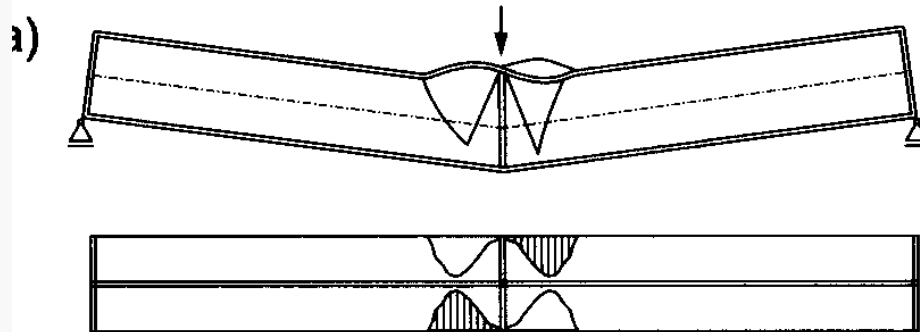
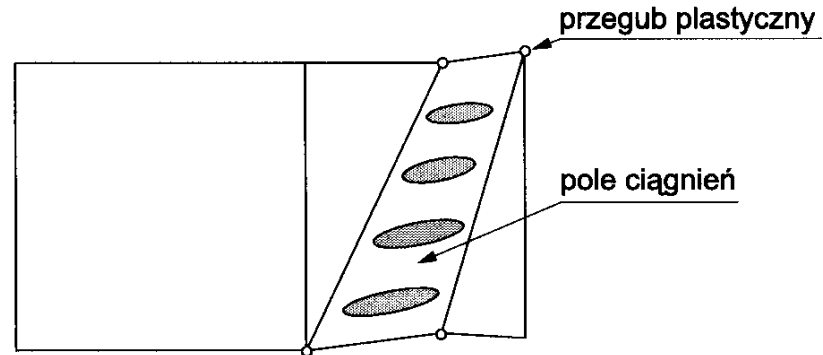


Wędrzący przegub lokalny

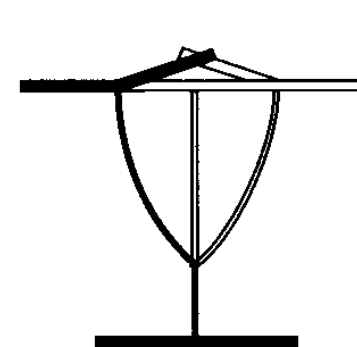
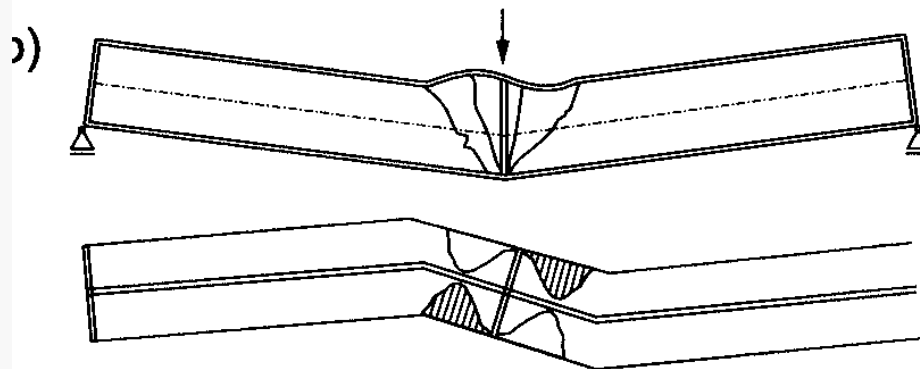
Mechanizmy zniszczenia płyt ściskanych przy symetrii

Mechanizm	Obciążenie w fazie zniszczenia
<p>mechanizm typu <i>piramida</i></p>	$N/N_{pl} = \sigma/\sigma_{pl} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2 \frac{\delta + \delta_1}{t} + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)^2} \right\}$
<p>mechanizm typu <i>pitched roof</i> (dach jednospadowy)</p> <p>Wędrząc</p>	$N/N_{pl} = \sigma/\sigma_{pl} = \left\{ 1 - 0,355 \frac{\delta + \delta_1}{t} + 0,056 \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)^2 - 0,003 \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)^3 \right\}$ <p>$N_{pl} = \sigma_{pl} t; \quad N = \sigma t$</p>
<p>mechanizm typu <i>roof</i> (dach)</p>	$\frac{N}{N_{pl}} = \frac{\sigma}{\sigma_{pl}} = \left(1 - 2 \frac{c}{b} \right) \left\{ \left[(1+r^2) \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right) + 1 \right]^{1/2} - (1+r) \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right) \right\} + \frac{c}{b} \left\{ \left[\frac{4(1+r^2)}{k^2} \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{2(1+r) \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)}{k} \right\} + \frac{1}{2(1+r)} \frac{1}{\delta + \delta_1} \ln \left\{ \left[\frac{4(1+r^2)}{k^2} \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{2(1+r) \left(\frac{\delta + \delta_1}{t} \right)}{k} \right\}$


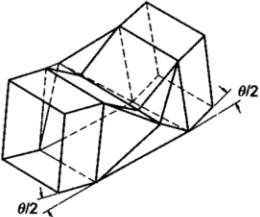

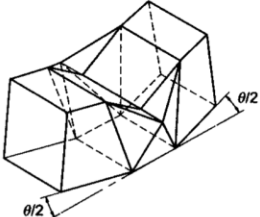

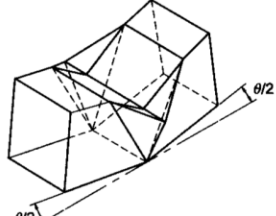

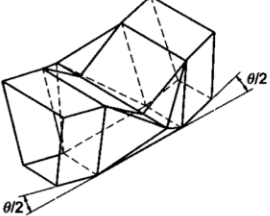

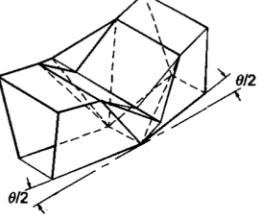
Mechanizm zniszczenia
belki z dużym udziałem ścinania



Mechanizm zniszczenia w dźwigarze dwuteowym: a) mechanizm symetryczny (wyboczenie środka)



b) Mechanizm niesymetryczny (wyboczenie środka połączone z obrotem półki)

Numer mechanizmu	Kształt przekroju	Mechanizm	Źródło
1		R1 	Kečman [8.6], Kotelko, Królak [8.8, 8.12, 8.14]
2		R2 	Królak, Kotelko [8.8, 8.12, 8.14]
3		R3 	Królak, Kotelko [8.8, 8.12, 8.14]
4		T1 	Królak, Kotelko [8.8, 8.12, 8.14]
5		T2 	Królak, Kotelko [8.8, 8.12, 8.14]

Teoria załamów cienkościennej {5}

Mechanizm zniszczenia dźwigarów

cienkościennej skrzynkowych