

Literatura:

- [1] Timoschenko S. Goodier A.J.N., Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951
- [2] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów dla wydziałów budowlanych, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
- [3] Rakowski G., Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa, 1979
- [4] Bower A., Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University Spring 2005,
- [5] Lebedev L.P., Cloud M.J., Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010
- [6] Chodor L., publikacje własne - różne.
- [7] Strony www [dostępne luty-kwiecień 2011] - różne

## Kanoniczne równanie Ritza fundamentalnym równaniem MES

Kanoniczne równanie metody Ritza (33) jest też **fundamentalnym równaniem MES**

$$[k]|a| = |F_V| + |F_A|. \quad (33)$$

$$[k] \int_V [B]^T [E] [B] |a| dV, \quad (30)$$

$$|F_V| = \int_V [N]^T |P| dV, \quad (31)$$

$$|F_A| = \int [N]^T |q_v| dA, \quad (32)$$

# Wprowadzenie do MES

## Fundamentalne założenie MES

Istota konwencjonalnej metody elementów skończonych polega na specjalnym wyborze współczynników  $|a|$  w aproksymacji (23).

Mianowicie jako takie stałe wybiera się przemieszczenia węzłów elementu skończonego  $u^{(e)}$ . Zależności z poprzedniego rozdziału zapisuje się dla każdego elementu skończonego (e):

$$|a| = u^{(e)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_n^{(1)} \\ \dots \\ u_1^{(N)} \\ u_2^{(N)} \\ u_n^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } n - \text{liczba składowych przemieszczenia punktu (w przestrzeni } n=3); N - \text{liczba elementów skończonych. Równanie (23) można zapisać więc w postaci:}$$

$$|u| = [N]^{(e)} |u|^{(e)} \quad (35)$$

$N \times n$

# Wprowadzenie do MES

## Macierz kształtu elementu

Zwykle przyjmuje się, następującą aproksymację przemieszczeń wewnątrz elementu  $u = u(x_1, x_2, x_3)$ :

$$|u| = [\varphi]|\alpha|, \quad (36)$$

gdzie  $\varphi = \varphi((x_1, x_2, x_3))$  są funkcjami przemieszczeń, a wektor  $|\alpha|$  został wprowadzony jako pomocnicza zmienna, która zostanie zredukowana w sposób pokazany niżej.

Dla węzła (I) mamy:

$$|u(x_1^{(I)}, x_2^{(I)}, x_3^{(I)})| = |u^{(I)}| = [\varphi(x_1^{(I)}, x_2^{(I)}, x_3^{(I)})]|\alpha| = = [\varphi^{(I)}] \cdot |\alpha|. \quad (37)$$

Zapisując podobnie dla pozostałych węzłów, otrzymamy:

$$u^{(e)} = \begin{vmatrix} u^{(I)} \\ u^{(J)} \\ \dots \\ u^{(N)} \end{vmatrix} = [C]|\alpha|, \quad \text{gdzie} \quad [C] = \begin{bmatrix} \varphi^{(I)} \\ \varphi^{(J)} \\ \dots \\ \varphi^{(N)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

# Teoria sprężystości

## Wprowadzenie do MES

### Macierz kształtu elementu

Z powyższej zależności wyznaczamy pomocniczy wektor  $|\alpha|$

$$|\alpha| = [C]^{-1} |u|^{(e)} \quad (39)$$

Podstawiając uzyskaną zależność do (36) otrzymamy

$$|u| = [\varphi][C]^{-1} |u|^{(e)} = [N]|u|^{(e)}, \quad (40)$$

gdzie  $[N]$  nazywa się macierzą kształtu, którą zapiszemy w postaci:

$$[N] = [N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(N)}],$$

gdzie

$$[N^{(I)}] = \begin{bmatrix} N_{11}^{(I)} & N_{12}^{(I)} & N_{13}^{(I)} \\ N_{21}^{(I)} & N_{22}^{(I)} & N_{23}^{(I)} \\ N_{31}^{(I)} & N_{32}^{(I)} & N_{33}^{(I)} \end{bmatrix}$$

## Dobór funkcji przemieszczeń

Funkcje przemieszczeń powinny być tak dobrane, by:

- 1) nie pozwalały na wytworzenie się stanu naprężenia w elemencie, jej przemieszczenia węzłów powodują jedynie ruch elementu jako ciała sztywnego
- 2) w sytuacji zgodności przemieszczeń węzłów z warunkiem stałych odkształceń można było zrealizować te stałe odkształcenia
- 3) odkształcenia na granicy elementu były skończone.

# Równania kanoniczne elementu

Kanoniczne równanie metody Ritza (33) w odniesieniu do elementu skończonego, przyjmie postać:

$$[k]^{(e)} |u|^{(e)} = |F_V|^{(e)} + |F_A|^{(e)}, \quad (41)$$

gdzie

$$[k]^{(e)} = [k_{ij}]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & \dots & k_{1N}^{(e)} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{N1}^{(e)} & \dots & k_{NN}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$|F_V|^{(e)} = |F_{V_i}^{(e)}| = \begin{vmatrix} F_{V1}^{(e)} \\ \dots \\ F_{VN}^{(e)} \end{vmatrix} \quad (43)$$

$$|F_A|^{(e)} = |F_{a_i}^{(e)}| = \begin{vmatrix} F_{a1}^{(e)} \\ \dots \\ F_{aN}^{(e)} \end{vmatrix} \quad (44)$$

gdzie: N-liczba węzłów elementu skończonego.

# Równania kanoniczne całej konstrukcji

Równanie kanoniczne dla całej konstrukcji zapiszemy w postaci:

$$[K]|u| = |F_V| + |F_A|, \quad (45)$$

gdzie składanie rozwiązań z elementów skończonych polega na szczególnym "sumowaniu" macierzy sztywności  $[k]^{(e)}$ , wektora sił masowych  $|F_V^{(e)}|$  oraz wektora sił powierzchniowych  $|F_A^{(e)}|$ :

$$[K_{ij}] = \sum_{(1)}^{(n)} [k_{ij}]^{(e)}, \quad (46)$$

$$|F_{Vi}| = \sum_{(1)}^{(n)} [F_{Vi}]^{(e)}, \quad (47)$$

$$|F_{Ai}| = \sum_{(1)}^{(n)} [F_{Ai}]^{(e)}, \quad (48)$$

Sumowanie dotyczy bloków macierzy sztywności i wektorów równoważników węzłowych "przyległych" do węzłów globalnych. Sposób składania rozwiązań pokażemy na przykładach.



## Zadanie 1 (pomocnicze)

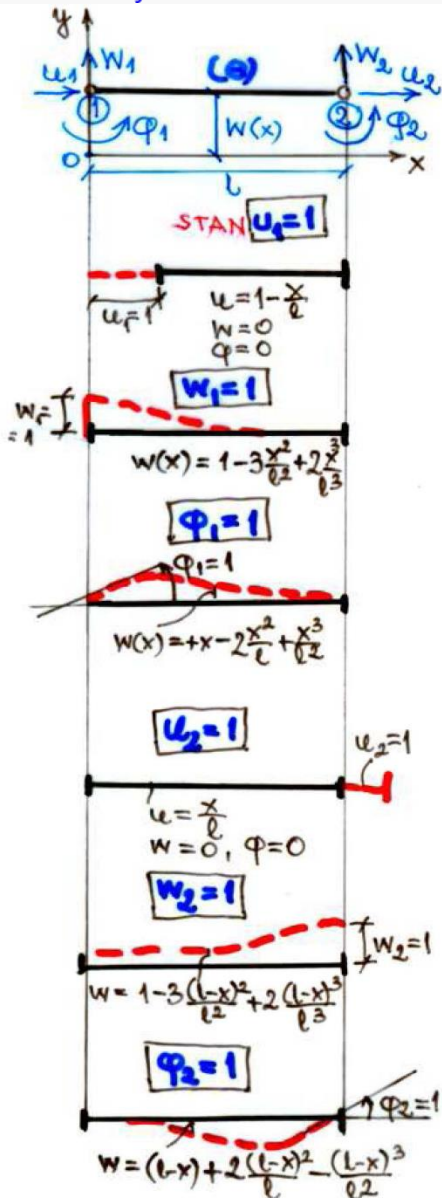
Określić **funkcje kształtu** elementu ( $e$ ) pręta prostego bez uwzględnienia wpływu przemieszczeń poziomych na kąty obrotu i ugięcia elementu

Pole przemieszczeń  $u(x)$  wewnątrz elementu skończonego, zgodnie z fundamentalnym założeniem metody elementów skończonych przyjmuje się w postaci:

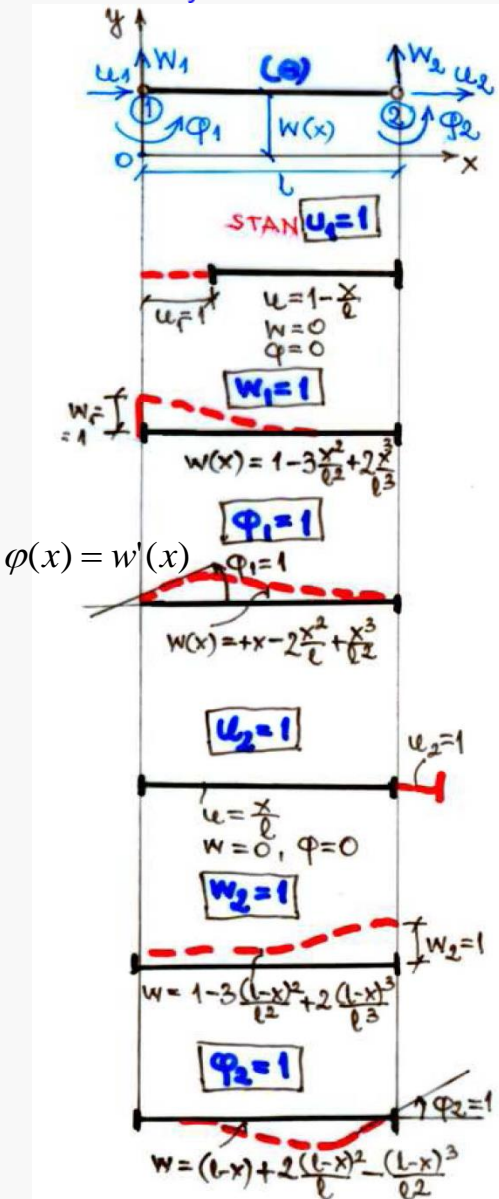
$$\left| u(x) \right| = [N] \cdot \left| u \right|^{(e)} \quad (49)$$

Gdzie –  $[N]$  macierz kształtu elementu,

$$\left| \begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \right| \cdot [N] \cdot \left| \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \right|^{(e)}$$



# Przykład belki na sprężystym podłożu



$$[N] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \\ 0 & x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3\frac{(l-x)^2}{l^2} + 2\frac{(l-x)^3}{l^3} \\ 0 & -(l-x) + 2\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Rys.1 Ilustracja macierzy kształtu elementu prętowego

Przemieszczenia pokazane na Rys.1. można uzyskać z rozwiązania równania różniczkowego linii ugięcia przy braku obciążenia na pręcie:

$$w^{IV} = 0 \quad (50)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania jest funkcją:

$$w = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

Stałe całkowania wyznaczymy z warunków brzegowych:

$$w(0) = w_1, w(l) = w_2, \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_1, \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = \varphi_2, \text{ gdzie } \frac{dw}{dx} = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2.$$

Otrzymujemy stąd równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Stąd [C] →

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ -2 \frac{\varphi_1}{l} + 3(w_2 - w_1) \frac{1}{l^2} \\ \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{l^2} - 2(w_2 - w_1) \frac{1}{l^3} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Podstawiając wartości stanu uzyskamy kolejne wyrazy macierzy [N]

Na przykład dla :

$$\frac{w}{w_1} = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \quad w_1 = 1, \varphi_1 = \varphi_2 = w_2 = 0$$

Pozostałe wyrazy znajdziemy analogicznie.

## Zadanie 2 (pomocnicze)

Obliczyć macierz sztywności dla elementu pręta z poprzedniego zadania.

Wprowadźmy pojęcia uogólnionych naprężeń oraz odkształceń  $|\sigma|, |\varepsilon|$ , które występują na poziomie przekroju pręta. Za naprężenia uogólnione przyjmujemy siły przekrojowe, natomiast odkształcenia uogólnione odpowiadają wielkościom, których iloczyn z naprężeniami określa pracę wewnętrzną. W przypadku zginania z rozciąganiem naprężenia uogólnione, to momenty zginające  $M$  i siły osiowe  $N$ . Natomiast odkształcenia uogólnione, to krzywizna  $w''$  i wydłużenie względne  $u'$ .

Znane zależności

$$M = +EJ_y w'', N = EAu' \quad \begin{vmatrix} N \\ M \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} u \\ w \end{vmatrix} \quad (52)$$

stanowią związki fizyczne. Znak (+) wystąpił wobec przyjętego układu współrzędnych. Związki te zapisaliśmy w zwartej formie spójnej z definicjami przyjętymi przy rozwiązaniu ZBTS metodą Ritza:

$$|\sigma| = [E] \cdot [\partial] \cdot |u|$$

skąd otrzymujemy wyrażenia na podstawowe macierze metody:

macierz Hooke'a  $[E]$  i macierz operatorów różniczkowania  $[\partial]$   
wektor naprężeń  $|\sigma|$  i przemieszczeń  $|u|$

$$[E] = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}, [\partial] = \begin{bmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{bmatrix} \quad |\sigma| = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}, |u| = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (53)$$

Macierz zgodności geometrycznej  $[B]$  obliczymy z definicji

$$[B] \stackrel{df}{=} [\partial][N] = \begin{bmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial^2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cc} \left(1 - \frac{x}{l}\right) & 0 & 0 & \left(\frac{x}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) & \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) & 0 & \left(1 - 3\frac{(l-x)^2}{l^2} + 2\frac{(l-x)^3}{l^3}\right) & \left(- (l-x) + 2\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^2}\right) \end{array} \right] = \\ & = \left[ \begin{array}{ccc|cc} \left(-\frac{1}{l}\right) & 0 & 0 & \left(\frac{1}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) & \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} + \frac{12(l-x)}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l} - \frac{6(l-x)}{l^2}\right) \end{array} \right] \quad (54) \end{aligned}$$

Macierz sztywności  $[k]^{(e)}$  elementu  $(e)$  otrzymamy z definicji.

Macierz sztywności określa siły przywęzłowe w funkcji przemieszczeń węzłów.

Zależności te

są znane w

mechanice

budowli pod

nazwą wzorów

transformacyjn

ych dla

elementu

sztywno-

sztywnego

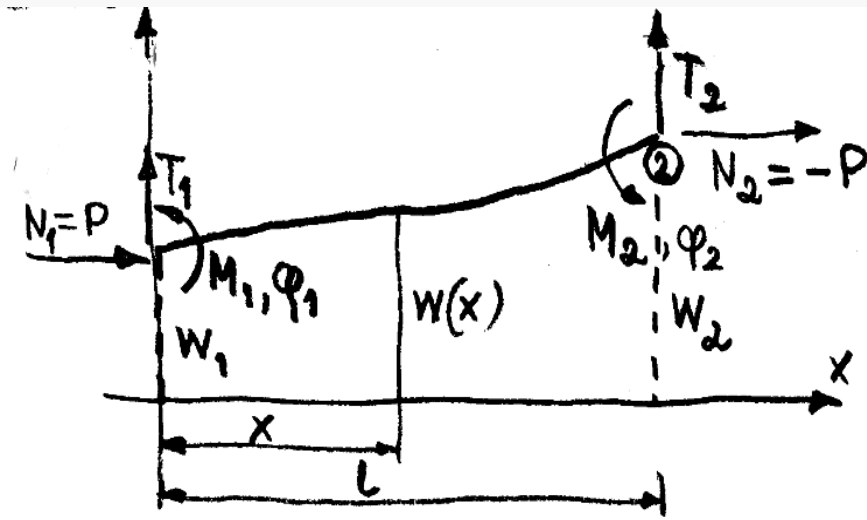
$$[k]^{(e)} = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (55)$$

$$[k]^{(e)} = \int_0^l [B]^T [E] [B] \quad (55)'$$

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +12\frac{EJ}{l^3} & +6\frac{EJ}{l^2} & 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & +6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & +6\frac{EJ}{l^2} & +4\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & +2\frac{EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} & 0 & +12\frac{EJ}{l^3} & -6\frac{EJ}{l^2} \\ 0 & +6\frac{EJ}{l^2} & +2\frac{EJ}{l} & 0 & -6\frac{EJ}{l^2} & +4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (56)$$

## Zadanie 3 (pomocnicze)

Obliczyć macierz sztywności dla prostoliniowego, jednorodnego elementu, obciążonego ściskającą siłą osiową.



Rys.2 Pręt ściskany siłą P

Ogólne równanie różniczkowe dla jednego elementu skończonego ma postać

$$[k]^{(e)} |u|^{(e)} = |F_A|^{(e)} + |F_V|^{(e)}$$

Macierz sztywności  $[k]^{(e)}$  można określić, znając zależność pomiędzy siłami węzłowymi  $[F]^{(e)} = |F_A|^{(e)} + |F_V|^{(e)}$

a przemieszczeniami węzłowymi  $|u|^{(e)}$

Zależności te dla zadanego zagadnienia (Rys.2), określimy poprzez rozwiązania równania różniczkowego pręta ściskanego bez obciążenia pomiędzy węzłami

$$EJw^{IV} + Pw' = 0 \quad (57)$$



# Przykład belki na sprężystym podłożu

Po wprowadzeniu zmiennych

$$\xi = \frac{x}{l}, \lambda^2 = \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \lambda^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad (57a)$$

$$w(\xi) = C_1 + C_2 \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi + C_4 \sin \lambda \xi$$

$$\frac{dw(0)}{d\xi} = \varphi_1 l, \frac{dw(1)}{d\xi} = \varphi_2 l, w(0) = w_1, w(1) = w_2$$

$$\frac{dw}{d\xi} = C_2 \lambda - C_3 \lambda \xi + C_4 \lambda \cos \lambda \xi$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \cos \lambda & \sin \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \sin \lambda & \lambda \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 l \\ w_2 \\ \varphi_2 l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \frac{[\varphi_1 l (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) - \varphi_2 l (\sin \lambda - \lambda) + (w_2 - w_1) \lambda (\cos \lambda - \lambda)]}{2\lambda(1 - \cos \lambda) - \lambda^2 \sin \lambda} \\ \dots \end{cases}$$

Ponieważ

$$M = EJw'' = \frac{EJ}{l^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{EJ}{l^2} (-C_3 \lambda^2 \cos \lambda \xi - C_4 \lambda^2 \sin \lambda \xi),$$

$$T = \frac{EJ}{l^3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} = \frac{EJ}{l^3} (-C_3 \lambda^3 \sin \lambda \xi - C_4 \lambda^3 \cos \lambda \xi), \quad (58)$$

$$M_1 = M(0) = \frac{EJ}{l^2} (-C_3 \lambda^2), T_1 = T(0) = \frac{EJ}{l^3} (-C_4 \lambda^3)$$

$$M_1 = + \frac{EJ}{l^2} \lambda \frac{\varphi_1 l (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda) - \varphi_2 l (\sin \lambda - \lambda) + (w_2 - w_1) \lambda (\cos \lambda - \lambda)}{\lambda (\cos \lambda - 1) + \sin^2 \lambda}$$

$$T_1 = + \frac{EJ}{l^3} \lambda^2 \frac{(\varphi_1 l + \varphi_2 l)(1 - \cos \lambda) + \lambda \sin \lambda (w_2 - w_1)}{\lambda (\cos \lambda - 1) + \sin^2 \lambda}$$

*itd. ...*



Szczególnie użyteczne formuły  $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ :  
znajdziemy dla (59)

$$M_1 = 6 \frac{EJ}{l^2} \Lambda_2 (w_1 - w_2) + 4 \frac{EJ}{l} \Lambda_3 \varphi_1 + 2 \frac{EJ}{l} \Lambda_4 \varphi_2$$

$$M_2 = 6 \frac{EJ}{l^2} \Lambda_2 (w_1 - w_2) + 2 \frac{EJ}{l} \Lambda_4 \varphi_1 + 4 \frac{EJ}{l} \Lambda_3 \varphi_2$$

gdzie:

$$T_1 = 12 \frac{EJ}{l^3} \Lambda_1 (w_1 - w_2) + 6 \frac{EJ}{l^2} \Lambda_2 (\varphi_1 + \varphi_2), T_2 = -T_1$$

$$\Lambda_1 = (\alpha \operatorname{ctg} \alpha) \Lambda_2 \stackrel{\alpha \approx 0}{\approx} 1 - \frac{1}{10} \frac{Pl^2}{EJ},$$

$$\Lambda_2 = \frac{\frac{1}{3} \alpha^2}{1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha} \stackrel{\alpha \approx 0}{\approx} 1 - \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EJ},$$

$$\Lambda_3 = \frac{3}{4} \Lambda_2 + \frac{1}{4} \alpha \operatorname{ctg} \alpha \stackrel{\alpha \approx 0}{\approx} 1 - \frac{1}{30} \frac{Pl^2}{EJ},$$

$$\Lambda_4 = \frac{3}{2} \Lambda_2 - \frac{1}{2} \alpha \operatorname{ctg} \alpha \stackrel{\alpha \approx 0}{\approx} 1 + \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EJ},$$

$$\alpha = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

krytyczne obciążenie  
„eulerowskie”

# Przykład belki na sprężystym podłożu



$$\begin{matrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & -\frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 \\ \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{4EJ}{l} \Lambda_3 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{2EJ}{l} \Lambda_4 \\ -\frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 \\ \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{2EJ}{l} \Lambda_4 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{4EJ}{l} \Lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (60)$$

$$|F| = [k] \cdot |u|^{(e)} \quad \text{Linearizacja funkcji}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} \\ -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{6EJ}{l^2} & 2\frac{EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & 4\frac{EJ}{l} \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} \frac{6l}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6l}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l \\ -\frac{6l}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6l}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30}l & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}$$

*Liniowa Macierz sztywności*

*Macierz geometryczna 1 rzędu (quasiliniowa)*

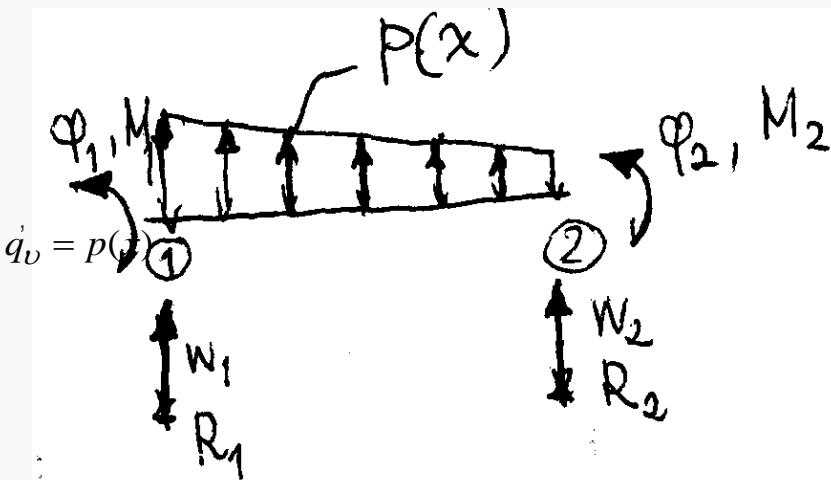
*Ostatecznie w celu uwzględnienia związku obciążeń podłużnych od przemieszczeń poziomych węzłów, uzupełnimy macierz sztywności o uzyskane wyniki i otrzymamy Macierz sztywności pręta zginanego i ściskanego*

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ [k] = \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 \\
 0 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{4EJ}{l} \Lambda_3 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{2EJ}{l} \Lambda_4 \\
 \hline
 -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} \Lambda_1 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 \\
 0 & \frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{2EJ}{l} \Lambda_4 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \Lambda_2 & \frac{4EJ}{l} \Lambda_3
 \end{array} \right]$$

(61)

## Zadanie 4 (pomocnicze)

Obliczyć obciążenie węzłowe, gdy na pręt prosty (ogólnie na krawędź elementu elementu), działa obciążenie ciągłe pomiędzy węzłami. obciążonego ściskającą siłą osiową.



Rys.3. Obciążenie międzywęzłowe  $p(x)$

Obciążenie międzywęzłowe

wyznaczymy z definicji

$$|F_A| = \int_A [N]^T |q_v| dA,$$

gdzie zgodnie z Rys.3. ,  $q_v = p(x)$

a macierz kształtu (zadanie pomocnicze 1 - wynosi

$$[N]^T = \begin{bmatrix} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) \\ \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right) \\ \left(1 - 3\frac{(l-x)^2}{l^2} + 2\frac{(l-x)^3}{l^3}\right) \\ \left(- (l-x) + 2\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^2}\right) \end{bmatrix}$$

# Przykład belki na sprężystym podłożu

Z definicji dla  $q_v = p = \text{const}$  mamy:

$$|F_A| = \begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \int_0^l p \cdot \begin{bmatrix} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) \\ \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^2}{l^3}\right) \\ \left(1 - 3\frac{(l-x)^2}{l^2} + 2\frac{(l-x)^3}{l^3}\right) \\ \left(- (l-x) + 2\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^2}\right) \end{bmatrix} dx = p \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ +\frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Analogicznie można znaleźć obciążenie węzłowe przy innych postaciach obciążenia między węzłami, np. dla  $q_v = p(x) = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{x}{l}$

$$(63) \quad |F_A| = \int_0^l \left(p_1 + (p_2 - p_1)\frac{x}{l}\right) \cdot \begin{bmatrix} \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right) \\ \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^2}{l^3}\right) \\ \left(1 - 3\frac{(l-x)^2}{l^2} + 2\frac{(l-x)^3}{l^3}\right) \\ \left(- (l-x) + 2\frac{(l-x)^2}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^2}\right) \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3l}{20}(p_1 + 7p_2) \\ \frac{l^2}{60}(3p_1 + 2p_2) \\ \frac{3l}{20}(p_1 + 7p_2) \\ -\frac{l^2}{60}(3p_1 + 2p_2) \end{bmatrix}$$

## Zadanie 5 (pomocnicze)

Określić wektor równoważników węzłowych dla elementu belki spoczywającej na sprężystym podłożu Winklera ze współczynnikiem sprężystości podłoża

Z definicji sprężystego podłoża winklerowskiego, znamy jego odpór:

$$q_v = p(x) = -k \cdot w(x). \quad (63)$$

Ponieważ

$$w(x) = [N] \cdot |u|^{(e)} \quad |F_A| = -\int_0^l [N]^T k [N] \cdot |u|^{(e)} dx = -k \int_0^l ([N]^T [N] dx) |u|^{(e)},$$

Dla belki zginanej  
mamy

$$[N]^T [N] = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\ l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ (3\xi^2 - 2\xi^3) \\ -\xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix}^2 \quad \xi = x/l$$



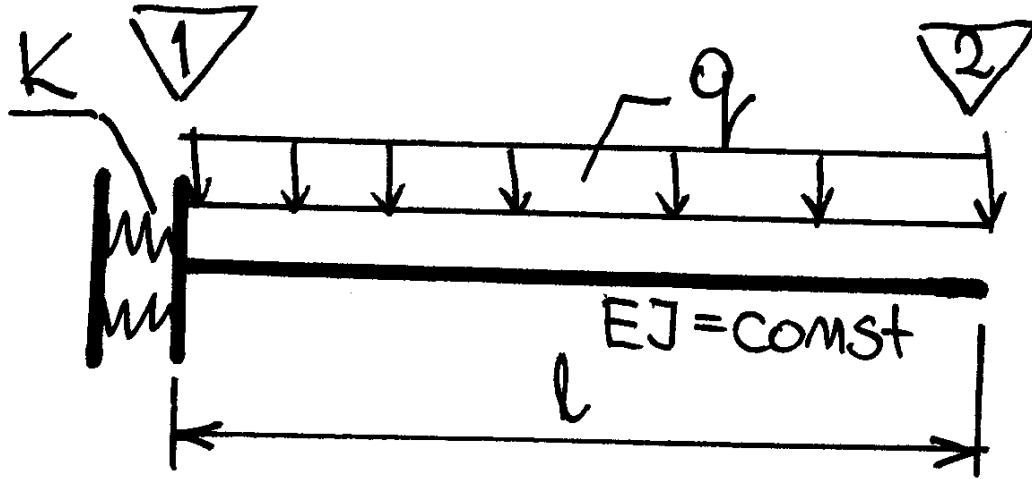
Po wykonaniu przypisanych działań i po obliczeniu całki oznaczonej (w granicach od 0 do  $l$ ), mamy:

$$|F_A| = -\frac{kl}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

(64)

### Zadanie 6 (przykład liczbowy)

Znaleźć ugięcie i kat obrotu końca wspornika metodą MES.



$$[K] \cdot |u| = |F|$$

$$|u| = \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [k]^{(e)} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EJ}{l^3} & 6 \frac{EJ}{l^2} & -12 \frac{EJ}{l^3} & 6 \frac{EJ}{l^2} \\ 6 \frac{EJ}{l^2} & 4 \frac{EJ}{l} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 2 \frac{EJ}{l} \\ -12 \frac{EJ}{l^3} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 12 \frac{EJ}{l^3} & -6 \frac{EJ}{l^2} \\ 6 \frac{EJ}{l^2} & 2 \frac{EJ}{l} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 4 \frac{EJ}{l} \end{bmatrix}$$

$$|F| = -q \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix}$$

po rozpisaniu układ kanoniczny przyjmie postać:

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{-ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \\ 1 \\ \frac{l}{6} \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:  $w_1 = 0, M_1 = -\varphi_1 K$

uwzględniamy przez odpowiednią modyfikację równania kanonicznego

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ 0 & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ 0 & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{-ql}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{6} \\ 1 \\ \frac{l}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_1 K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w rezultacie modyfikacji:

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 + \frac{Kl}{EJ} & \frac{-6}{l} & 2 \\ \frac{-6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ 2 & \frac{-6}{l} & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{-ql}{2EJ} \begin{bmatrix} \frac{l}{6} \\ 1 \\ \frac{-l}{6} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie tego układu równań daje:

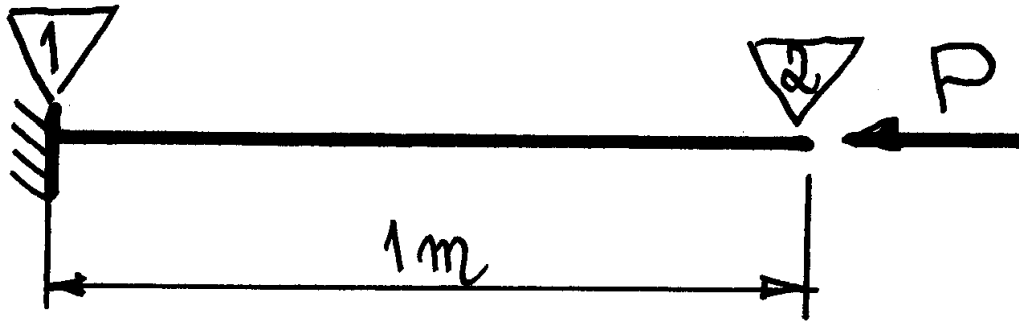
$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{-ql^2}{2K} \begin{bmatrix} 1 \\ l \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-ql^2}{EJ} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{l^2} \\ \frac{l}{6} \end{bmatrix}$$

*Uwaga:*

- 1) dla stałej sprężystości podpory  $K=\infty$  otrzymamy rozwiązanie dla wspornika idealnie utwierdzonego,
- 2) dla  $K=0$  ustrój jest mechanizmem. Świadczy o tym fakt, że wyznacznik układu  $=0$  i równanie kanoniczne staje się nieoznaczone.

### Zadanie 7 (przykład liczbowy)

Metoda MES obliczyć siłę krytyczną belki-słupa



Macierz sztywności układu 1-no elementowego złożona z macierzy liniowej i geometrycznej  $\begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{k} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \bar{k} \end{bmatrix}$

$$EI = 100 \text{ kNm} \\ EA (= \text{pominięć})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EJ}{l^3} & 6 \frac{EJ}{l^2} & -12 \frac{EJ}{l^3} & 6 \frac{EJ}{l^2} \\ 6 \frac{EJ}{l^2} & 4 \frac{EJ}{l} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 2 \frac{EJ}{l} \\ -12 \frac{EJ}{l^3} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 12 \frac{EJ}{l^3} & -6 \frac{EJ}{l^2} \\ 6 \frac{EJ}{l^2} & 2 \frac{EJ}{l} & -6 \frac{EJ}{l^2} & 4 \frac{EJ}{l} \end{bmatrix} = 100 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{k} \end{bmatrix} = -P \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:  $w_1 = f_1 = 0$ . uwzględniamy poprzez modyfikację macierzy sztywności, czyli: wykreślenie wierszy i kolumn odpowiadających odebranym stopniom swobody.

$$[k] = 100 \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Z kryterium stateczności  $\text{Det}[k] = 0$ ,  
mamy

$$120000 - 520P + \frac{3}{20}P^2 = 0$$

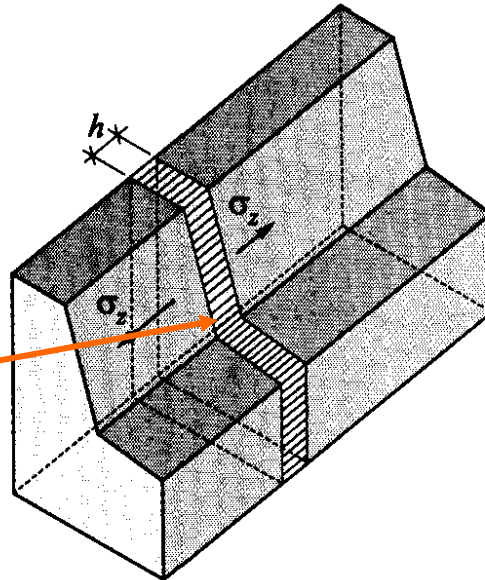
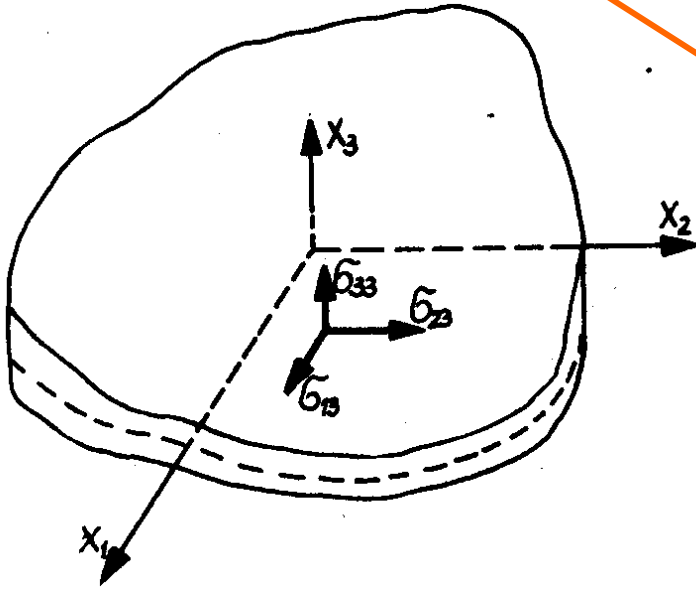
$$P_{cr} = 100 * \frac{4}{3} (13 - 2\sqrt{31}) = 248,6 \text{ kN}$$

Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia, to: .

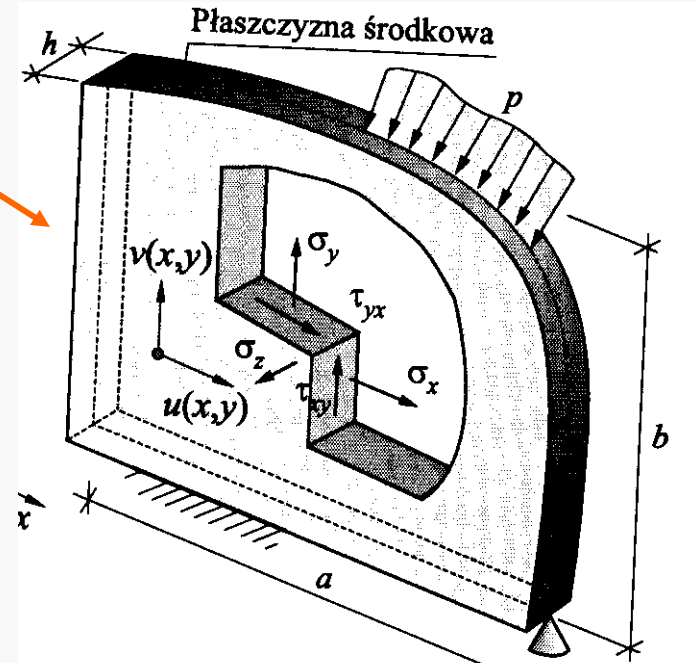
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = 246,7 \text{ kN}$$

### Płaski stan naprężenia

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

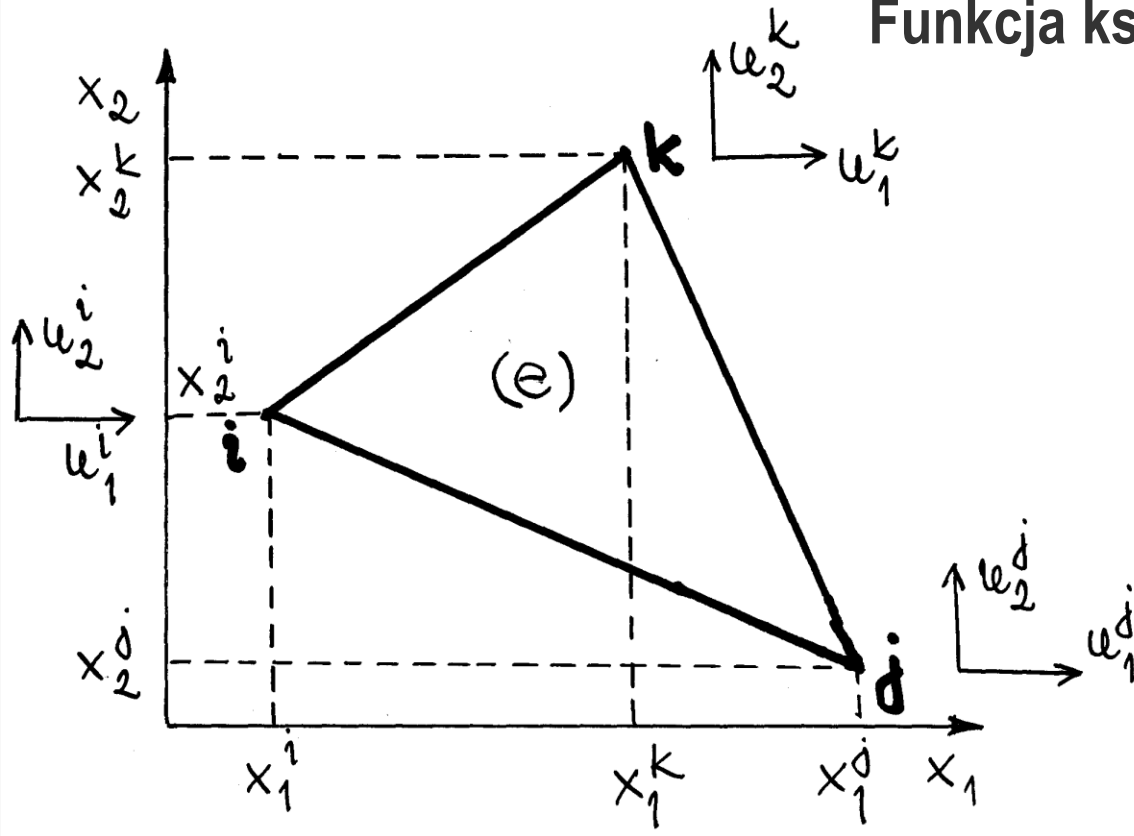


*Płaski stan odkształcenia.*



Płaski stan naprężenia to taki, w którym składowe tensora naprężenia są niezerowe tylko w dwóch kierunkach na płaszczyźnie. Taki stan naprężenia nazywamy stanem tarczowym, choć od razu należy podkreślić, że towarzyszy mu przestrzenny stan odkształceń

### Funkcja kształtu dla elementu tarczy



Założmy, że przemieszczenia wewnątrz elementu są liniową funkcją przemieszczeń węzłowych, co można zapisać w postaci:

$$|u(x_1, x_2)| = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{matrix},$$

$$|u| = [\varphi] \cdot |\alpha|$$



## Przykład tarczy

Macierz węzłowych funkcji kształtu wyznaczymy z formuły MES

$$|u|^{(e)} = [C] \cdot |\alpha| \Rightarrow |\alpha| = [C]^{-1} \cdot |u|^{(e)}$$

Stąd po uwzględnieniu  $|u|$  uzyskamy wyrażenie na funkcję kształtu elementu  $[N]$

$$|u| = [\varphi] \cdot [C]^{-1} |u|^{(e)} = [N] |u|^{(e)} \Rightarrow [N] = [\varphi] \cdot [C]^{-1}$$

Formuła ta rozważanego przypadku przyjmie dla węzłów i,j,k:

$$\begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^i & x_2^i \\ \hline 1 & x_1^j & x_2^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^j & x_2^j \\ \hline 1 & x_1^k & x_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^k & x_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^i & x_2^i \\ \hline 1 & x_1^j & x_2^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^j & x_2^j \\ \hline 1 & x_1^k & x_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^k & x_2^k \end{bmatrix},$$

Ponieważ  
(podwojone pole  
trójkąta)

$$\det[C] = 2\Delta$$

$$\begin{aligned} a^i &= x_1^{i+1} \cdot x_2^{i+2} - x_2^{i+1} \cdot x_1^{i+2}, \\ b^i &= x_2^{i+1} - x_2^{i+2}, \\ c^i &= x_1^{i+2} - x_1^{i+1} \end{aligned}, \quad [C]^{-1} = \frac{1}{2\Delta}$$

$$\begin{bmatrix} a^i & 0 & a^j & 0 & a^k & 0 \\ b^i & 0 & b^j & 0 & b^k & 0 \\ \hline c^i & 0 & c^j & 0 & c^k & 0 \\ 0 & a^i & 0 & a^j & 0 & a^k \\ \hline 0 & b^i & 0 & b^j & 0 & b^k \\ 0 & c^i & 0 & c^j & 0 & c^k \end{bmatrix},$$

Formuła ta rozważanego przypadku przyjmie dla węzłów i,j,k:

$$\begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^i & x_2^i \\ \hline 1 & x_1^j & x_2^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^j & x_2^j \\ \hline 1 & x_1^k & x_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^k & x_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^i & x_2^i \\ \hline 1 & x_1^j & x_2^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^j & x_2^j \\ \hline 1 & x_1^k & x_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1^k & x_2^k \end{bmatrix},$$

Ponieważ  
(podwojone pole  
trójkąta)

$$\det[C] = 2\Delta$$

$$\begin{aligned} a^i &= x_1^{i+1} \cdot x_2^{i+2} - x_2^{i+1} \cdot x_1^{i+2}, \\ b^i &= x_2^{i+1} - x_2^{i+2}, \\ c^i &= x_1^{i+2} - x_1^{i+1} \end{aligned}, \quad [C]^{-1} = \frac{1}{2\Delta}$$

$$\begin{bmatrix} a^i & 0 & a^j & 0 & a^k & 0 \\ b^i & 0 & b^j & 0 & b^k & 0 \\ \hline c^i & 0 & c^j & 0 & c^k & 0 \\ 0 & a^i & 0 & a^j & 0 & a^k \\ \hline 0 & b^i & 0 & b^j & 0 & b^k \\ 0 & c^i & 0 & c^j & 0 & c^k \end{bmatrix},$$

Stąd funkcja kształtu:

$$[N] = [I\bar{N}^i, I\bar{N}^j, I\bar{N}^k] \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}^i = \frac{1}{2\Delta} (a^i + b^i x_1 + c^i x_2)$$

$$\bar{N}^j = \frac{1}{2\Delta} (a^j + b^j x_1 + c^j x_2)$$

$$\bar{N}^k = \frac{1}{2\Delta} (a^k + b^k x_1 + c^k x_2)$$

Funkcję kształtu można zapisać w postaci macierzowej:

$$[N] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a^i + b^i x_1 + c^i x_2 & 0 & a^j + b^j x_1 + c^j x_2 & 0 & a^k + b^k x_1 + c^k x_2 & 0 \\ 0 & a^i + b^i x_1 + c^i x_2 & 0 & a^j + b^j x_1 + c^j x_2 & 0 & a^k + b^k x_1 + c^k x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^i & 0 & a^j & 0 & a^k & 0 \\ b^i & 0 & b^j & 0 & b^k & 0 \\ c^i & 0 & c^j & 0 & c^k & 0 \\ 0 & a^i & 0 & a^j & 0 & a^k \\ 0 & b^i & 0 & b^j & 0 & b^k \\ 0 & c^i & 0 & c^j & 0 & c^k \end{bmatrix}$$

Macierz odkształceń i naprężeń dla elementu tarczy

$$|\varepsilon| = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [D] \cdot |u| = [D] \cdot [N] \cdot |u|^{(e)}$$

$$|\varepsilon| = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}^i & 0 & \bar{N}^j & 0 & \bar{N}^k & 0 \\ 0 & \bar{N}^i & 0 & \bar{N}^j & 0 & \bar{N}^k \end{bmatrix} \cdot |u|^{(e)} = [B] \cdot |u|^{(e)}$$

$$[B] = [B^i \mid B^j \mid B^k], [B^i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b^i & 0 \\ 0 & c^i \\ c^i & b_i \end{bmatrix} \quad (i = i, j, k)$$

Macierz zgodności geometrycznej

$$[B] = [B^i \mid B^j \mid B^k], [B^i] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b^i & 0 \\ 0 & c^i \\ c^i & b_i \end{bmatrix} \quad (i = i, j, k)$$

$$\begin{aligned} a^i &= x_1^j \cdot x_2^k - x_2^j \cdot x_1^k, \\ a^j &= x_1^k \cdot x_2^i - x_2^k \cdot x_1^i, \\ a^k &= x_1^i \cdot x_2^j - x_2^i \cdot x_1^j, \\ b^i &= x_2^j - x_2^k, b^j = x_2^k - x_2^i, b^k = x_2^i - x_2^j, \\ c^i &= x_1^k - x_1^j, c^j = x_1^i - x_1^k, c^k = x_1^j - x_1^i. \end{aligned}$$

Macierz naprężeń

Macierz Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń

$$|\sigma| = [E] \varepsilon = [E][B] \cdot |u|^{(e)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b^i & 0 & b^j & 0 & b^k & 0 \\ 0 & c^i & 0 & c^j & 0 & c^k \\ c^i & b^i & c^j & b^j & c^k & b^k \end{bmatrix} \cdot |u|^{(e)}$$

Macierz sztywności elementu tarczy

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{ik} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jk} \\ k_{ki} & k_{kj} & k_{kk} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \int_V [B]^T [E][B] dV = \int_A [B]^T [E][B] \cdot t dx_1 dx_2 = [B]^T [E][B] \cdot t \cdot \Delta$$

t- grubość elementu tarczowego, a - pole powierzchni elementu

$$[k_{rs}] = [B^r]^T [E][B^s] \cdot t \cdot \Delta = \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} b^r & 0 & c^r \\ 0 & c^r & b^r \end{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^s & 0 \\ 0 & c^s \\ c^s & b^s \end{bmatrix} t\Delta$$

$$[k_{rs}] = \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} b^r b^s + \frac{1-\nu}{2} c^r c^s & \nu b^r c^s + \frac{1-\nu}{2} c^r b^s \\ \nu c^r b^s + \frac{1-\nu}{2} b^r c^s & c^r c^s + \frac{1-\nu}{2} b^r b^s \end{bmatrix}$$



Wektor sił węzłowych od sił objętościowych P

$$|F_V|^{(e)} = \int_V [N]^T |P| dV = |P| \cdot \frac{\Delta}{3}$$

Wektor sił węzłowych od sił powierzchniowych  $|p_\nu|$

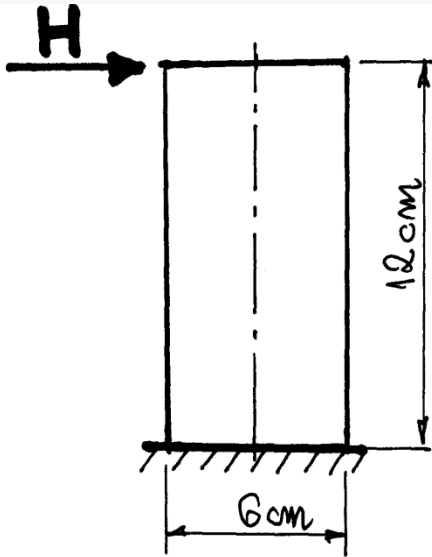
$$|F_A|^{(e)} = \int_V [N]^T |p_\nu| dA$$

Obciążenie (V,H) skupione w punkcie  $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$  możemy zapisać w postaci

$$|p_\nu| = \left| \frac{V}{H} \right| \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0)$$

gdzie operator Diraca  $\delta(x - x^0) = \begin{cases} 1 \rightarrow x = x^0 \\ 0 \rightarrow x \neq x^0 \end{cases}$

$$|F_A|^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} [N]^T (x_1^0, x_2^0) \left| \frac{V}{H} \right|$$

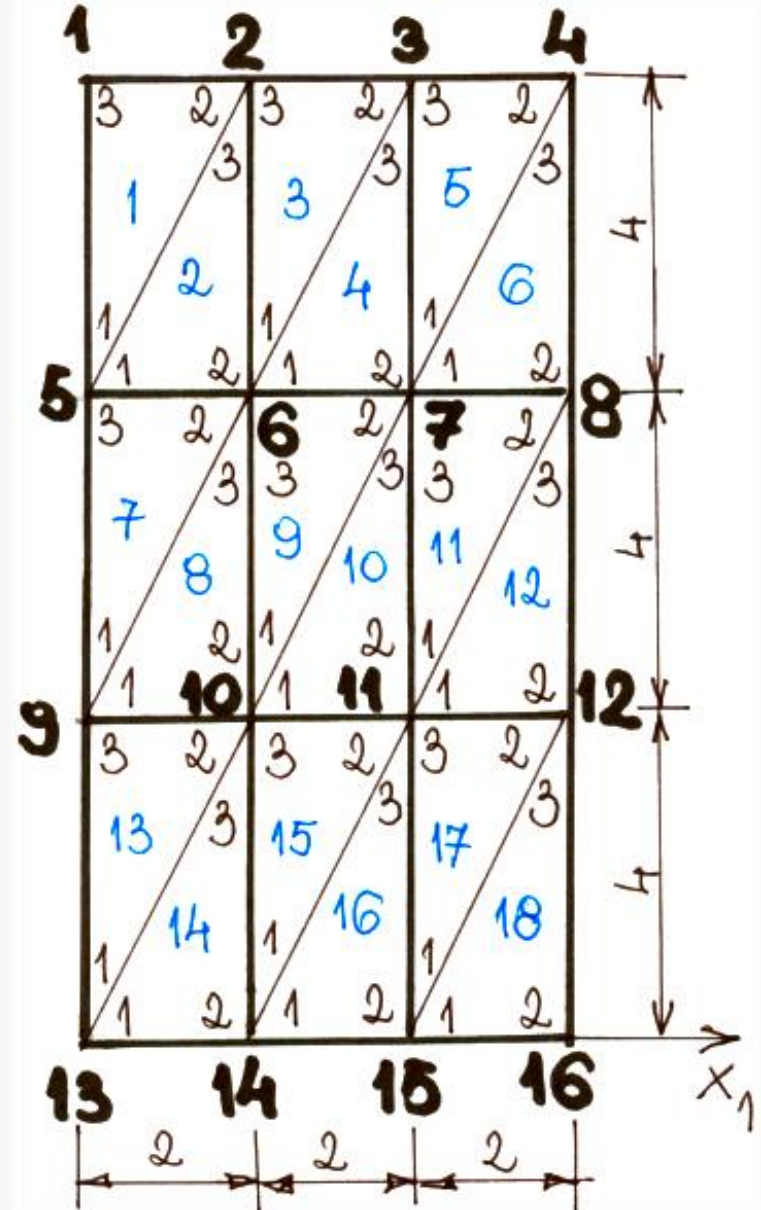


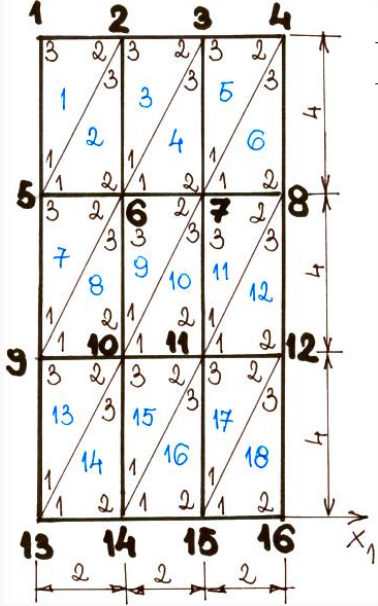
$$t = 1 \text{ cm}$$

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ daN/cm}^2$$

$$\nu = 1/4$$

$$P = \text{const}$$





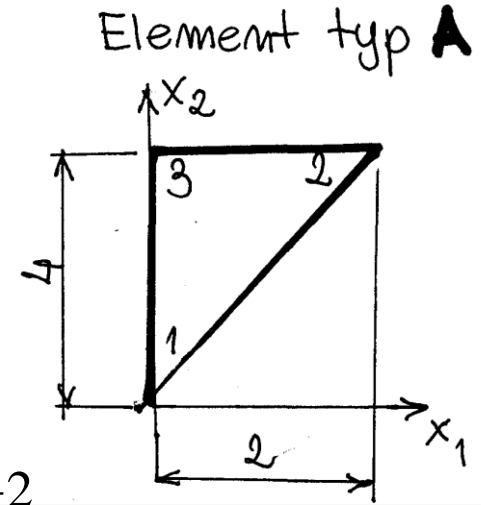
Macierz sztywności elementu typu A

węzeł 1(=i):  $x_1^1 = 0, x_2^1 = 0$

węzeł 2(=j):  $x_1^2 = 2, x_2^2 = 4$

węzeł 3(=k):  $x_1^3 = 0, x_2^3 = 4$

Zmienne pomocnicze  $b^r = x_2^{r+1} - x_2^{r+2}$



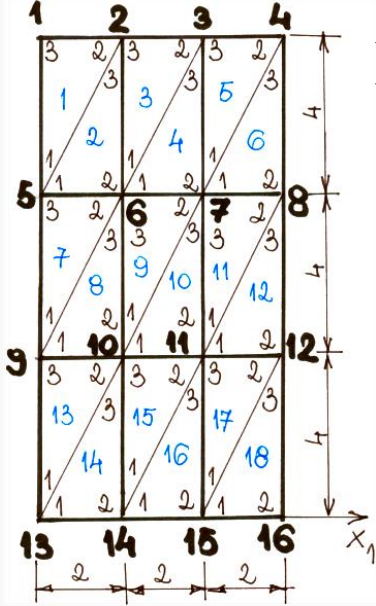
$$E_t = \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot (1 - \frac{1}{16})} = \frac{400000}{3}$$

$$\frac{1-\nu}{2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} \cdot c^r = x_1^{r+2} - x_1^{r+1}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$$

$$k_{11} = E_t \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + \frac{3}{8}(-2) \cdot 0 & \frac{1}{4}0 \cdot (-2) + \frac{3}{8}(-2) \cdot 0 \\ \frac{1}{4}(-2) \cdot 0 + \frac{3}{8}0 \cdot (-2) & (-2)(-2) + \frac{3}{8}0 \cdot 0 \end{bmatrix} = E_t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{vmatrix} x_2^2 - x_2^3 \\ x_2^3 - x_2^1 \\ x_2^1 - x_2^2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1^1 - x_1^2 \\ x_1^2 - x_1^3 \\ x_1^3 - x_1^1 \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$



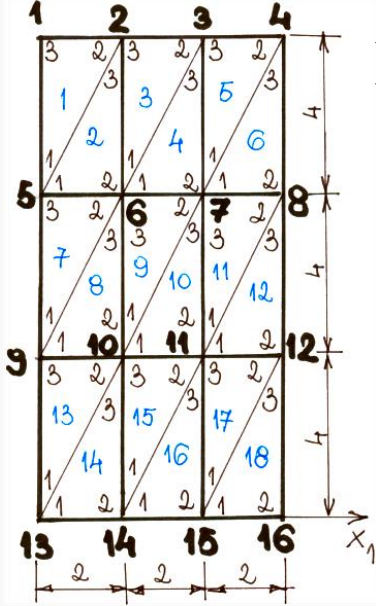
Macierz sztywności elementu typu A

$$k_{12} = E_t \begin{bmatrix} 0 \cdot (-4) + \frac{3}{8}(-2) \cdot 0 & \frac{1}{4}0 \cdot 0 + \frac{3}{8}(-2) \cdot 4 \\ \frac{1}{4}(-2) \cdot 4 + \frac{3}{8}0 \cdot 0 & (-2)0 + \frac{3}{8}0 \cdot 4 \end{bmatrix} = E_t \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{13} = E_t \begin{bmatrix} 0 \cdot (-4) + \frac{3}{8}(-2) \cdot 2 & \frac{1}{4}0 \cdot 0 + \frac{3}{8}(-2) \cdot 4 \\ \frac{1}{4}(-2) \cdot (-4) + \frac{3}{8}0 \cdot 2 & (-2)2 + \frac{3}{8}0 \cdot (-4) \end{bmatrix} = E_t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{(A)} = E_t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ \hline 0 & 4 & 16 & 0 & -16 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ \hline -\frac{3}{2} & -4 & -16 & 3 & \frac{32}{5} & -7 \\ 3 & -4 & 2 & -6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{(1)} = [k]^{(3)} = [k]^{(5)} = [k]^{(7)} = [k]^{(9)} = [k]^{(11)} = [k]^{(13)} = [k]^{(15)} = [k]^{(17)} = [k]^{(A)} = [k]$$

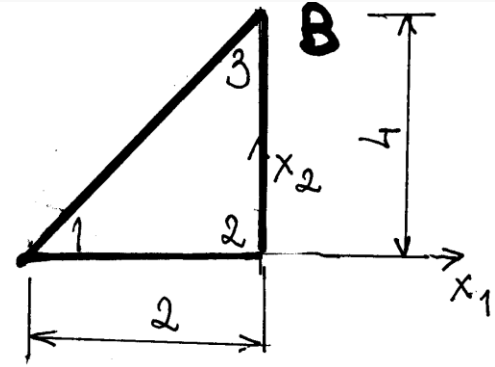


Macierz sztywności elementu typu B

węzeł 1(=i):  $x_1^1 = -2, x_2^1 = 0$

węzeł 2(=j):  $x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$

węzeł 3(=k):  $x_1^3 = 0, x_2^3 = 4$



$$k_{11} = E_t \begin{bmatrix} (-4)(-4) + \frac{3}{8} 0 \cdot (-2) & \frac{1}{4} 0 \cdot (-4) \cdot 0 + \frac{3}{8} 0 \cdot (-4) \\ \frac{1}{4} 0 \cdot (-4) + \frac{3}{8} (-4) \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + \frac{3}{8} (-4) \cdot (-4) \end{bmatrix} = E_t \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{(B)} = E_t \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 3 & -6 & -3 & 0 \\ -16 & 3 & \frac{35}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & -6 & -5 & 10 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

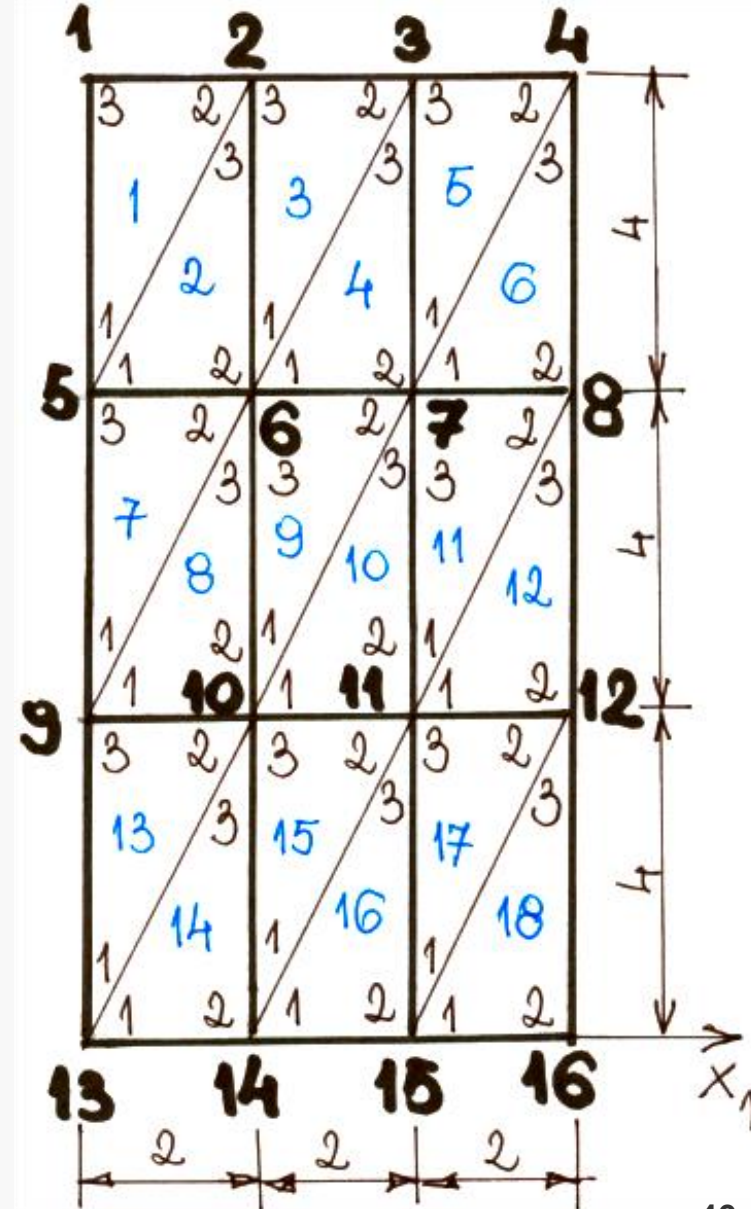
$$\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \\ c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$[k]^{(2)} = [k]^{(4)} = [k]^{(6)} = [k]^{(8)} = [k]^{(10)} = [k]^{(12)} = [k]^{(14)} = [k]^{(16)} = [k]^{(18)} = [k]^{(B)} = [\bar{k}]$

Macierz sztywności układu

$$K_{i,j} = \sum^{(e)} k_{ij}$$

1	2	3	4	5	6	⊗
$k_{33}$	$k_{32}$	0	0	$k_{31}$	0	1
$k_{23}$	$k_{Ag}$	$k_{32}$	0	$k_{21} + \bar{k}_{31}$	$\bar{k}_{32} + k_{31}$	2
0	$k_{23}$	$k_{Ag}$	$k_{32}$	0	$k_{21} + \bar{k}_{31}$	3
0	0	$k_{23}$	$k_{22} + \bar{k}_{33}$	0	0	4
$k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	0	$k_{A1}$	$\bar{k}_{12} + k_{32}$	5
0	$\bar{k}_{23} + k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	$\bar{k}_{21} + \bar{k}_{23}$	$k_A$	6
0	0	$\bar{k}_{23} + k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	$\bar{k}_{12} + k_{23}$	7
0	0	0	$\bar{k}_{23}$	0	0	8
0	0	0	0	$k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	9
0	0	0	0	0	$\bar{k}_{23}$	10
0	0	0	0	0	0	11
0	0	0	0	0	0	12
0	0	0	0	0	0	13
0	0	0	0	0	0	14
0	0	0	0	0	0	15
0	0	0	0	0	0	16

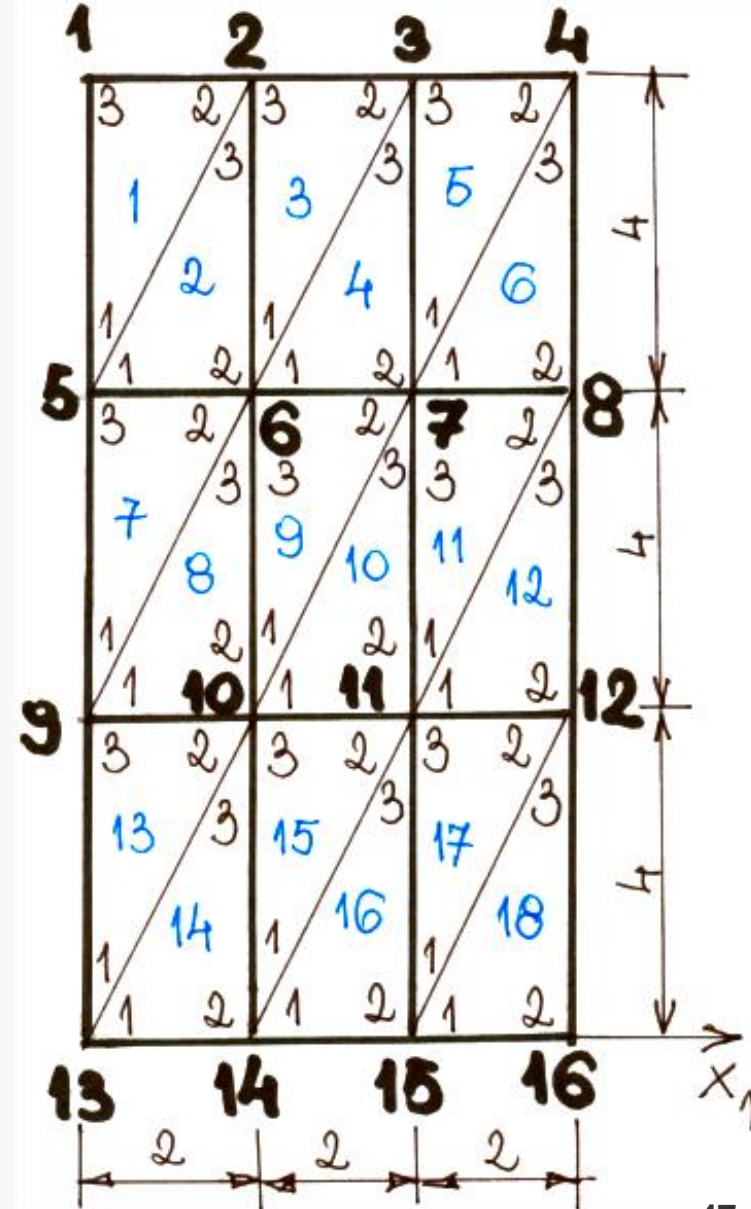


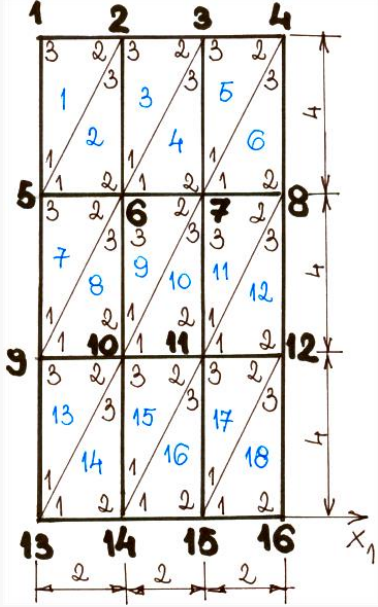


Macierz sztywności układu

$$K_{i,j} = \sum^{(e)} k_{ij}$$

7	8	9	10	11	12	⊗
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
$k_{32} + k_{31}$	0	0	0	0	0	3
$k_{21} + k_{31}$	$k_{32}$	0	0	0	0	4
0	0	$k_{31}$	0	0	0	5
$k_{12} + k_{32}$	0	$k_{21} + \bar{k}_{31}$	$\bar{k}_{32} + k_{31}$	0	0	6
$k_A$	$k_{12} + k_{32}$	0	$k_{21} + \bar{k}_{31}$	$k_{32} + k_{31}$	0	7
$\bar{k}_{21} + k_{23}$	$k_{Ap}$	0	0	$k_{21} + k_{31}$	$\bar{k}_{32}$	8
0	0	$k_{A1}$	$\bar{k}_{12} + k_{32}$	$\bar{k}_{32}$	0	9
$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	$\bar{k}_{12} + k_{23}$	$k_A$	$\bar{k}_{12} + k_{32}$	0	10
$k_{23} + k_{13}$	$k_{12} + k_{13}$	0	$k_{12} + k_{23}$	$k_A$	$k_{12} + k_{32}$	11
0	$k_{23}$	0	$k_{12} + k_{23}$	$k_{12} + k_{23}$	$k_{Ap}$	12
0	0	$k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	0	13
0	0	0	$\bar{k}_{23} + k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	0	14
0	0	0	0	$\bar{k}_{23} + k_{13}$	$k_{12} + \bar{k}_{13}$	15
0	0	0	0	0	$\bar{k}_{23}$	16





13	14	15	16	⊗
$k_{11} + \bar{k}_{11}$	$\bar{k}_{12}$	0	0	13
$\bar{k}_{21}$	$k_{Ad}$	$\bar{k}_{12}$	0	14
0	$\bar{k}_{21}$	$k_{Ad}$	$\bar{k}_{12}$	15
0	0	$\bar{k}_{21}$	$\bar{k}_{22}$	16

$$k_{Ag} = k_{22} + \bar{k}_{33} + k_{33}$$

$$k_{Al} = k_{11} + \bar{k}_{11} + \bar{k}_{33}$$

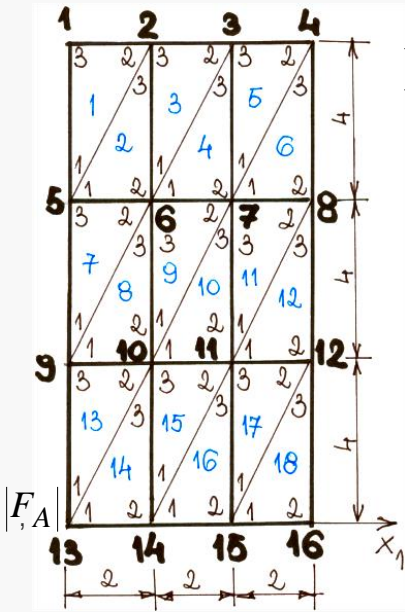
$$k_{Ap} = \bar{k}_{22} + \bar{k}_{33} + k_{22}$$

$$k_{Ad} = k_{11} + \bar{k}_{11} + \bar{k}_{22}$$

$$k_A = \bar{k}_{22} + k_{11} + \bar{k}_{11} + k_{33} + \bar{k}_{33} + k_{22}$$

		Macierz sztywności tarczy															
		1		2		3		4		5		6		7		8	
		$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$
[K]=5*E <sub>t</sub> *	1	$u_1$	6.4	-7	-16	3	0	0	0	0	-3	-4	0	0			
	$u_2$	-5	10	2	-6	0	0	0	0	3	-4	0	0				
2	$u_1$	-16	4	23.9	-7	-16	3	0	0	0	1	-3	-1				
	$u_2$	3	-6	-5	20	2	-6	0	0	-5	0	5	-8				
3	$u_1$	0	0	-16	3	23.9	-7										
	$u_2$	0	0	2	-6	-5	20										
4	$u_1$	0	0	0	0												
	$u_2$	0	0	0	0												
5	$u_1$																
	$u_2$																
6	$u_1$																
	$u_2$																
7	$u_1$																
	$u_2$																





### Modyfikacja macierzy sztywności

Modyfikację dokonamy przez wykreślenie z macierzy sztywności  $[K]$  wierszy i kolumn odpowiadających tym stopniom swobody, a także na usunięciu z wektora równoważników węzłowych wykreśla się elementy odpowiadające usuniętym stopniom z macierzy sztywności. W ten sposób eliminuje się z rozwiązania znane równania- w tym przypadku mamy osiem takich równań.

Siły węzłowe

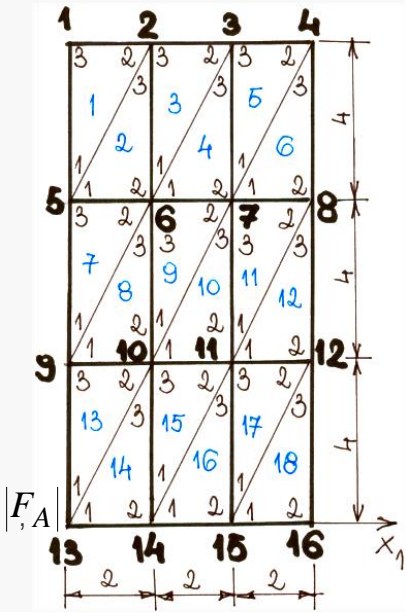
$$|F_A| = \begin{vmatrix} H \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{vmatrix}$$

Przemieszczenia węzłowe

$$[K]u|^{(e)} = |F_A| \quad \text{W wyniku rozwiązania tego liniowego układu 24. równań, otrzymano}$$

## Tarcza – przykład liczbowy

### Rozwiązanie równania kanonicznego



$$\begin{array}{l}
 u_1^1 \\
 u_2^1 \\
 u_1^2 \\
 u_2^2 \\
 u_1^3 \\
 u_2^3 \\
 u_1^4 \\
 u_2^4 \\
 u_1^5 \\
 u_2^5 \\
 u_1^6 \\
 u_2^6 \\
 u_1^7 \\
 u_2^7 \\
 u_1^8 \\
 u_2^8 \\
 u_1^9 \\
 u_2^9 \\
 u_1^{10} \\
 u_2^{10} \\
 u_1^{11} \\
 u_2^{11} \\
 u_1^{12} \\
 u_2^{12}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 1,19 \cdot 10^{-5} \\
 13,71 \cdot 10^{-6} \\
 1,14 \cdot 10^{-5} \\
 1,17 \cdot 10^{-5} \\
 1,11 \cdot 10^{-5} \\
 -1,03 \cdot 10^{-6} \\
 1,11 \cdot 10^{-5} \\
 -3,30 \cdot 10^{-6} \\
 6,28 \cdot 10^{-6} \\
 3,06 \cdot 10^{-6} \\
 6,17 \cdot 10^{-6} \\
 9,65 \cdot 10^{-7} \\
 6,11 \cdot 10^{-6} \\
 -9,30 \cdot 10^{-7} \\
 6,13 \cdot 10^{-6} \\
 -2,94 \cdot 10^{-6} \\
 2,21 \cdot 10^{-6} \\
 1,91 \cdot 10^{-6} \\
 2,05 \cdot 10^{-6} \\
 5,68 \cdot 10^{-7} \\
 2,03 \cdot 10^{-7} \\
 -5,77 \cdot 10^{-7} \\
 2,10 \cdot 10^{-6} \\
 -183 \cdot 10^{-6}
 \end{array}
 H$$

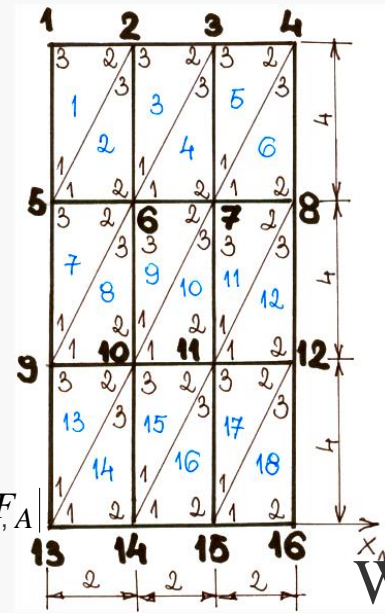
## Tarcza – przykład liczbowy

### Wyznaczenie reakcji

Równania usunięte w trakcie modyfikacji macierzy [K] stanowią podstawę do wyznaczenia reakcji, np.

$$\text{Równanie 25} \quad -3u_1^3 + 6u_2^9 - 10u_2^{10} + 35u_1^{13} - 32u_1^{14} + 4u_2^{14} = \frac{3}{200000} R_1^{13}$$

$$R_1^{13} = -0,85 \cdot 10^{-6} \frac{200000}{3} = -0,057 H$$



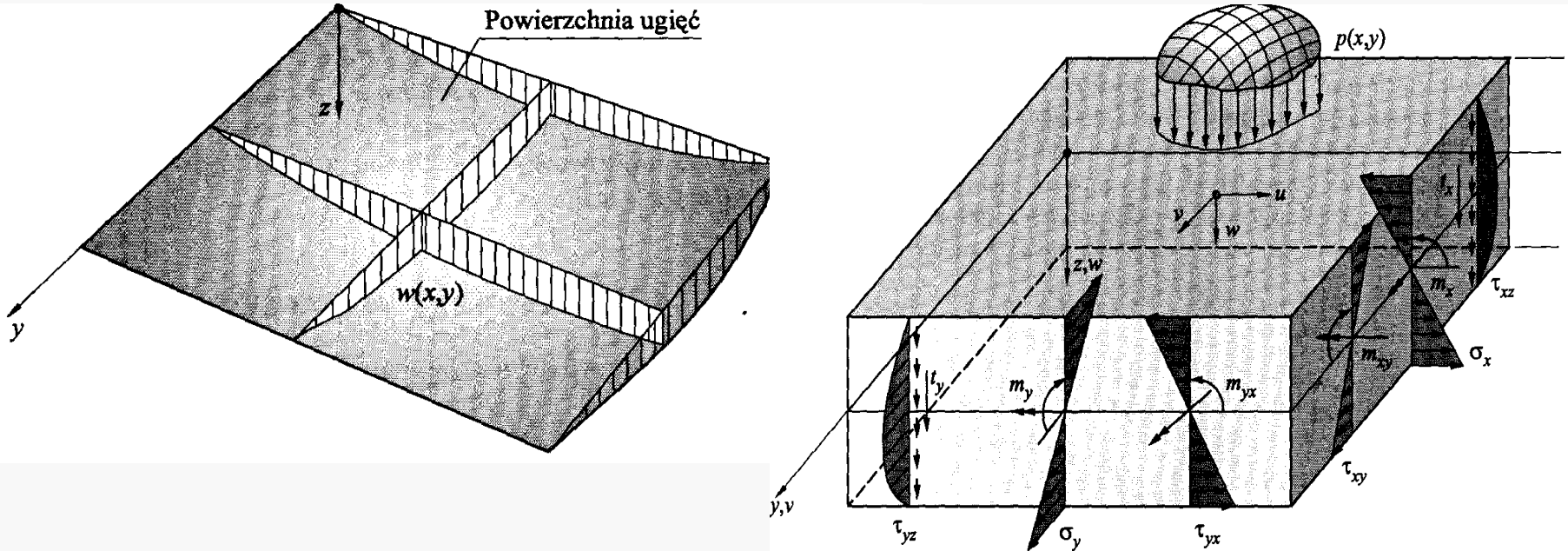
### Wyznaczenie odkształceń

$$|\varepsilon|^{(e)} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b^i & 0 & b^j & 0 & b^k & 0 \\ 0 & c^i & 0 & c^j & 0 & c^k \\ c^i & b^i & c^j & b^j & c^k & b^k \end{bmatrix} |u|^{(e)}$$

Dla elementu (1) mamy:

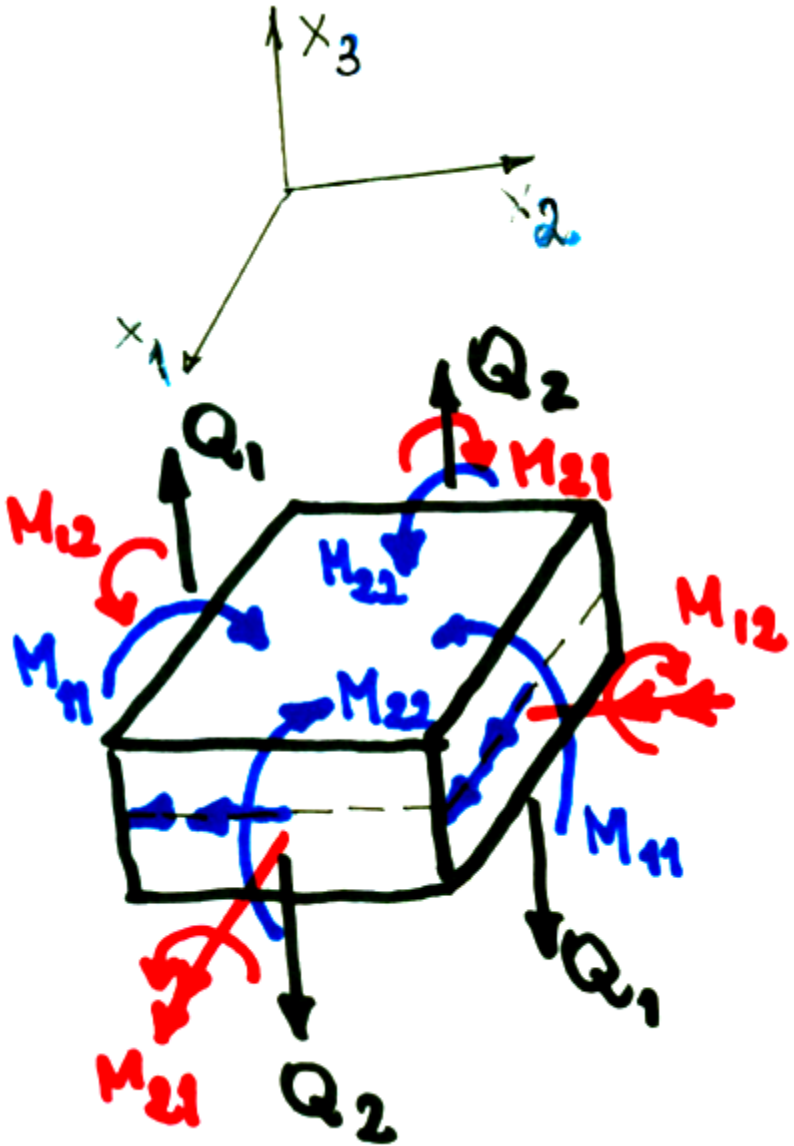
$$|u|^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,282 \\ 3,058 \\ 11,396 \\ 1,170 \\ 11,896 \\ 3,710 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad |\varepsilon|^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,282 \\ 3,058 \\ 11,396 \\ 1,170 \\ 11,896 \\ 3,710 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} H = \begin{bmatrix} -0,25 \\ 0,163 \\ 0,1335 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} H$$

### Zgięciowy płaski stan naprężenia



Płyta jest to układ ograniczony dwoma płaszczyznami o małej krzywiznie. Odległość między powierzchniami ograniczającymi to grubość płyty  $t$ . Obciążenie jest **prostopadłe** do płaszczyzny środkowej powoduje jej zakrzywienie.

Rozpatrywać będziemy płyty cienkie i o stałej grubości (nie wszystkie płyty muszą mieć stałą grubość). Płyty są cienkie jeśli jeden wymiar (grubość) jest znacznie mniejszy od dwóch pozostałych  $t < l/10$ ,  $t < d/5$ , gdzie  $l$  - długość krótszego boku,  $d$  - średnica płyt



Analizę płyt przeprowadzimy przy następujących założeniach

**Z1 Kirchoffa:** „płaszczyzn środkowa nie doznaje żadnych wydłużeń ani odkształceń postaciowych,- punkty płyty położone na normalnej do płaszczyzny środkowej pozostają na niej również po odkształceniu,(odcinek prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej pozostaje prostoliniowy, niewydłużony i prostopadły do powierzchni środkowej)”

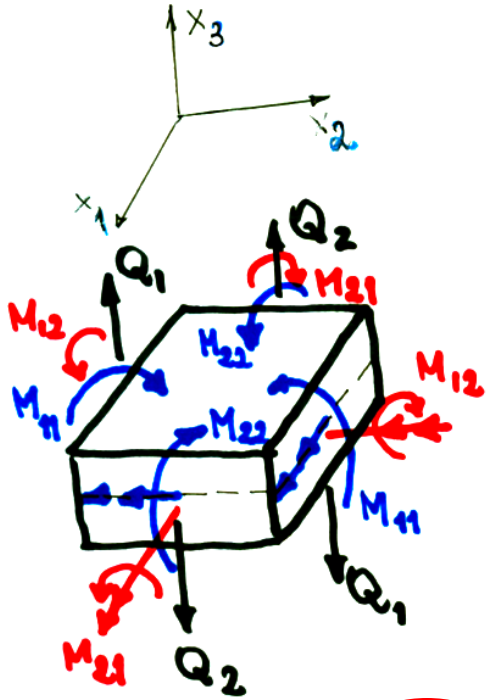
**Z2 o małych przemieszczeniach** ,

**Z3** Jedynym niezależnym przemieszczeniem jest  $w=u_3$ , czyli płyta znajduje się w stanie zgięciowym

**Z4** Naprężenie  $-\sigma_{33} \approx 0$

płyta pracuje w płaskim stanie naprężenia

Siły płytowe, przemieszczenia, odkształcenia

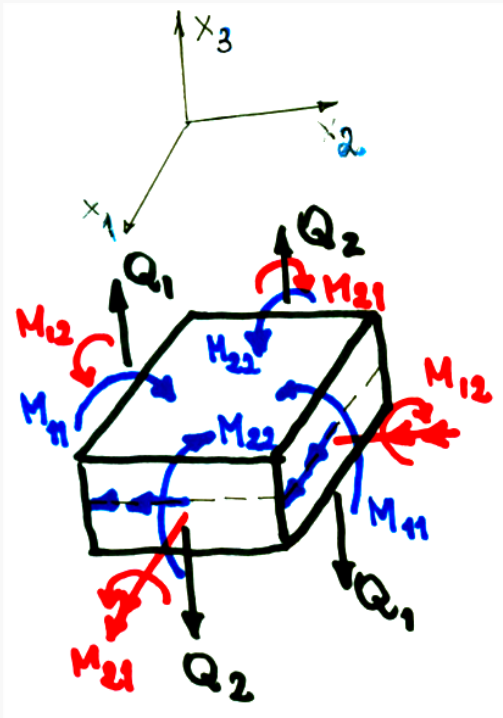


$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} = \begin{matrix} -x_3 \partial_1 w \\ -x_3 \partial_2 w \\ w \end{matrix}$$

$$df \quad \|\varepsilon\| = [D] \|u\| = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} = -x_3 \begin{matrix} \partial_1^2 w \\ \partial_2^2 w \\ 2\partial_1 \partial_2 w \end{matrix}$$



## Przykład płyty



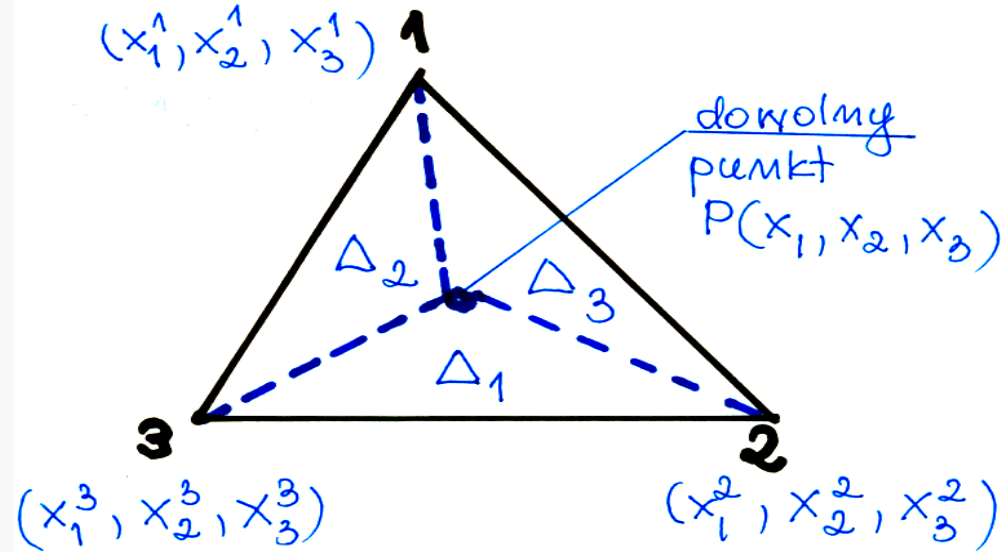
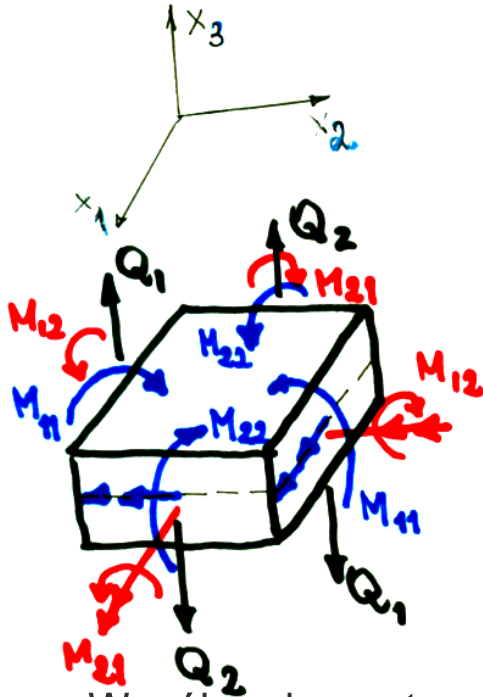
Naprężenia

$$\sigma = [E] \varepsilon$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz Hooke'a dotyczy płaskiego stanu naprężeń i izotropowych płyt.

### Współrzędne powierzchniowe (naturalne)

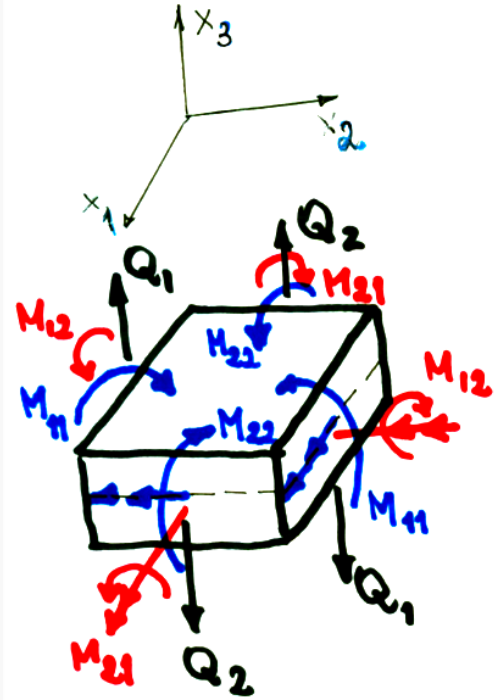


Współrzędne naturalne pozwalają:

- 1 opisać położenie punktu w obszarze elementu za pomocą wielkości bezwymiarowych z przedziału  $\langle 0,1 \rangle$ , przy czym 1 występuje tylko w węzłach elementu.
2. geometria elementu odniesiona jest do wielkości lokalnych związanych z węzłami, niezależnie od ich orientacji położenia w przestrzeni,
3. stosowanie współrzędnych naturalnych pozwala na proste obliczanie całek niezależnie od kształtu elementu.

Dla elementu trójkątnego przyjmujemy na mocy definicji  $L_1 = \frac{df}{\Delta_1}, L_2 = \frac{df}{\Delta_2}, L_3 = \frac{df}{\Delta_3}$





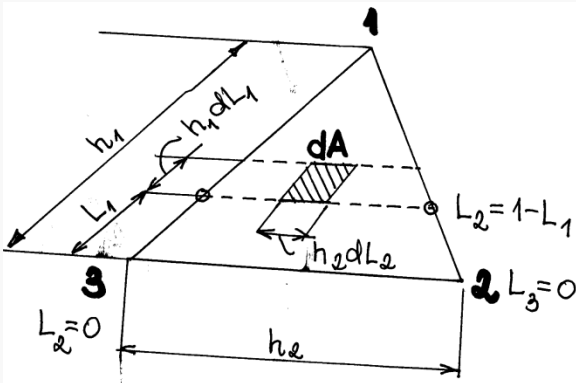
Współrzędne powierzchniowe czynią zadość warunkom:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$$a^i = x_1^{i+1} x_2^{i+2} - x_1^{i+2} x_2^{i+1} \quad b^i = x_2^{i+1} - x_2^{i+2}, \quad c^i = x_1^{i+2} - x_1^{i+1},$$

Operator różniczkowania po współrzędnych naturalnych

$$\begin{vmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \end{vmatrix}$$



Formuła całkowania po polu trójkąta

$$J = \int_{\Delta} L_1^m L_2^n L_3^p dA = 2\Delta \frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!}$$

$$\int_{\Delta} L_1 L_2 L_3 dA = \frac{\Delta}{60} \quad \int_{\Delta} L_1^3 dA = \frac{\Delta}{10}$$