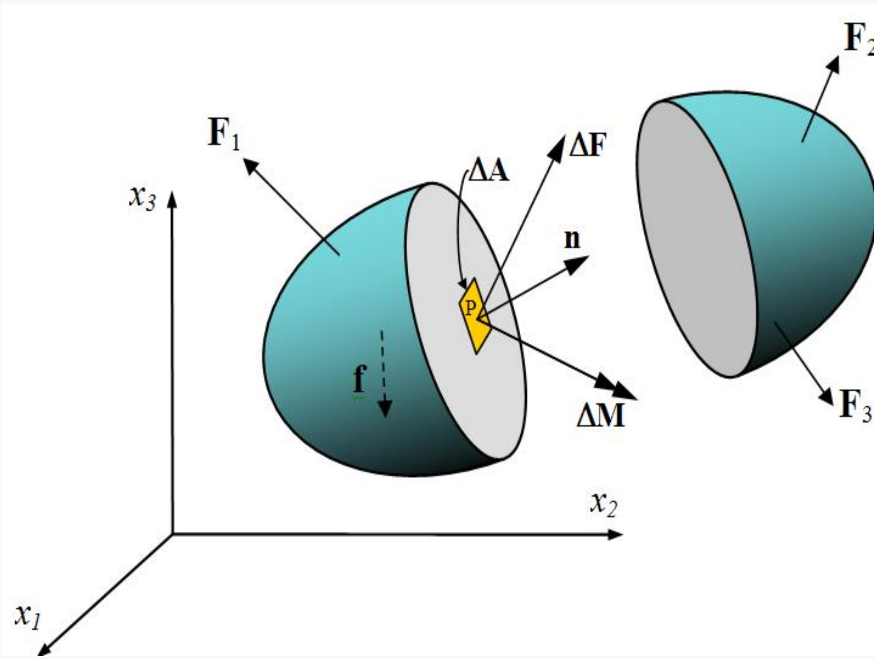
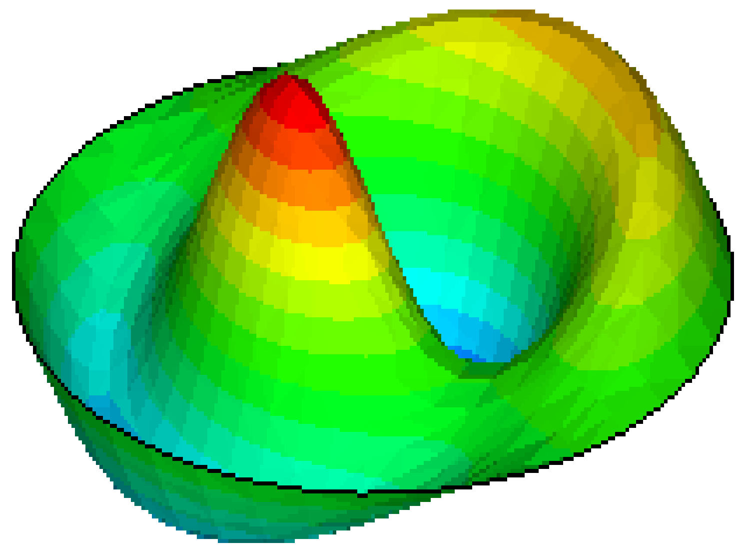
Teoria Sprężystości
i Plastycznosci

Teoria sprężystości i plastyczności

Wykład 4: Zasada prac wirtualnych, Rozwiązanie ZBTS metodą Ritza

Leszek CHODOR dr inż. bud, inż.arch.
leszek@chodor.co





Literatura:
[1] **Timoschenko S. Goodier A.J.N.,** Theory of Elasticity Mc Graw –Hill, 2 nd , Oxford, 1951
[2] **Piechnik S.,** Wytrzymałość materiałów dla Wydziałów budowlanych, , PWN, Warszaw-Kraków, 1980
[3] **Rakowski G.,** Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa, 1979
[4] **Bower A.,** Linear Elasticity,, Lecture Notes, Division of Engineering Brown University Spring 2005,
[5] **Lebedev L.P., Cloud M.J.,** Tensor Analysis with Applications in Mechanics, World Scientific, 2010
[6] **Chodor L.,** publikacje własne - różne.
[7] **Strony www** [dostępne luty, marzec 2011] - różne

W niniejszym wykładzie rozważymy następujące zagadnienia:

Wykład 4 Zasada prac wirtualnych, Rozwiązanie ZBTS metodą Ritza

1. Podstawy metod wariacyjnych

1.1. Zasada prac wirtualnych

1.2. Twierdzenie Lagrange'a

2. Przedstawienie równań ZBTS w postaci macierzowej

2.1. Stan odkształcenia

2.2. Stan naprężenia

2.3. Związki konstytutywne

2.4. Równania prac wirtualnych

3. Rozwiązanie ZBTS metodą Ritza

3.1. Aproksymacja równania Cauchy'ego

3.2. Aproksymacja prawa Hooka

3.3. Aproksymacja równania prac wirtualnych

3.4. Kanoniczne równanie Ritza

które będą wprowadzeniem do kolejnego wykładu:

Wykład 5 Wprowadzenie do MES

4. Wprowadzenie do metody elementów skończonych (MES)

4.1. Fundamentalne założenia MES

4.2. Macierz kształtu elementu

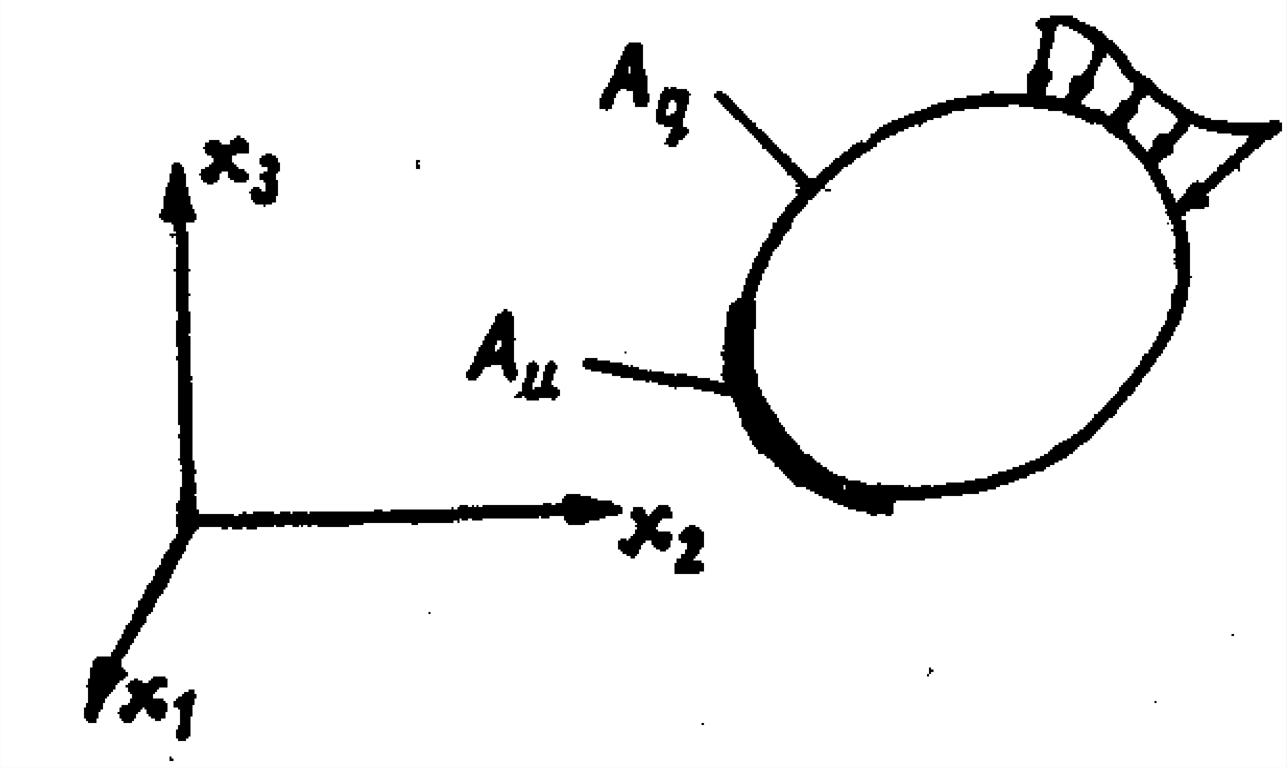
4.3. Równania kanoniczne dla całej konstrukcji

5 Przykłady

5.1. Belka na sprężystym podłożu

5.2. Płyta,

5.3. Tarcza



Rozważania prowadzimy dla bryły o dowolnym kształcie, dowolnie obciążonej (z dowolnymi statycznymi warunkami brzegowymi) na powierzchni ***Aq*** oraz z dowolnymi kinematycznymi warunkami brzegowymi na ***Au***.

Zasada prac wirtualnych, metoda Ritza i metoda elementów skończonych

Leszek Chodor
leszek@chodor.pl

1 Zasada prac wirtualnych i funkcjonał Lagrange'a)

1.1 Zasada prac wirtualnych

Równanie prac wirtualnych wyprowadzimy dla bryły o dowolnym kształcie, dowolnie obciążonej (z dowolnymi statycznymi warunkami brzegowymi) na powierzchni A_q oraz z dowolnymi kinematycznymi warunkami brzegowymi na A_u.

Załóżmy , że znamy rozwiązanie *zagadnienie brzegowego teorii sprężystości* (ZBTS) dla tej bryły, to znaczy znamy aprężenia σ_{ij}, odkształcenia ε_{ij} oraz pole przemieszczeń u_i $(i, j = 1, 2, 3)$.

Teoria Sprężystości
i Plastycznosci

Nadajmy przemieszczeniom u_i małe przyrosty δu_i, takie , aby przemieszczenie po przyroście wynosiło:

$$\bar{u}_i = u_i + \delta u_i$$

i było przemieszczaniem *możliwym*, to znaczy spełniający kinematyczne warunki brzegowe i będącym funkcją ciągłą co najmniej klasy C^3. Spełnienie przez $\bar{u}_i$ kinematycznych warunków brzegowych oznacza, że wariacje δu_i znikają na powierzchniA_u. Przyrosty δu_i jako niewielkie zaburzenia stanu równowagi w rachunku wariacyjnym nazywane są wariacjami, a w mechanice nazywane są *przemieszczeniami wirtualnymi*.

Pracę sił zewnętrznych L na przemieszczeniach wirtualnyh nazywamy pracą wirtualną δL:

$$\delta L = \iint_{A_q+A_u} q_{ni}\delta u_i dA + \iiint_V P_i \delta u_i dV \tag{1}$$

Wykażemy, że wirtualne praca sił zewnętrznych jest równa wirtualnej pracy sił wewnętrznych.δW:

$$\delta W = \iint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \qquad (2)$$

W tym celu wykonamy kilka przekształceń matematycznych wyrażenia (1)

Najpierw zauważmy, że w pierwszej całce (1) możemy pominąć całkowanie po powierzchni A_u, wobec $\delta u_i = 0$ na tej powierzchni i zapisać, że całkujemy po całej powierzchni A. Jeśli następnie gęstość sił zewnętrznych q_{vi} wyrazimy w zależności od sił wewnętrznych na brzegu, zgodnie ze *statycznymi warunkami brzegowymi na* A_q $(q_{vi} = \sigma_{ij}\alpha_{vj})$, to otrzymamy

$$\delta L = \iint_A \sigma_{ij}\alpha_{vj}\delta u_i dA + \iiint_V P_i \delta u_i dV$$

Teoria Sprężystości i Plastycznosci

Po zastosowaniu do pierwszej całki, twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego o zamianie całki powierzchniowej na objętościową , otrzymamy:

$$\delta L = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta u_i)dV + \iiint_V P_i \delta u_i dV = \iiint_V \Big[\Big(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i\Big)\delta u_i + \sigma_{ij}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\Big]dV$$

Ponieważ σ_{ij} z założenia spełniają *równania Naviera*, więc pierwszy składnik w wyrażeniu podcałkowym jest równy zero. Wykorzystując własność sumacji, drugi składnik można zapisać w postaci:

$$\delta L = \iiint_V \sigma_{ij} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\Big)dV$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym na mocy *równań Cauche'go* jest wariacją odkształcenia. Mamy więc:

$$\delta L = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV = \delta W,$$

co kończy dowód zasady prac wirtualnych

$$\delta L = \delta W. \qquad (3)$$

Teoria Sprężystości i Plastycznosci

Zauważmy jeszcze, że równanie prac wirtualnych (3) jest słuszne dla bryły wykonanej z materiału nie tylko liniowo sprężystego, ale również nieliniowego i niesprężystego, ponieważ do jego wyprowadzenia nie używaliśmy *prawa Hooke'a.*

1.2 Twierdzenia Lagrange'a

Twierdzenie Lagrange'a *o minimum energii potencjalnej układu*, można sformułować następująco:

Spośród wszystkich możliwych przemieszczeń, te są rzeczywiste, które realizują minimum funkcjonału energii potencjalnej układu.

Twierdzenie to w języku rachunku wariacyjnego zapisuje się jako wymóg zerowania wariacji δ funkcjonału energii potencjalnej układu Π. , czyli jako warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału (analog kryterium istnienia ekstremum funkcji).

$$\delta\Pi = 0 \qquad (4)$$

W warunku stacjonarności (4) funkcjonał Π jest liczbą przyporządkowaną trójce funkcji przemieszczeń u_i. Przyrost tej liczby nazywany jest wariacją funkcjonału δ i jest analogiem różniczki zmiennej w analizie funkcji (nieskończenie małej zmiany tej zmiennej

Twierdzenie Lagrange'a (4) uzyskaliśmy z (3) po uwzględnieniu, że w polu potencjalnym naprężeń pochodna energii potencjalnej Φ względem odkształcenia jest równa naprężeniom:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}. \tag{5}$$

Formułę (5) przyjmujemy jako definicję energii potencjalnej Φ. W celu zapisania twierdzenia Lagrange'a w postaci (4) wprowadziliśmy oznaczenie (6), które traktujemy jako definicję *funkcjonału Lagrange'a*:

$$\Pi = \iiint_V \Phi(u_i)dV - \iint_{A_q} q_{\nu i} u_i dA - \iiint_V -P_i u_i dV. \tag{6}$$

Z definicji (5) uzyskamy wyrażenie na energię potencjalną (7) bryły wykonanej z materiału liniowo sprężystego, po przedstawieniu odkształceń przez naprężenia zgodnie z prawem Hooke'a i wykonaniu przypisanego całkowania (rozwiązaniu prostego równania różniczkowego):

$$\Phi = \frac{1}{2E}[(1+\nu)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \nu{\sigma_{kk}}^2]. \tag{7}$$

W dalszej części często będziemy stosować oznaczenia techniczne, dla których (7) przyjmuje postać:

$$\Phi = \frac{1}{2E}[{\sigma_x}^2+{\sigma_y}^2+{\sigma_z}^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z)+2(1+\nu)({\tau_{xy}}^2+{\tau_{xz}}^2+{\tau_{yz}}^2)] \tag{8}$$

W przypadku brył niesprężystych duże zastosowanie ma twierdzenie Castigliano o minimum energii dopełniającej $\delta\Pi^* = 0$, które będzie przedmiotem odrębnego opracowania.

2 Przedstawienie równań ZBTS w postaci macierzowej

Przedstawimy macierzową postać podstawowych równań TS w celu wyprowadzenia metody elementów skończonych (MES) w zapisie macierzowym.Przyjmujemy następujące oznaczenia: $[macierz]$ujmujemy w nawiasy kawadratowe , $|wektor|$ (macierz kolumnową lub jednowierszową) ujmujemy w kreski pionowe. Zwracamy uwagę, że na potrzeby niniejszego przedstawienia macierzowego wektory i macierze ZBTS, a także indeksowanie wyrażeń ma inne znaczenie od tego, które stosowano w zapisie tensorowym.

2.1 Stan odkształcenia

Stan odkształcenia bryły odkształcalnej opisują związki geometryczne (Cauchy'ego), które w zapisie macierzowym przyjmą postać:

$$|\varepsilon| = [\partial]|u| \tag{9}$$

gdzie wektor odkształceń $|\varepsilon|$, macierz operatorów różniczkowania $[\partial]$ oraz wektor przemieszczeń $|u|$ można zapisać w postaci:

$$|\varepsilon| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{vmatrix}, \quad [\partial] = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad |u| = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Symbolem ∂_i oznaczono operator różniczkowania po współrzędnej x_i: $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$

2.2 Stan naprężenia

$$[\partial]^T |\sigma| + |P| = |0| \qquad (11)$$

gdzie T jest operatorem transpozycji macierzy (w tym przypadku macierzy operatorów różniczkowania (10)), a wektor naprężeń $|\sigma|$ i wektor sił masowych $|P|$ można zapisać w postaci:

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{vmatrix}, |P| = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Statyczne warunki brzegowe na części A_q powierzchni ciała A można zapisać w postaci:

$$[S]|\sigma| - |q_v| = |0|, \tag{13}$$

gdzie macierz kosinusów kierunkowych [S] zapiszmy w postaci:

$$[S] = \begin{bmatrix} \alpha_{v1} & 0 & 0 & \alpha_{v2} & 0 & \alpha_{v3} \\ 0 & \alpha_{v2} & 0 & \alpha_{v1} & \alpha_{v3} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{v3} & 0 & \alpha_{v2} & \alpha_{v1} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

a wektor obciążenia $|q_v|$ oraz wektor normalny do powierzchni ciała $|\alpha_v|$ w postaci:

$$|q_v| = \begin{vmatrix} q_{v1} \\ q_{v2} \\ q_{v3} \end{vmatrix}, |\alpha_v| = \begin{vmatrix} \alpha_{v1} \\ \alpha_{v2} \\ \alpha_{v3} \end{vmatrix} \tag{15}$$

2.3 Związki konstytutywne

Równania fizyczne (konstytutywne)dla ciała liniowo-sprężystego opisują równania Hooke'a, które w zapisie macierzowym przyjmą postać:

$$|\sigma| = [E]|\varepsilon| \qquad (16)$$

Macierz stałych materiałowych $[E]$ można zapisać w postaci

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

gdzie współczynniki materiałowe Lamego można przeliczyć z modułu Younga E oraz współczynnika Poissone'a ν:

$\lambda = \nu E/(1+\nu)(1\text{-}2\nu)$,

$\mu = G = E/2(1+\nu)$.

Zwracamy uwagę, że tylko dwie z tych stałych materiałowych są niezależne, a najczęściej stosowane są pary (E,ν) lub (λ,μ).
W szczególnych przypadkach płaskich stanów), mamy:
dla płaskiego stanu odkształcenia

$$[E] = E/(1-\nu^2)\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

dla płaskiego stanu naprężenia

$$[E] = E/(1+\nu)(1-2\nu)\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

2.4 Równanie prac wirtualnych

Równanie prac wirtualnych w zapisie macierzowym, otrzymamy po podstawienia do (3) macierzowych równań ZBTS: (9),(11), (16). W rezultacie uzyskamy(20):

$$\int_V |\sigma|^T \delta|\varepsilon| dV = \int_V |P|^T \delta|u| dV + \int_A |q_v|^T \delta|u| dA, \tag{20}$$

lub po macierzowym przetransponowaniu powyższego równania, postać:

$$\int_V \delta|\varepsilon|^T|\sigma|dV = \int_V \delta|u|^T|P|dV + \int_A \delta|u|^T|q_v|dA, \qquad (21)$$

3 Rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości metodą Ritza

Załóżmy, że wektor przemieszczenia dowolnego punktu wewnątrz ciała można wyrazić przez liniową kombinację funkcji dopuszczalnych $\varphi_i(|x|)$ (funkcji Ritza):

$$u(|x|) = \varphi_0(|x|) + \Sigma_{(i)} a_i \cdot \varphi_i(|x|), \qquad (22)$$

gdzie a_i są stałymi Ritza, których bedziemy poszukiwać. Współczynniki a_i są stałymi w rozumieniu rozpatrywanej przestrzeni fizycznej $|x_i|$, ale są na razie nieznanymi zmiennymi aproksymacji Rizta. Często mówimy w takim przypadku, że "stałe" są "uzmiennione". W rozumieniu aproksymacji stałymi są natomiast pozostałe wielkości, w tym "funkcje" przemieszczeń, naprężeń i odkształceń. (22) można zapisać w postaci macierzowej

$$\lfloor u\rfloor = [N]\lfloor a\rfloor, \tag{23}$$

gdzie macierz [N] jest macierzą kształtu.

Funkcje dopuszczalne są z góry przyjętymi dowolnymi funkcjami, ale spełniającymi warunki brzegowe.
Uwaga:
1) jeśli funkcja aproksymująca nie spełnia warunków brzegowych, to nie jest dopuszczalna i nie może byc zastosowana.
2) dokładność aproksymacji dla konkretnego zagadnienia zależy od typu funkcji Ritza. Najlepszym typem funkcji aproksymujących są ścisłe funkcje kształtu, to znaczy wynikające ze ścisłego rozwiązania zagadnienia. Dla każdego typu funkcji dopuszczalnych uzyskujemy jednak możliwe rozwiązanie przybliżone, a jego dokładność można zwiększać poprzez zwiększanie liczby funkcji dopuszczalnych w liniowej kombinacji (22).

3.1 Aproksymacja równania Cauchy'ego

Po podstawieniu do (9) funkcji aproksymacyjnej (23) równania geometryczne przyjmą postać:

$$\lfloor \varepsilon\rfloor = [\partial][N]\lfloor a\rfloor = [B]\lfloor a\rfloor, \tag{24}$$

gdzie wprowadzono macierz zgodności geometrycznej [B]

$$[B] = [\partial][N] \tag{25}$$

3.2 Aproksymacja prawa Hooke'a

Po podstawieniu do (16) funkcji aproksymacyjnej (23) związki fizyczne przyjmą postać:

$$|\sigma| = [E][B]|a| \tag{26}$$

3.3 Aproksymacja równania prac wirtualnych

Równanie prac wirtualnych (21) po wprowadzeniu aproksymacji (23) przyjmie postać:

$$\int_V \delta([B]|a|)^T [E][B]|a|dV = \int_V \delta([N]|a|)^T |P|dV + \int_A \delta([N]|a|)^T |q_v|dA \tag{27}$$

Ponieważ zmiennymi funkcji aproksymacyjnej są współczynniki $|a|$, natomiast [B] i [N] nie zależą od $|a|$, więc $\delta|a|^T$ można wyłączyć przed znak całek i w rezulatacie (27) możemy zapisać w postaci:

$$\delta|a|^T \cdot \int_V [B]^T [E][B]|a|dV = \delta|a|^T \cdot \int_V [N]^T |P|dV + \delta|a|^T \cdot \int_A [N]^T |q_v|dA \tag{28}$$

3.4 Kanoniczne równanie Ritza

W celu wyznaczenia stałych $|a|$ funkcji aproksymujących pole przemieszczeń skorzystamy z warunku stacjonarności podług tych stałych, czyli zerowania się pochodnych. W tym celu obie strony (29) różniczkujemy po $\delta|a|^T$.
, a warunek stacjonarności $\delta L - \delta W$ możemy zapisać w postaci:

$$\int_V [B]^T [E][B]|a|dV = \int_V [N]^T |P|dV + \int_A [N]^T |q_v|dA \qquad (29)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń pomocniczych:

$$[k] \int_V [B]^T [E][B]|a|dV, \qquad (30)$$

$$|F_V| = \int_V [N]^T |P|dV, \qquad (31)$$

$$|F_A| = \int_A [N]^T |q_v|dA, \qquad (32)$$

gdzie: $[k]$- macierz sztywnosci, F_V - wektor sił masowych, $|F_A|$-wektor obciążeń.
Kanoniczne równanie metody Ritza można zapisać w zwartej formie:

$$[k]|a| = |F_V| + |F_A|. \qquad (33)$$