

55 KONFERENCJA NAUKOWA

Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN
i Komitetu Nauki PZITB

KIELCE - KRYNICA, 20 - 25 września 2009 r.

Leszek CHODOR
Rafał PODSTAWKA

ANALIZA PUSHOVER ORAZ PRZEGUBY I ZAŁOMY NIELINIOWE W KONSTRUKCJACH ŻELBETOWYCH

1. WPROWADZENIE

W praktyce projektowania konstrukcji żelbetowych ważne są inżynierskie metody analizy nieliniowych konstrukcji żelbetowych, w których odchodzi się od statycznej analizy sprężystej (liniowej), ale też nie wchodzi w metody teoretycznie ściśle, implementowane w programach naukowych, np. w programie ABAQUS (Abaqus Inc (2004) [1]). Taką inżynierską metodą, uwzględniającą w sposób makroskopowy (integralny) efekty nieliniowe konstrukcji żelbetowych jest analiza zniszczenia konstrukcji, ostatnio znana częściej pod nazwą analizy pushover. Metoda ta jest podstawową metodą badania konstrukcji pracujących w rejonach sejsmicznych Federal Emergency Management Agency (2000) [2], Martino i in. (2000) [3]. W warunkach sejsmicznych nie można pominąć nieliniowego charakteru nie tylko obciążeń, ale również konstrukcji przejawiającej złożone, silnie nieliniowe zachowania ze względu na nieliniowość kompozytowego materiału jak i systemu konstrukcyjnego, sprzężonego z programem obciążeń.

Metoda pushover została zaproponowana przez Vidic i in. (1994) [4] oraz Tso i Moghadama (1998) [5]. Podejście pushover jest rozwijane przez wielu badaczy, szczególnie w Ameryce (USA, Kanada) oraz Japonii i doczekało się wielu implementacji komputerowych. Również polsko-francuski program ROBOT (RoboBAT (2006) [6]), zakupiony obecnie przez Autodesk, zawiera procedurę analizy pushover, a w tym skrypt do definicji przegubu nieliniowego.

W niniejszej pracy pokażemy, że metoda pushover może być stosowana z powodzeniem w prostszych warunkach, usuwając niespójność tradycyjnych metod analizy konstrukcji żelbetowych, w których siły przekrojowe wyznacza się w procedurach idealnie liniowych, zaś wymiarowanie zbrojenia przeprowadza się w nieliniowym stanie granicznym przekroju. Taka „ułamna” (formalnie niepoprawna procedura), mogła być akceptowana w okresie, w którym powszechnie nie dysponowano programami z opcją obliczeń nieliniowych. Obecnie w praktyce inżynierskiej za podstawową metodę wymiarowania żelbetu należy uważać nieliniową, iteracyjną technikę obliczeń statycznych, sprzężoną z wymiarowaniem zbrojonych przekrojów w stanie granicznym. Uproszczenia stosowane w metodzie pushover

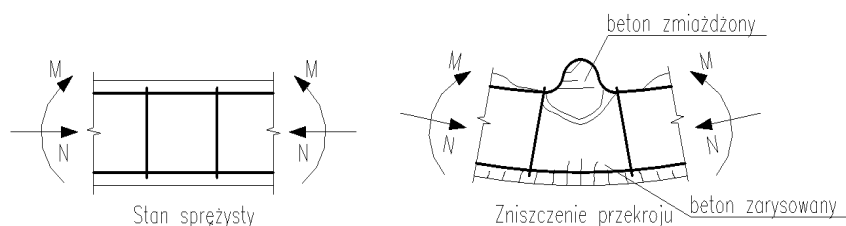
zmierzają w kierunku integralnego ujęcia zjawisk nieliniowych konstrukcji z fundamentalnym założeniem stosowania nieliniowych, iteracyjnych metod rozwiązywania i optymalizacji konstrukcji. Dzięki zamodelowaniu przegubu nieliniowego z uwzględnieniem kompletności zjawisk fizycznych bez wchodzenia w ich szczegółową fizykalność, metoda jest uniwersalna, a jednocześnie intuicyjna i nie wymaga zaawansowanych podstaw teoretycznych, dzięki czemu może być szybko przyswojona przez praktyków inżynierów. W ujęciu sejsmicznym jednym z podstawowych problemów jest wyznaczanie zastępczych statycznych sił działających na konstrukcję w ramach monotonicznie rosnącego programu obciążeń będących siłami zastępczymi w stosunku do sił bezwładności od trzęsienia gruntu. Tym zagadnieniem nie będziemy się zajmować, natomiast rozważymy problem integralnego definiowania przegubów nieliniowych w elementach prętowych oraz linii przegubów (linii załomów w płytach i elementach powłokowych), a także praktycznego ujęcia miejsc krytycznych (przegubów) w algorytmach komputerowych, poprzez utożsamienie tych miejsc z punktami całkowania procedur numerycznych, a także uwzględnienia istotnych w konstrukcjach żelbetowych odkształceń i zarysowań poprzecznych.

Na przykładzie potwierdzimy, że przy stosowaniu metod analizy fizycznie nieliniowej można dopuścić lokalne „niedowymiarowania” przekrojów pod warunkiem, że inne miejsca konstrukcji są w stanie przejść „zwolnione” siły. Nie można więc twierdzić, że tylko rozkład zbrojenia zgodny ze sprężystym polem sił jest słuszny, a każdy inny jest niedopuszczalny. Spostrzeżenie to wynikające z klasycznego twierdzenia teorii nośności granicznej o polach statycznie dopuszczalnych [7] należy zmodyfikować poprzez kontrolę dopuszczalnych zarysowań oraz ugięć konstrukcji żelbetowych.

2. MODEL KONSTRUKCJI Z KRYTYCZNYMI PRZEGUBAMI NIELINIOWYMI

2.1. Mechanizm zniszczenia przegubu (lub załomu) krytycznego w konstrukcjach żelbetowych

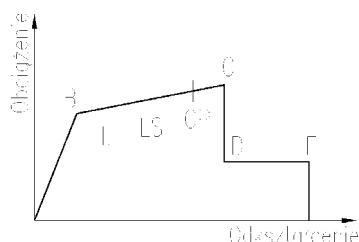
Opis przegubów krytycznych (nieliniowych, plastycznych) jest jednym z ważniejszych zagadnień analizy pushover. Na rysunku 1 pokazano proces powstawania przegubu krytycznego w warunkach mimośrodowego ściskania prętów żelbetowych, który był obszernie badany przez Bayrak i Sheikh (2000) [8].



Rys. 1. Przegub krytyczny wywołany mimośrodowym ściskaniem wg Bayrak O., Sheikh S.A. (2000) [8]

Podczas zwiększającego się poziomu obciążeń, punkty lub linie krytyczne konstrukcji ulegają stopniowemu niszczeniu. W rezultacie konstrukcja zmienia swoją sztywność. Zgodnie z propozycją ATC-40 (1996) [9], w statycznej, nieliniowej analizie pushover, ścieżkę równowagi (przemieszczenie – mnożnik sił zewnętrznych) opisuje się typową relacją, pokazaną na rysunku 2. Pięć punktów nazwanych A,B,C,D i E związane jest z pojawianiem się kolejnych przegubów krytycznych, a trzy punkty nazwane IO, LS i CP opisują

akceptowalne kryteria dla konstrukcji kolejno: IO (Immediate Occupance) – doraźne użytkowanie, LS (Live Safety) – bezpieczeństwo eksploatacji i CP (Collapse Prevention) – mechanizm zniszczenia.



Rys. 2. Typowa relacja obciążenie – odkształcenie w analizie pushover

2.2. Model przegubu nieliniowego stosowany w analizie pushover

Tworzenie się przegubów krytycznych jest stopniowe. Zależność między zastępczą siłą przekrojową, a przemieszczeniem zastępczym w przestrzeni interakcji może być inna dla każdego punktu krytycznego. Zalecamy, aby te związki konstytutywne wyznaczały metodami numerycznymi niższego poziomu i weryfikować na drodze doświadczalnej.

Związek konstytutywny między siłą uogólnioną P , a przemieszczeniem uogólnionym u , zapiszmy za pomocą formuły

$$f(P, u) = 0 \quad (1)$$

gdzie f jest w ogólności nieliniową funkcją uwikłaną, opisaną powierzchnią regresji wyznaczoną na drodze badań numerycznych lub doświadczalnych, opisywaną często funkcją dwu- lub wieloliniową lub w celu uniknięcia osobliwości funkcją sklejaną trzeciego stopnia. W przypadku większej liczby składowych sił przekrojowych (np. N – siła osiowa, M – moment zginający) zwykle wyznacza się siłę zastępczą np. spełniającą równanie interakcji.

2.3. Model MES uwzględniający ścinanie i nieliniowość materiałową

Ponieważ w analizie pushover konstrukcji żelbetowych duże znaczenie odgrywają obciążenia i przemieszczenia poprzeczne, więc w modelu elementu należy uwzględnić odkształcenia styczne. Dlatego stosuje się element Timoshenki, w którym przekrój płaski przed odkształceniem pozostaje płaski, lecz nie pozostaje prostopadły do osi pręta [12].

Odształcenia w dowolnym punkcie $P(y, z)$ przekroju poprzecznego elementu Timoshenki, poddanego mimośrodowemu ścisnaniu możemy zapisać wzorem:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_C(x) - yk_z(x) + zk_y(x), \quad \gamma_{xy}(x, y, z) = \gamma_y(x), \quad \gamma_{xz}(x, y, z) = \gamma_z(x) \quad (2)$$

Uogólnione odkształcenia w punkcie odniesienia przekroju poprzecznego $C(0, 0)$ (środek ciężkości przekroju przed zarysowaniem) wynoszą (podano tylko funkcje od x):

$$\varepsilon_C = u_{a,x}, \quad k_z = \theta_{z,x}, \quad k_y = \theta_{y,x}, \quad \gamma_y = -\theta_z + w_{y,x}, \quad \gamma_z = \theta_y + v_{y,x} \quad (3)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\partial f / \partial x = f_x$. Uogólnione odkształcenia (3) zależą od przemieszczeń dowolnego punktu. W niniejszej pracy wykorzystamy 3-węzłowy element izoparametryczny [12].

$$\mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_z \\ \theta_y \end{bmatrix} \mathbf{d} = \mathbf{q} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{z1} \ \theta_{y1} | u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{z2} \ \theta_{y2} | u_3 \ v_3 \ w_3 \ \theta_{z3} \ \theta_{y3}]^T \quad (4)$$

Funkcje kształtu dla poszczególnych przemieszczeń uogólnionych mają postać:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{N}_u] \\ [\mathbf{N}_v] \\ [\mathbf{N}_w] \\ [\mathbf{N}_{\theta_z}] \\ [\mathbf{N}_{\theta_y}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_3 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie:

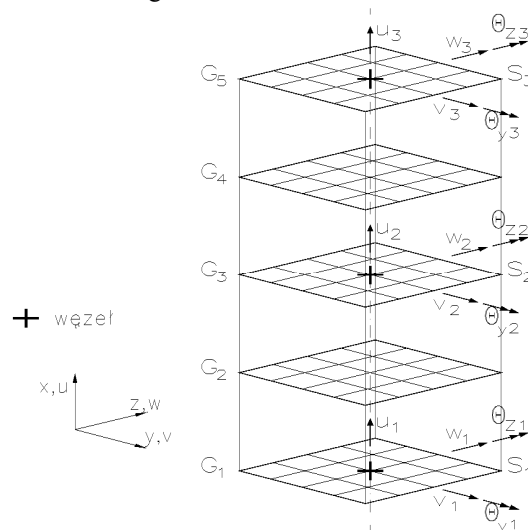
$$N_1(\xi) = (1/2)\xi(1-\xi), \quad N_2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi), \quad N_3(\xi) = (1/2)\xi(1+\xi) \quad (6)$$

$$N_4(\xi) = \frac{L}{24}[-3(1-\xi^2) + 2\xi(1-\xi^2)], \quad (7)$$

$$N_5(\xi) = \frac{L}{24}[-4\xi(1-\xi^2)], \quad N_6(\xi) = \frac{L}{24}[3(1-\xi^2) + 2\xi(1-\xi^2)]$$

gdzie $\xi = 2x/L$.

Zastosujemy całkowanie numeryczne za pomocą schematu 5-cio węzłowego całkowania Gaussa-Lobatto (Chrisfield (1986) [11]). Takie rozmieszczenie punktów całkowania numerycznego (na końcach i w środku elementu – rys. 3) odpowiada sprawczym miejscom zachowania fizycznie nieliniowego.



Rys. 3. Trójwęzłowy element pręta z przekrojami wielopunktowymi (elementami FE) z 5 punktami całkowania

Prawo konstytutywne opisujące zależność pomiędzy odkształceniem E a naprężeniem S obliczone na podstawie wektorów przemieszczeń węzłowych q można napisać w postaci [12]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\xi, y, z) \\ \gamma_y(\xi) \\ \gamma_z(\xi) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(\xi, y, z) \\ \tau_y(\xi) \\ \tau_z(\xi) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}(y, z) \cdot \mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{b}(y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -y & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{w,\xi} \\ \mathbf{N}_{v,\xi} \\ \mathbf{N}_{\theta,\xi} \\ -\mathbf{N}_{\theta} + \mathbf{N}_{v,\xi} \\ \mathbf{N}_{\theta} + \mathbf{N}_{w,\xi} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q} \quad (9)$$

W tym przypadku, macierz Jakobiego przekształcenia ze współrzędnych naturalnych ξ do współrzędnych kartezjańskich x jest liczbą, Rakowski (2006) [12]:

$$\mathbf{J} = x_{,\xi} = L/2, \mathbf{J}^{-1} = 2/L, |\mathbf{J}| = L/2. \quad (10)$$

W celu ograniczenia liczby stopni swobody i zachowania zalet metody pushover, coraz więcej autorów (Martinelli (2008) [10]), stosuje dyskretyzację wielopunktową, w której przekrój poprzeczny jest analizowany jako zbiór włókien, z których każde podlega prawu konstytutywnemu rozciągania/ściskania osiowego i w ogólności ma inny materiał i inne położenie w przekroju.

Zastosowanie analogii kratownicy Mörscha (1907) pozwala na uwzględnienie w sposób przystępny (Martinelli (2008) [10]) dla zastosowań numerycznych zmniejszenia sztywności przekroju wywołanych rysami poprzecznymi. Kratownica Mörscha powstaje przez przyjęcie, że jej słupkiem zastępczym jest beton pomiędzy dwoma rysami ukośnymi, a dwoma krzyżulcami jest beton przyległy i równoległy do jednej z tych rys oraz prostopadły do drugiej rysy.

Macierz sztywności zarysowanego przekroju \mathbf{K}_s wyprowadzimy z ogólnej zależności (Rakowski (2006) [12]):

$$\mathbf{K}_s = \int_A \mathbf{B}^T(y, z) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b}(y, z) dA \quad (11)$$

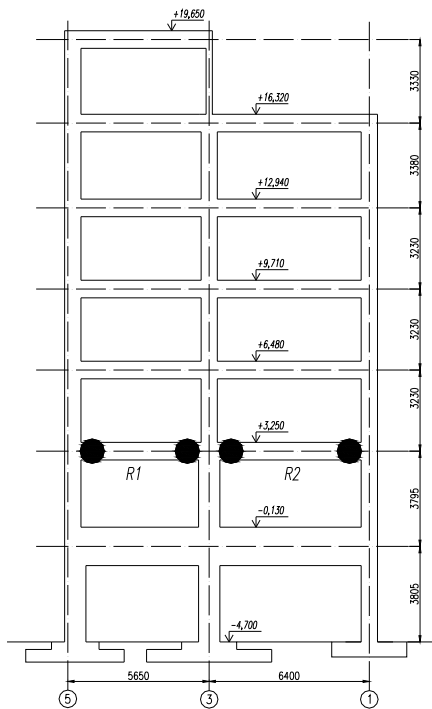
Po podstawieniu do (11) wcześniejszych wyrażeń, skorzystaniu z analogii Mörscha i wykonaniu przypisanych całkowań, otrzymujemy wyrażenia na składowe macierzy sztywności:

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{s,i} + k_{c,j} + k_{cc,k} \alpha_x^4; & k_{12} &= k_{cc,k} \alpha_x^3 \alpha_y; & k_{13} &= k_{cc,k} \alpha_x^3 \alpha_z; \\ k_{14} &= -(k_{s,i} y_i + k_{c,j} y_j + k_{cc,k} y_k \alpha_x^4); & k_{15} &= k_{s,i} z_i + k_{c,j} z_j + k_{cc,k} z_k \alpha_x^4; \\ k_{22} &= G A_{cc} + G_M A_{cM} + k_{cc,k} \alpha_x^2 \alpha_y^2; & k_{23} &= k_{cc,k} \alpha_x^2 \alpha_y \alpha_z; \\ k_{24} &= -(k_{cc,k} y_k \alpha_x^3 \alpha_y); & k_{25} &= k_{cc,k} z_k \alpha_x^3 \alpha_y; \\ k_{33} &= G A_{cc} + G_M A_{cM} + k_{cc,k} \alpha_x^2 \alpha_z^2; & k_{34} &= -(k_{cc,k} y_k \alpha_x^3 \alpha_z); & k_{35} &= k_{cc,k} z_k \alpha_x^3 \alpha_z; \\ k_{44} &= k_{s,i} y_i^2 + k_{c,j} y_j^2 + k_{cc,k} y_k^2 \alpha_x^4; & k_{45} &= k_{s,i} y_i z_i + k_{c,j} y_j z_j + k_{cc,k} y_k z_k \alpha_x^4; \\ k_{55} &= k_{s,i} z_i^2 + k_{c,j} z_j^2 + k_{cc,k} z_k^2 \alpha_x^4; \end{aligned} \quad (12)$$

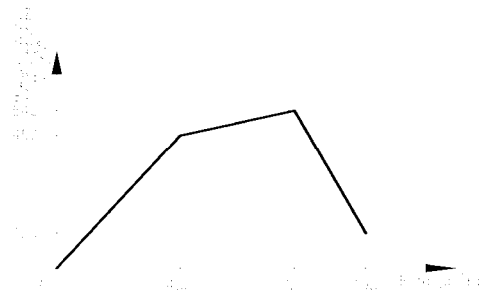
gdzie: α_i – kosinus kierunkowy pręta, we współrzędnych elementu $i = x, y, z$; GA_{cc} – sztywność poprzeczna odpowiadająca ścisaniu betonu, $G_M A_{cM} = G_M (A_c - A_{cc})$ odpowiada działaniu kratownicy zastępczej; $k_{s,i} = E_{s,i} A_{s,i}$ – sztywność i -tego pręta stalowego; $k_{c,j} = E_{c,j} A_{c,j}$ – sztywność j -tego rozciąganego włókna betonowego FE, $k_{cc,k} = E_{cc,k} A_{cc,k}$ – sztywność k -tego ściskanego włókna betonowego, gdzie dla włókna stali, betonu rozciąganego i betonu ściskanego oznaczono odpowiednio indeksami i, j, k .

3. PRZYKŁAD

Przedstawiony w pracy algorytm zaimplementowano w procedurze programu SCILAB (MATLAB) i zastosowano do analizy ramy pokazanej na rysunku 4, wykonanej z betonu C30/37 i zbrojonej wkładkami ze stali B500. Rozwiązanie przykładowego (wspornik żelbetowy obciążony siłą skupioną na końcu) w programie ABAQUS pozwoliło oszacować charakterystykę przegubów plastycznych w postaci trójliniowej, pokazanej na rysunku 5.



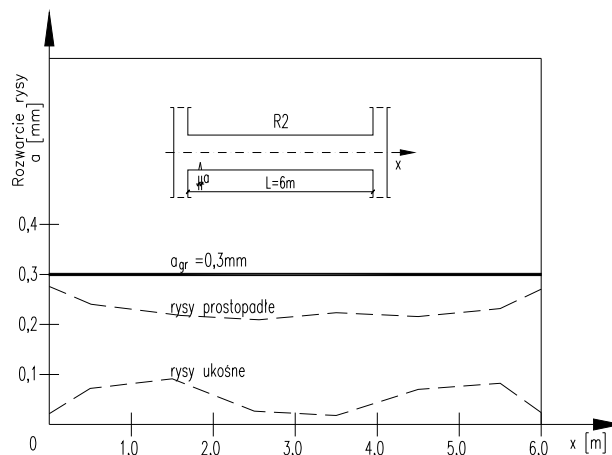
Rys. 4. Rama z przykładu 3



Rys. 5. Charakterystyka przekroju krytycznego ramy

Zakres analizy ramy ustalono w obszarze od obciążenia ciężarem własnym do obliczeniowego obciążenia normowego równomiernie rozłożonego na każdym ryglu i wynoszącego $q_{max} = 66$ kN/m, a ujmującego ciężar posadzek, ścian działowych i obciążenie użytkowe pomieszczeń mieszkalnych. Przeprowadzono iteracyjną analizę, gdzie w pośrednim kroku stwierdzono wyczerpanie nośności normowej przekrojów krytycznych oznaczonych za-

czernionymi kółkami na rysunku 4. Na rysunku 6 pokazano stan końcowy rygla R2 ramy, ocenianego jego zarysowaniem. Zarysowania przekrojów krytycznych rygla R2 są mniejsze od granicznego, dopuszczonego normą $a_{gr} = 0,3$ mm przy jednoczesnym przekroczeniu nośności normowej przekrojów podporowych. Z analizy zachowania przykładowej konstrukcji żelbetowej, wynika, że jej nośność jest limitowana rozwartością rys, a nie przekroczeniem normowej nośności granicznej przekroju.



Rys. 6. Stan zarysowania rygla R2 pod pełnym obciążeniem

4. WNIOSKI

Do projektowania i szacowania nośności konstrukcji żelbetowych przydatna jest statyczna odmiana metody pushover, stosowana wraz z definicją nieliniowych, integralnych przegubów (w prętach) lub załomów nieliniowych (w płytach i powłokach). Charakterystyka przegubu może być wyznaczona w pomocniczym zadaniu na drodze eksperymentalnej lub symulacji numerycznej. W nieliniowej przyrostowej metodzie obliczeń statycznych z jednoczesnym wymiarowaniem (zbrojeniem) przekrojów należy kontrolować zarysowania oraz ugięcia konstrukcji w stanie zarysowanym na każdym kroku przyrostu obciążenia. W algorytmach numerycznych można stosować dyskretyzację wielopunktową przekrojów oraz analogię kratownicy Mörscha dla elementu Timoshenki, na przykład w sposób pokazany w pracy. Zastosowanie analizy nieliniowej zarówno do wyznaczania sił przekrojowych jak i do wymiarowania przekrojów pozwala zlikwidować niespójności powszechnie stosowanych w praktyce inżynierskiej metod projektowania konstrukcji żelbetowych, w których siły przekrojowe wyznacza się w ustroju liniowo-sprężystym, a zbrojenie dobiera w stanie granicznym przekroju.

Literatura

- [1] Abaqus Inc (2004), ABAQUS, version 6.5, Documentation
- [2] Federal Emergency Management Agency, Document FEMA-356. Pre-standard and Commentary for Seismic Rehabilitation of Buildings, Washington DC, 2000
- [3] Martino R., Spacone E., Kingsley G.: *Nonlinear Pushover Analyses of RC Frames*, ASCE Structures Congress, Philadelphia, PA, May 2000

- [4] Vidic T., Fajfar P., Fishinger M.: *Consistent inelastic design spectra: Strength and displacement*, Earthquake Engng. and Struct. Dyn., **23**(4), 1994, pp. 507-521
- [5] Tso W.K., Moghadam A.S.: *Pushover procedure for seismic analysis of building*, Progress in Structural Engineering and Materials, **1**(3), 1998, pp. 337-334
- [6] RoboBat: ROBOT Millenium wersja 20.1- Podręcznik użytkownika, Kraków-Paryż 2006
- [7] Neal B.G.: *The plastic methods of structural analysis*, Chapman&Hall Ltd, NY 1956
- [8] Bayrak O., Sheikh S.A.: *Response prediction by plastic analysis technique*, Proceedings of Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2000
- [9] ATC: Evaluation and Retrofit of Concrete Building, Applied Technology Council, Report ATC-40, 1996
- [10] Martinelli L.: *Modeling shear-flexure interaction in reinforced concrete elements subjected cyclic lateral loading*, ACI Structural Journal, V, 105, No November-December 2008
- [11] Chrisfield M.A.: *Finite elements and solutions procedures in structural analysis*, Linear Analysis, V.2, Pineridge Press, Swaansea 1986, p. 272
- [12] Rakowski G.: *Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006

PUSHOVER ANALYSIS AND NONLINEAR JOINTS IN REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

This study presents that static version of pushover analysis, used together with definition of nonlinear, integral articulated joints, is useful in calculation and estimation of bearing capacity of reinforced concrete structures. In nonlinear incremental method of static calculations with dimensioning (reinforcement) of sections scratching and deflection of structure in scratching state must be controlled, in each moment of increasing loads. In numerical algorithms fiber element of sections and analogy of Mörsch truss for Timoshenko element could be used, for example in way presented in this study. Using nonlinear analysis in static calculations and dimensioning eliminates incoherences of traditional, engineering methods of reinforcement concrete calculations, where forces are calculated in linear model, and reinforcements are designed in nonlinear critical state of section.