

Leszek Chodor, Zbigniew Kowal  
Politechnika Świętokrzyska - Kielce

## O WSPÓŁCZYNNIKU POISSONA STALI NISKOWĘGLOWEJ POZA GRANICĄ SPRĘŻYSTOŚCI

### 1. Wprowadzenie

Szereg autorów zajmowało się teoretycznym szacowaniem współczynnika odkształcalności poprzecznej metali w obszarze pozasprężystym (współczynnika Poissona uogólnionego na zakres sprężysto-plastyczny) [np. 1,2,3,4]. Natomiast badania doświadczalne ukierunkowane na sprawdzenie teoretycznych oszacowań były nieliczne. Žukov [5] przeprowadził nieliczne pomiary eksperymentalne współczynnika Poissona poza granicą sprężystości stali niskowęglowej podczas prób rozciągania. Ohashi i Kamiya [6] szacują eksperymentalnie współczynnik ściśliwości stopów aluminium w funkcji intensywności odkształceń. Chodor, Kowal i Sendkowski [7] oszacowali współczynnik Poissona w nielicznych próbach ściskania i rozciągania stali.

Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że inżynierowie projektują i badają konstrukcje stalowe nie zwracając w zasadzie uwagi na fakt, że współczynnik Poissona jest ciągłą funkcją odkształceń od  $\nu_0 \cong 0.3$  w obszarze idealnie sprężystym do 0.5 w obszarze idealnie plastycznym. Stan idealnie plastyczny i związany z nim współczynnik Poissona 0.5 jest w praktyce nieosiągalny. W naszych badaniach elementy konstrukcyjne traciły nośność plastyczną przy maksymalnych odkształceniach podłużnych punktów rzędu 5% a średni współczynnik Poissona w tych punktach wynosił 0.45.

Zwraca uwagę fakt, że nawet w badaniach numerycznych zadań teorii małych sprężysto-plastycznych odkształceń przyjmuje się

skokową zmianę współczynnika Poissona od 0.3 w obszarze sprężystym do 0.5 w obszarze plastycznym niezależnie od wielkości odkształceń .

Z uwagi na różnice współczynnika Poissona szacowanego w różnych badaniach teoretycznych oraz rozrzuty wyników badań doświadczalnych - przeprowadzono szerokie badania eksperymentalne o dużej liczbie prób. Badania dotyczą stali niskowęglowej St3S powszechnie stosowanej w konstrukcjach stalowych. Na podstawie badań określono trend współczynnika Poissona oraz jego zmienność statystyczną dla rozciągania stali. Przedstawiono wyniki pomiarów współczynnika Poissona dla ściskania stali. Wyniki eksperymentu porównano z teorią.

## 2. Doświadczalne wyznaczenie współczynnika odkształcalności poprzecznej stali poza granicą sprężystości

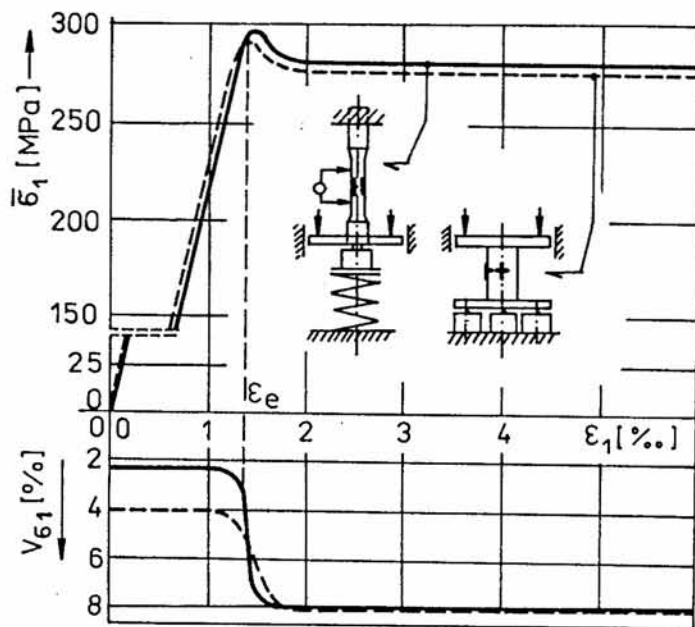
Badania doświadczalne współczynnika odkształcalności poprzecznej  $\nu = |\epsilon_2/\epsilon_1|$  przeprowadzono na modelach stalowych belek zginanych poprzecznie.

Pomiary wykonano na próbkach zginanych a nie rozciąganych lub ściskanych, ze względu na to, że w procesie zginania występują zdeterminowane kierunki odkształceń głównych  $\epsilon_1$  i  $\epsilon_2$  oraz regularny przebieg tych odkształceń na długości pręta. Natomiast w próbach rozciągania lub ściskania wielkości te mają większe losowe fluktuacje, mogące istotnie zaburzyć wyniki pomiarów [7].

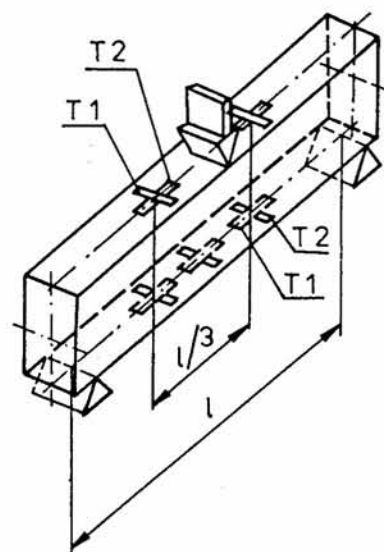
Ścieżki równowagi statycznej  $\sigma_1(\epsilon_1)$  materiału modeli wyznaczono z wyeliminowaniem prędkości odkształceń  $\dot{\epsilon}_1$  na normowych próbkach rozciąganych oraz ściskanych. Wyniki tych badań zilustrowano na rys. 1 i przeanalizowano w pracach [7,8]. Różnice między ścieżkami równowagi przy rozciąganiu (linie ciągłe) i ściskaniu (linie przerywane) są statystycznie nieistotne.

Wybrane parametry ścieżek równowagi statycznej prób rozciąganych wynoszą: sprężysty moduł Younga  $E_0 = (223.7 \pm 5.2)$  GPa (średnia  $\pm$  odchylenie standardowe) ; graniczne odkształcenie sprężyste  $\epsilon_0 = (1.3 \pm 0.05)$  % .

Badaniom poddano pręty o prostokątnym przekroju poprzecznym 40x20 mm, uzyskane przez obróbkę skrawaniem handlowych płaskowników 45x25. Nie stosowano dodatkowej obróbki cieplnej.



Rys.1. Trend  $\bar{\sigma}_1$  i zmienność  $V_{\sigma}$  ścieżki równowagi materiału



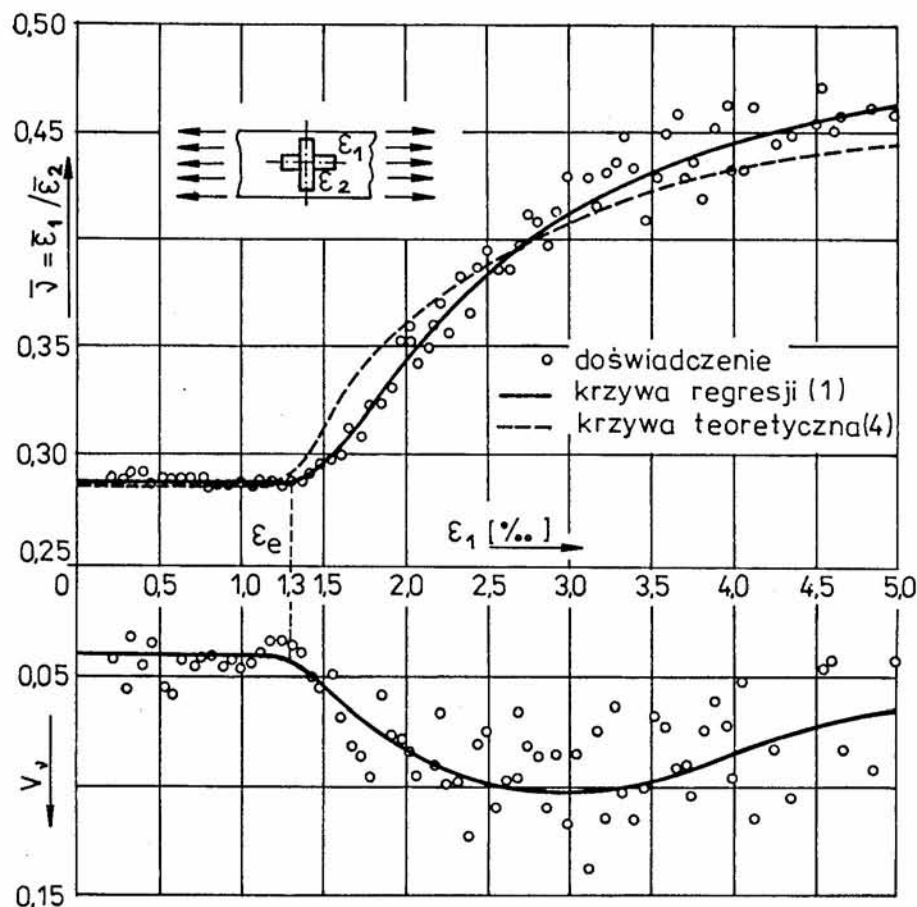
Rys.2. Schemat badanych belek

Rozmieszczenie czujników pomiaru odkształceń na jedno-przęsłowych modelach belek pokazano na rys. 2. Zastosowano tensometry elektrooporowe T1 i T2 typu RL10/120. Tensometry poprzeczne T2 naklejano na tensometry podłużne T1 prostopadle do osi belki. Czujniki umieszczano na dolnej (rozciąganej) i górnej (ściskanej) swobodnej krawędzi belek.

Pomiar odkształceń dokonywano przy użyciu komputerowego systemu pomiarowego z automatycznym przełącznikiem kanałów pomiarowych, odczytem stanu, wstępną analizą wyników pomiarów i ich rejestracją. Pomiar stanu dwóch odpowiadających tensometrów (pomiar maksymalnego odkształcenia głównego  $\epsilon_1$  na tensometrze T1 i odkształcenia poprzecznego  $\epsilon_2$  na tensometrze T2) odbywał się w ciągu dziesiątych części sekundy. W ten sposób praktycznie wyeliminowano wpływ czasu na pomiar współczynnika w uplastycznionych (niestatecznych) punktach ciała. Ponadto odczyty prowadzono w stanie równowagi całej belki, czyli przy ustabilizowanych przemieszczeniach modelu. Dokładność pomiaru odkształcenia wynosiła  $\pm 2 \cdot 10^{-6}$  w liniowym zakresie wskazań tensometrów i była o rząd lepsza od dokładności standardowych mostków tensometrycznych.

Eksperyment prowadzono na 45 modelach, wykonując pomiary współczynnika  $\nu$  w trzech punktach na rozciąganej krawędzi beleczek, dwóch punktach na krawędzi ściskanej, przy kilku-

nastu poziomach obciążenia modelu i trzykrotnie dla jednego poziomu obciążenia. Wszystkie realizacje uzyskane w trakcie takich badań poddano analizie statystycznej. Analizowano odrębnie współczynniki odkształcalności poprzecznej punktów rozciąganych (dla których  $\varepsilon_1 \geq 0$ ) i punktów ściskanych ( $\varepsilon_1 < 0$ ).



Rys.3. Trend  $\bar{\nu}$  oraz współczynnik zmienności  $V_\nu$ , współczynnika odkształcalności poprzecznej w punktach rozciąganych

Na rys.3 kółkami oznaczono wyniki pomiarów współczynnika Poissona przy rozciąganiu materiału. W punktach rozciąganych dysponowano 5246 pomiarami współczynnika  $\nu$  w tym dla  $\varepsilon_1 > 1.3\%$  wykonano 1921 pomiarów. Pomiary prowadzono ciągle i klasowano w przedziałach odkształcenia podłużnego  $\varepsilon_1$  o szerokości  $0.06\%$ .

Linia ciągłą na rys.3 oznaczono krzywą regresji wyników pomiarów wyznaczoną w celu zredagowania empirycznej formuły do szacowania współczynnika odkształcalności poprzecznej stali niskowęglowej. Do analizy regresji włączono tylko klasy o liczności pomiarów nie mniejszej od 10.

Po wielokrotnych próbach doboru krzywej regresji zdecydowano się na zastosowanie funkcji sklezionej na styku obszaru

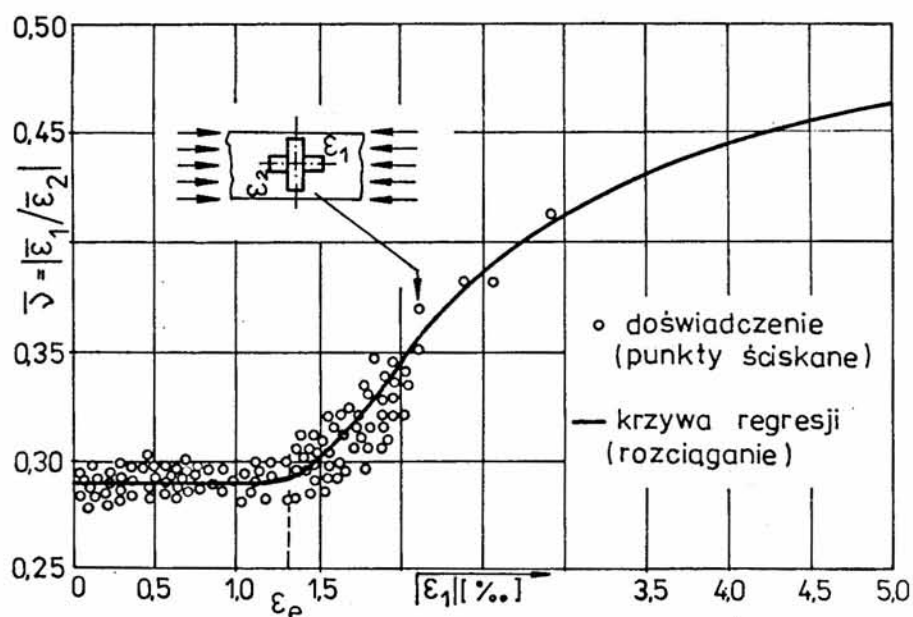
sprężystego i sprężysto-plastycznego. Krzywą tą można opisać równaniem:

$$\nu = \begin{cases} \nu_0 & \text{dla } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_e, \\ 0.5 - (0.95 - \nu_0) (\varepsilon_e / \varepsilon_1)^2 + 0.45 (\varepsilon_e / \varepsilon_1)^3 & \text{dla } \varepsilon_1 > \varepsilon_e, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:  $\varepsilon_e = 1.3\%$  jest granicznym odkształceniem sprężystym,  $\nu_0 = 0.288$  jest współczynnikiem Poissona w obszarze sprężystym.

Przy doborze krzywej regresji  $\nu = a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$  metodą minimów kwadratów przyjęto następujące założenia: 1) krzywa posiada asymptotę o równaniu  $\nu = 0.5$ , 2) krzywa jest ciągła w punkcie  $(\varepsilon_e, \nu_0)$ . Do analizy regresji wzięto środki przedziałów klasowych z wagami proporcjonalnymi do liczebności klasy. Współczynnik korelacji krzywej z punktami doświadczalnymi wyniósł  $\rho = 0.982$ .

Na rys. 4 kółkami oznaczono realizacje współczynnika odkształcenia poprzecznego w punktach ściskanych. W zakresie sprężysto-plastycznych odkształceń dla  $|\varepsilon_1| > 1.3\%$  dysponowano 398 pomiarami. Tylko nieliczne pomiary odpowiadały odkształceniom podłużnym  $|\varepsilon_1| > 2\%$ , ponieważ w chwili globalnego zniszczenia plastycznego belek tensometry umiejscowione w punktach ściskanych znajdowały się na granicy obszaru sprężystego i plastycznego (rys.2).



Rys.4. Krzywa regresji (1) na tle współczynników  $\nu$  w punktach ściskanych

Na rys. 4 naniesiono również krzywą regresji (1) trendu współczynnika odkształcalności poprzecznej w punktach rozciąganych belek. Z porównania tej krzywej z realizacjami współczynnika Poissone'a w punktach ściskanych wynika, że przedstawiony eksperyment nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy, że trend odkształcalności poprzecznej w punktach ściskanych jest taki sam jak trend odkształcalności poprzecznej w punktach rozciąganych.

Zależność (1) można traktować jako statystycznie uzasadnioną w dowolnym stanie jednoosiowego naprężenia.

### 3. Porównanie eksperymentu z teorią

Zgodnie z fundamentalnym założeniem teorii plastyczności w wyniku odkształceń plastycznych nie występuje zmiana objętości ciała. W procesie prostego obciążania całkowite odkształcenie objętościowe jest więc czysto sprężyste i zgodnie z prawem odkształceń objętościowych [9] wynosi:

$$\varepsilon_v = \sigma_v (1 - 2\nu_0) / E_0, \quad (2)$$

gdzie  $\nu_0$  i  $E_0$  oznaczają współczynnik Poissona i moduł Younga w obszarze sprężystym.

Można przyjąć, że punkty na krawędziach swobodnych badanych belek znajdowały się w stanie jednoosiowego naprężenia. Dla punktów tych mamy więc:

$$\varepsilon_v = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3 = \varepsilon_1 (1 - 2\nu) / 3, \quad \sigma_v = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = \sigma_1 / 3, \quad (3)$$

Po uwzględnieniu tych wartości w prawie odkształceń objętościowych (2), uzyskuje się teoretyczną formułę na współczynnik odkształceń poprzecznych [4]:

$$\nu = 0.5 - \frac{1 - 2\nu_0}{2E_0} \cdot \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}. \quad (4)$$

Wykres funkcji (2) pokazano na rys. 3 linią przerywaną dla siecznego modułu odkształcalności podłużnej  $\sigma_1 / \varepsilon_1$  odczytanego ze statycznej ścieżki równowagi rozciąganych prób badanej stali (rys. 1).

Rozbieżność między krzywą teoretyczną (2) i doświadczalną krzywą regresji (1) dochodzi do 5% i jest statycznie nieistotna wobec współczynnika zmienności  $V_\nu$  rzędu 10% (rys.3).

#### 4. Uwagi i wnioski

W badaniach doświadczalnych oszacowano współczynnik odkształcalności poprzecznej stali poza granicą sprężystości. Współczynnik ten można opisać krzywą regresji (1) jako funkcję odkształcenia podłużnego w zależności od granicznego odkształcenia sprężytego i współczynnika Poissona w obszarze sprężystym.

Zmienność losowa współczynnika  $\nu$  wyraźnie rośnie po przekroczeniu granicy plastyczności materiału po czym zmniejsza się w miarę uporządkowywania się orientacji krystalitów materiału czyli w miarę kumulacji odkształceń plastycznych.

Przedstawiony eksperyment nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy, że trend odkształcalności poprzecznej w punktach ściskanych jest taki sam jak w punktach rozciąganych.

Różnice między teoretycznym współczynnikiem odkształceń poprzecznych a współczynnikiem oszacowanym w doświadczeniu są statystycznie nieistotne. Potwierdzono więc doświadczalnie, że kosztem odkształceń plastycznych nie występuje zmiana objętości stali. Przedstawione badania są też kolejnym potwierdzeniem hipotez początku plastyczności i warunków plastyczności opartych na założeniu nieściśliwości plastycznej. Wśród hipotez tych można wymienić hipotezę Treski-Guesta oraz hipotezę Hubera-Misesa-Hencky.

Między współczynnikiem odkształcenia poprzecznego a odkształceniem podłużnym występuje silna korelacja wyrażona wzorem (1). Dlatego na podstawie odkształceń poprzecznych można prognozować odkształcenia podłużne o wartości większej od granicznych liniowych wskazań czujników, to znaczy takie odkształcenia których nie można zmierzyć przy użyciu tradycyjnych tensometrów.

#### Literatura

- [1] Kamiya N., Zawidzki J.: Uściślona metoda analizy odkształceń dla materiału o nieliniowej relacji naprężenie - odkształcenie (w języku japońskim). *Annual Meeting of the Japan Society of Mechanical Engineers*, March 1973,
- [2] Дашинский Г.А.: О коэффициенте поперечной деформации, Исслед. по мех. деформур. сред, Иркутск, 1979,
- [3] Манджакоб С.: Изменение коэффициента поперечной деформации при упругих, пластических и упругопластических деформациях Теор. и прикл. мех., 11, Но 3, 1980,

- [4] Malinin N.N., Rżysko J.: *Mechanika materiałów*, PWN, Warszawa, 1981,
- [5] Жуков А.М.: О коэффициенте Пуассона в пластической области, *Известия АН СССР, Отд. техн. наук*, No 12, 1954,
- [6] Ohashi Y., Kamiya N.: On the bending of thin plates of material having a non-linear stress-strain relation, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.9, No 2, 1967,
- [7] Chodor L., Kowal Z., Sendkowski J.: Equilibrium Paths of Stretched and Compressed Steel Samples, *Proceedings of the 9-th Congress on Material Testing*, Budapest 1986,
- [8] Chodor L.: Losowa nośność ustrojów zginanych z uwzględnieniem sił stycznych. Praca doktorska. *Prace Naukowe IB PWr 68/86*, Wrocław 1986,
- [9] Chodor L., Piechnik S.: Macierzowe sformułowanie zagadnienia brzegowej liniowej teorii sprężystości, *Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Budownictwo 14*, Kielce 1983.

#### ON POISSON'S COEFFICIENT OF LOW-CARBON STEEL BEYOND ELASTICITY LIMIT

##### Summary

This paper presents results of the investigation of Poisson's coefficient of low carbon steel as a function of strain in elastic and non-elastic area. A great number of test allowed to estimate the trend and random variability of Poisson's coefficient. Results of the tests are compared with theoretical estimation.

#### ÜBER POISSONSKOEFFIZIENT DES NIEDRIGGEKOHLETER STAHLER IN ELASTO-PLASTISCHEN BEREICH

##### Zusammenfassung

Über Poissons-koeffizient des niedriggekohleter Stahles als die Deformationsfunktion in elasto-plastischen Bereich untergebracht. Die große Anzahl der Untersuchungen erlaubte die Abschätzung des Trendes und der stochastischen Veränderlichkeit des Poissons-koeffizienten. Die Ergebnisse der Untersuchungen wurden mit den theoretischen Abschätzungen verglichen.

#### О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПУАССОНА НИЗКОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ ВНЕ ПРЕДЕЛА УПРУГОСТИ

##### Содержание

В настоящей работе представлены результаты исследований коэффициента Пуассона низкоуглеродистой стали в виде функции деформации в упругой и внеупругой области. Большое количество экспериментов дало возможность оценить тенденцию и случайную изменчивость коэффициента Пуассона. Результаты исследований сравнены с теоретической оценкой.