



IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice

Kraków - Rytno, maj 1989

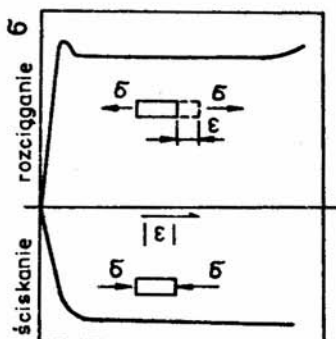


Leszek Chodor
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

ALGORYTM ANALIZY PŁASKICH, SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH STANÓW NAPRĘŻEN Z POCZĄTKOWĄ ANIZOTROPIĄ

1. Wprowadzenie

Materiał wykazujący anizotropię początkową charakteryzuje się różnymi własnościami zależnie od stanu wyteżenia już przy pierwszym obciążeniu. Na rys.1 pokazano różniące się ścieżki równowagi (σ - ϵ) rozciągania i ściskania materiału z wstępną anizotropią.



Rys.1

Wyniki badań eksperymentalnych [1] wskazują, że praktycznie wszystkie materiały wykazują anizotropię początkową zarówno w zakresie sprężystym (różnomodułowość) jak i pozasprężystym (różne granice plastyczności w przypadku materiałów sprężysto-plastycznych). Dotyczy to również metali: mosiądzu, brązu, aluminium i w mniejszym stopniu stali konstrukcyjnej.

W istniejących algorytmach analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych w zasadzie nie uwzględniano anizotropii początkowej. Wydaje się, że powodem tego są utrudnienia obliczeniowe a także ograniczone informacje o zjawisku anizotropii. Opisanie anizotropii początkowej wymaga oprócz eksperymentalnych prób rozciągania również pomiarów na ściskanie i/lub pomiarów w wielosiowym stanie naprężenia.

Wraz ze zwiększeniem dokładności modelu konstrukcji wymagana jest dokładna aproksymacja uzyskanych z eksperymentów ścieżek równowagi

materiału. Klasyyczna aproksymacja modelem multiliniowym lub aproksymacja potęgowa Rambertha-Osgooda ma często niewystarczającą dokładność.

W niniejszej pracy omówiono algorytm analizy płaskich sprężysto-plastycznych stanów naprężeń z anizotropią początkową i osłabieniem materiału. Algorytmy dostosowano do klasycznej metody elementów skończonych. Oprócz przyrostowej teorii plastyczności Prandtl-Reussa omówiono zastosowanie integralnej (odkształceniowej) teorii plastyczności Hencky-Iljuszina, chętnie wykorzystywanej w obliczeniach inżynierskich.

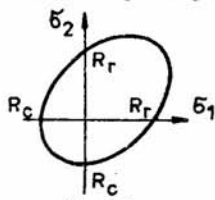
Zaproponowano sposób modyfikacji plastycznej powierzchni granicznej dla materiałów z wstępną anizotropią. Ścieżki równowagi materiału aproksymowane funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia.

Pokazano przykład zastosowania opracowanego programu komputerowego do wyznaczania frontów plastycznych w belkach zginanych poprzecznie. Wyniki obliczeń porównano z eksperymentem.

2. Plastyczna krzywa graniczna w płaskim stanie naprężeń materiału z początkową anizotropią

Początkową plastyczną krzywą graniczną oddzielającą stateczne i nie-stateczne stany punktu materiału przy pierwszym obciążeniu, przyjmijmy w kształcie elipsy (rys.2).

Równanie symetrycznej krzywej drugiego stopnia jest trójparametrowe:



Rys.2

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 2a_1 \sigma_1 \sigma_2 + 2a_2 (\sigma_1 + \sigma_2) + a_3 = 0, \quad (1a)$$

gdzie σ_1 i σ_2 są naprężeniami głównymi.

W naszym przypadku zachodzi:

$$a_2 = 0.5(R_c - R_r), \quad a_3 = -R_c R_r, \quad (1b)$$

gdzie R_r i R_c są granicami plastyczności przy czystym rozciąganiu i czystym ściskaniu.

Na parametr a_1 nałożone są następujące ograniczenia wynikające z wypukłości i zamknięcia krzywej:

$$|a_1| < 1, \quad (1 - a_1) \cdot [R_c R_r (1 + a_1) + (R_c - R_r)^2] > 0. \quad (1c)$$

Parametr a_1 , spełniający ograniczenia (1c), należy wyznaczyć z badania dowolnego dwuosowego stanu naprężeń. Analiza wyników badań eksperymentalnych metali wskazuje, że a_1 osiąga wartość bliską -0.5 .

Powierzchnię graniczną (1a) można teraz zapisać w postaci:

$$f(\sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + (R_c - R_r)(\sigma_1 + \sigma_2) - R_c R_r = 0, \quad (2)$$

która dla $R_c = R_r$ degeneruje się do krzywej Hubera-Misesa-Hencky.

Chwilową krzywą graniczną przyjmijmy w postaci analogicznej do (2) sparametryzowaną współczynnikiem wzmocnienia-osłabienia κ :

$$f(\sigma, \kappa) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + [R_c(\kappa) - R_r(\kappa)](\sigma_1 + \sigma_2) - R_c(\kappa)R_r(\kappa) = \quad (3a)$$

$$= \sigma_i + 3[R_c(\kappa) - R_r(\kappa)]\sigma_m - R_c(\kappa)R_r(\kappa) = 0, \quad (3b)$$

gdzie σ_i jest intensywnością naprężeń, natomiast σ_m naprężeniem średnim. Funkcje $R_c(\kappa)$ i $R_r(\kappa)$ określające zmiany wymiarów i ruch powierzchni granicznej w miarę wzrostu odkształceń plastycznych, należy określać na podstawie eksperymentów.

3. Prawo fizyczne

3.1. Propozycja prawa fizycznego w zakresie sprężystym

Prawo fizyczne w sprężystym zakresie pracy izotropowego ciała z różnymi modułami odkształcalności przy rozciąganiu i ściskaniu było przedmiotem wielu prac, między innymi [1 do 3]. Proponowano uogólnione prawo Hooke'a ze stałymi sprężystości zależnymi tylko od znaku naprężeń głównych [1], lub stałymi sprężystości zależnymi od znaku i wartości naprężeń głównych [2]. Rozpatrywano przypadki symetrycznych i niesymetrycznych macierzy stałych materiałowych dla ciała różnomodułowego [3].

W niniejszej pracy proponujemy prawo fizyczne materiału różnomodułowego, przy następujących hipotezach: 1) stałe materiałowe w złożonym stanie naprężenia zależą od znaków i wartości naprężeń głównych, 2) prawo fizyczne w złożonym stanie naprężenia można zapisać podobnie jak prawo dla izotropowego materiału równomodułowego.

Z hipotezy 2 wynika, że zależność między wektorem naprężeń σ a odkształceniami można zapisać w postaci [4]:

$$\sigma = 2G(\epsilon - \epsilon_{A1}) + 3k\epsilon_A, \quad (4)$$

gdzie moduł odkształcalności objętościowej i postaciowej można wyrazić za pomocą pary stałych materiałowych $(E, \nu) = (\text{moduł Younga, współczynnik Poissona})$ następująco: $3k = E/(1-2\nu)$, $G = E/2(1+\nu)$. Dla płaskiego stanu naprężenia aksjatory naprężeń są następującymi wektorami: $\epsilon_A = (\epsilon_m, \epsilon_m, 0)$, $\epsilon_{A1} = (\epsilon_m, \epsilon_m, \tau_{xy}/2)$. Odkształcenie średnie wynosi $\epsilon_m = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3$, przy czym w płaskim stanie naprężenia odkształcenie $\epsilon_z = [(2G-3k)/(4G+3k)](\epsilon_x + \epsilon_y)$.

Występujące w powyższych zależnościach "stałe" materiałowe zależą od znaku i wartości naprężeń i w zasadzie są inne w każdym punkcie ciała. Niechaj G^+ i k^+ oraz G^- i k^- będą modułem Kirchoffa oraz modułem odkształcalności objętościowej określonymi na podstawie ścieżek równowagi przy jednoosiowym rozciąganiu i jednoosiowym ściskaniu odpowiednio. Przyjmijmy, że G i k w punkcie różnomodułowego ciała, znajdującego się w płaskim stanie naprężenia, można aproksymować następującymi średnimi ważonymi przez wartości naprężeń głównych σ_1 i σ_2 :

$$G = \frac{|\sigma_1|G_1 + |\sigma_2|G_2}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad k = \frac{|\sigma_1|k_1 + |\sigma_2|k_2}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad (5)$$

gdzie G_1, G_2 i k_1, k_2 wynoszą: $G_i = G^-$ i $k_i = k^-$ gdy $\sigma_i \leq 0$; $G_i = G^+$ i $k_i = k^+$ gdy $\sigma_i > 0$ ($i = 1, 2$).

Zaproponowane sformułowanie (4) i (5) prawa fizycznego w zakresie sprężystym różnomodułowego materiału umożliwia korzystanie ze standardowych procedur analizy zagadnień brzegowych teorii sprężystości, stanowiących "prosty" krok w iteracyjnej procedurze obliczania modułów (5). Wyrażenia (5) winny być przedmiotem weryfikacji eksperymentalnej.

3.2. Prawo fizyczne zakresu plastycznego w świetle teorii integralnej

Integralna (odkształceniowa) teoria plastyczności dostatecznie dokładnie opisuje pracę konstrukcji przy działaniu prostych obciążeń i jest w istocie nieliniową teorią sprężystości. Prawo fizyczne zakresu plastycznego w świetle tej teorii można wyrazić również prawem Hooke'a (4).

Moduł odkształcenia objętościowego k oblicza się jak w zakresie sprężystym, zgodnie z hipotezą, że zmiana objętości ciała następuje tylko kosztem odkształceń sprężystych.

Moduł odkształceń postaciowych uogólniony na zakres plastyczny wynosi

$$G = \sigma_i / (3\epsilon_i), \quad (6)$$

czyli przedstawia moduł ścieżny na ścieżce równowagi $(\epsilon_i, \sigma_i) = (\text{intensywność odkształceń, intensywność naprężeń})$. W przypadku różnych ścieżek równowagi na ściskanie i rozciąganie materiału, proponujemy określać moduł G^+ ze ścieżki równowagi materiału rozciąganego oraz moduł G^- ze ścieżki równowagi materiału ściskanego, a następnie dobrać stałą G według procedury (5).

W przypadku $R_p = R_c$ naprężenia określone powyższymi formułami tożsamiście spełniają warunek plastyczności Hubera-Misesa (2).

3.3. Prawo fizyczne zakresu plastycznego w świetle teorii przyrostowej

Przyrost odkształcenia $d\epsilon$ złożony z części sprężystej $d\epsilon_s$ oraz części plastycznej $d\epsilon_p$: $d\epsilon = d\epsilon_s + d\epsilon_p$.

Część sprężysta przyrostu odkształcenia opisuje równanie

$$d\epsilon_s = E^{-1} d\sigma, \quad (7)$$

gdzie macierz Younga E określona jest dla stałych sprężystych (5) odpowiadających rzeczywistym naprężeniom $\sigma + d\sigma$.

Część plastyczna przyrostu odkształcenia można opisać związkiem Prandla-Reussa [5]

$$d\epsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\lambda a, \quad (8)$$

gdzie: σ - wektor naprężeń, $d\lambda$ - mnożnik Lagrange'a. Wektor a dla płaskiego stanu naprężeń i dla powierzchni granicznej (2) wynosi:

$$a = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \cdot \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y + R_c - R_r \\ 2\sigma_y - \sigma_x + R_c - R_r \\ 6\tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Mnożnik $d\lambda$ można określić z formuły [5]

$$d\lambda = \frac{1}{A + a^T d} d^T d\epsilon \quad (10)$$

gdzie: $d = [Ea]$, $A = \frac{1}{d\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda \right]$.

Jeśli za miarę wzmocnienia izotropowego przyjmiemy pracę plastyczną

$$d\kappa = d\epsilon^T \sigma = d\lambda a^T \sigma,$$

to

$$A = \frac{\partial f}{\partial \kappa} a^T \sigma. \quad (11)$$

Dla rozpatrywanej powierzchni granicznej (3) mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = 3\sigma_m + \left(\frac{\partial R_c}{\partial \kappa} - \frac{\partial R_r}{\partial \kappa} \right) - R_r \frac{\partial R_c}{\partial \kappa} - R_c \frac{\partial R_r}{\partial \kappa} = \frac{\partial R_c}{\partial \kappa} (3\sigma_m - R_r) - \frac{\partial R_r}{\partial \kappa} (3\sigma_m + R_c), \quad (12)$$

gdzie pochodne $\partial R_c / \partial \kappa$ oraz $\partial R_r / \partial \kappa$ można odczytać z wykresu odkształcania (R_r, κ) dla jednoosiowego rozciągania oraz (R_c, κ) dla ściskania.

4. Algorytm programu numerycznego

Program komputerowy do analizy płaskich, sprężysto-plastycznych stanów naprężeń z początkową anizotropią złożono z czterech rozłącznych bloków: 1) bloku SPLIN do aproksymacji modeli rozciąganego i ściskanego materiału funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, 2) bloku TARSPR do rozwiązywania problemu liniowo-sprężystego, 3) bloku TARPL1 do rozwiązywania problemu nieliniowo sprężystego oraz problemu plastycznego według teorii integralnej, 4) bloku TARPL2 do rozwiązywania problemu plastycznego według przyrostowej teorii płynięcia.

W programie przewidziano podział tarczy na trójkątne elementy skończone rzędu liniowego o sześciu stopniach swobody każdy.

Blok SPLIN oraz TARSPR wykonywane są niezależnie od rodzaju problemu. Blok TARPL1 oraz TARPL2 wykonywane są alternatywnie zależnie od decyzji projektanta. Obliczenia w bloku TARPL1 wykonywane są szybciej niż w bloku TARPL2, jednakże teoria integralna może być stosowana tylko w przypadku obciążeń prostych.

Blok SPLIN: Aproksymacja ścieżek równowagi materiału funkcjami sklejanymi daje możliwość bardzo dobrego przybliżenia wyników eksperymentalnych z zachowaniem ciągłości oraz gładkości krzywej. Zastosowano klasyczne algorytmy interpolacji funkcjami sklejanymi. Na podstawie zbioru

eksperymentalnych punktów (σ_x, ϵ_x) otrzymuje się funkcję sklejaną (ϵ_i, σ_i) w zakresie sprężystym i w zakresie plastycznym dla teorii integralnej, lub funkcje (σ_i, ϵ) w zakresie plastycznym dla teorii przyrostowej.

Blok TARSPR: W przypadku różnomodułowości materiału iteracyjne rozwiązanie układu równań równowagi systemu konstrukcyjnego potrzebne jest również w zakresie sprężystym. W zrealizowanym algorytmie numerycznym zastosowano metodę zmiennej sztywności.

Blok TARPL1: Metoda naprężeń początkowych w połączeniu z procedurą iteracyjną quasi Newtona-Raphsona pozwoliła na korzystanie na każdym kroku iteracji z odwróconej w bloku TARSPR macierzy sztywności K_0^{-1} . Po danym przyroście ΔP obciążenia postępowano według algorytmu:

1 Oblicz przyrost przemieszczeń "sprężystych", opowiadających sile ΔP : $\Delta u = K^{-1} \Delta P$. **2** Pętla po wszystkich elementach: **a** oblicz $\Delta \epsilon$, $\Delta \sigma$ wywołane przemieszczeniem Δu , przy użyciu modułów k , G z poprzedniej iteracji); **b** oblicz $\sigma^* = \sigma + \Delta \sigma$, $\epsilon^* = \epsilon + \Delta \epsilon$, oraz odpowiadające ϵ_i , ϵ_m , σ_i^* , k^* , G^* ; **c** oblicz σ z równania (4) oraz odpowiadające σ_i ; **d** jeżeli $(|(\sigma_i - \sigma_i^*)/\sigma_i| > 0.01)$ to ($\sigma_i^* = \sigma_i$, oblicz k , G , skocz do **c**); **e** oblicz siły węzłowe $R^* = \int B^T \sigma dV$. **3** Oblicz siły niezrównoważone $R = \sum R^* - P$, podstaw $P = \sum R^*$; **4** Jeśli $(\|R\| > 10^{-4})$ to ($u = K^{-1} R$, skocz do **2**); **5** Jeśli $(\|R\| \leq 10^{-4})$ to (następny przyrost obciążenia lub zakończ obliczenia).

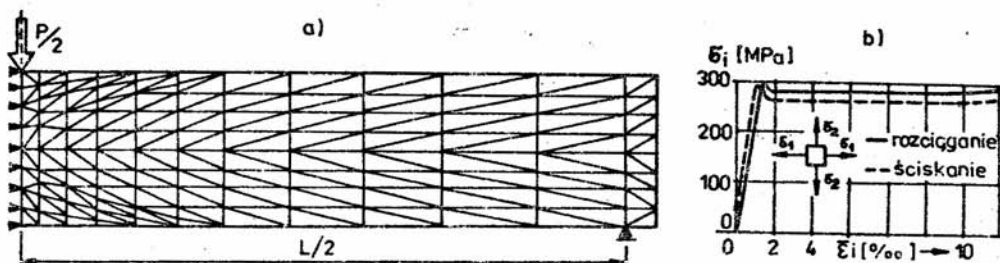
Blok TARPL2: Zastosowano metodę obciążeń wstępnych ze względu na to, że efekty osłabienia są tutaj uwzględniane bezpośrednio [5]. Współczynnik relaksacji dobierano w procedurze przyrostowej dobierano, po wprowadzeniu modyfikacji do zaleceń podanych w pracy [5]. Modyfikacje polegały na wykorzystaniu formuł z p.3.3.

5. Przykład numeryczny

W przykładzie, zaczerpniętym z pracy [6], podano wyniki analizy sprężysto-plastycznej belki swobodnie podpartej, obciążonej siłą skupioną w środku przęsła. Dyskretyzację belki-tarczy na trójkątne elementy skończone pokazano na rys. 3a. Belka wykonana jest ze stali niskowęglowej o różniących się modelach materiału na ściskanie i rozciąganie (rys.3b). W analizie zastosowano integralną teorię plastyczności, ponieważ określano plastyczną nośność belki przy obciążaniu monotonicznie rosnącym. W tab. 1 podano współczynniki funkcji sklejaną aproksymujących (z dokładnością 1%) trend ścieżek równowagi materiału uzyskanych z eksperymentu.

Na rys.4 pokazano kształtowanie się frontów plastycznych w belce o stosunku długości do wysokości $L/H=8$, pod obciążeniem $P=0.85 P_{pl}$ oraz $P=P_{pl}$, gdzie P_{pl} jest nośnością belki wyznaczoną zgodnie z klasyczną

teoria plastyczności.

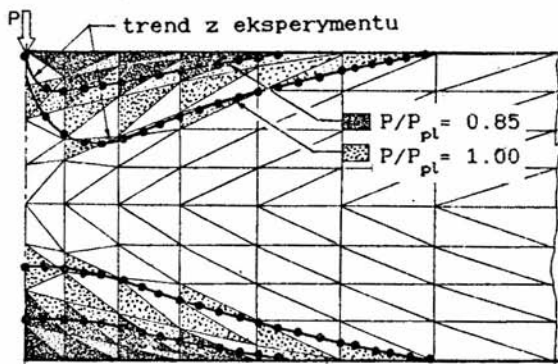


Rys. 3

Tab.1. Współczynniki funkcji sklepanych $\sigma_i = a + bt + ct^2 + dt^3$, $t = \epsilon_i - \epsilon_{i0}$

rozciąganie					ściskanie				
$(\epsilon_{i0}; \epsilon_{i1})$	a	b	c	d	$(\epsilon_{i0}; \epsilon_{i1})$	a	b	c	d
0 ; 1,05	0	262,07	0	0	0 ; 1,0	0	266,64	0	0
*1,05; 1,26	275,18	262,07	-1011,0	1037,7	*1,0 ; 1,17	266,64	266,64	-617,70	-522,54
1,26; 1,41	295,24	-25,259	-357,24	1202,0	1,17 ; 1,27	291,55	11,317	-884,20	3370,25
1,41; 1,76	287,47	-51,296	183,65	-210,23	1,27; 1,80	287,21	-64,415	126,88	-83,155
*1,76; 8,90	283,00	0	0	0	*1,80; 8,90	276,33	0	0	0
*8,90; 10,0	283,00	0	0,563	-0,061	*8,90; 10,0	276,33	0	0,563	-0,061
10,0; 15,0	283,00	1,017	0,362	-0,008	10,0; 15,0	276,93	1,017	0,362	-0,008

*) brak ciągłości drugiej pochodnej



Rys. 4

Wyniki obliczeń porównano z kształtami frontów plastycznych uzyskanych z eksperymentalnych badań fotomechanicznych [6].

Wbrew oczekiwaniom, wynikającym z analizy klasycznej - górny i dolny front plastyczny jeszcze nie złączył się, więc plastyczna nośność belki nie została wyczerpana.

W rzeczywistym granicznym stanie plastycznym pod

siłą skupioną pozostanie jądro sprężyste belki [6].

Analiza numeryczna obarczona jest błędem rzędu wielkości zastosowanych elementów skończonych. Dlatego w celu uzyskania wyników wystarczających do analizy zjawisk bez wspierania się eksperymentem należy stosować gęsty podział na skończone elementy wyższych rzędów niż liniowy.

6. Uwagi i wnioski

Analizę płaskich sprężysto-plastycznych stanów naprężeń z anizotropią początkową i osłabieniem materiału można prowadzić w sposób pokazany w pracy, przy zastosowaniu integralnej (odkształceniowej) lub przyrostowej teorii plastyczności dostosowanej do metody elementów skończonych.

Zaproponowana w pracy modyfikacja plastycznej powierzchni granicznej a także sformułowania prawa fizycznego zakresu sprężystego i plastycznego dla materiału z początkową anizotropią są skuteczne w procedurach numerycznych, lecz powinny być zweryfikowane doświadczalnie podczas stosowania zaprojektowanych eksperymentów.

W obliczeniach numerycznych wskazane jest stosowanie aproksymacji eksperymentalnych ścieżek równowagi za pomocą funkcji sklepanych.

Wykaz literatury

1. Амбарцумян С. А.: Разномодульная теория упругости, Наука, Москва, 1982.
2. Green A.E., Mkrtychian I.Z.: Elastic solids with different moduli in tension and compression, *J. Elasticity*, Vol.7, 1977, No 4
3. Kamiya N.: Symmetric and asymmetric theories of bimodulus elasticity-bending of cylindrical panels, V.55, *ZAMM*, 1975
4. Chodor L., Piechnik S.: Ujęcie macierzowe zagadnienia brzegowego liniowej teorii sprężystości, *Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Budownictwo* 14, Kielce, 1983.
5. Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.: Elasto-plastic Stress Analysis a Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1972, v.5
6. Chodor L.: Graniczna nośność ustrojów zginanych z uwzględnieniem sił stycznych, Praca doktorska, *Raport Inst. Bud. Politechniki Wrocławskiej*, PRE 68/86, Wrocław 1986.

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL STRESS STATE WITH INITIAL ANISOTROPY

Summary

In this paper elastic and plastic analysis of two-dimensional stress states with an initial anisotropy and a strain softening is presented. Presented algorithms are adapted to the incremental and deformation theories of plasticity.

An modification of plastic of limit surface and physic laws in elastic and plastic range of the body with initial anisotropy, is proposed.

An application of written computer program is shown to investigate plastic fronts in the transversely bended beam. Numerical results are compared with experimental data.