



IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice

Kraków - Rytró, maj 1989



Roman Bijak, Leszek Chodor
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

ŚCISŁY ELEMET SKONCZONY PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO O PRZEKROJU ZAMKNIĘTYM W ZAGADNIENIACH STATYKI I STATECZNOŚCI

1. Wprowadzenie

Teoria prętów cienkościennych zaproponowana przez Własowa [1] i rozwinięta przez Kollbrunnera i innych [2,3] jest dziś powszechnie akceptowana w zastosowaniach technicznych.

Sformułowanie macierzowe MES dla prętów cienkościennych o przekroju otwartym podał po raz pierwszy Krajcinowic [4](1969). Kawai [5](1973) podjął próbę analizy prętów o przekroju zamkniętym, w których istotny wpływ na odkształcenia ma moment giętno-skrętny. Zaproponował procedurę iteracyjną, wykorzystując macierze sztywności wyprowadzone dla prętów o przekroju otwartym.

W pracach [7,9] zastosowano teorię Kollbrunnera [2,3], w której paczenie przekroju poprzecznego opisuje się przy użyciu funkcji paczenia θ , będącej uogólnieniem jednostkowego skręcenia przekroju. W świetle takiego podejścia teoria prętów cienkościennych o przekroju otwartym jest przypadkiem szczególnym teorii prętów o przekroju zamkniętym.

Gunnlaugsson i Pedersen [7](1982) uzyskują niejawne wyrażenia na liniową macierz sztywności pręta o przekroju zamkniętym, uwzględniając odkształcenia styczne wywołane siłami poprzecznymi.

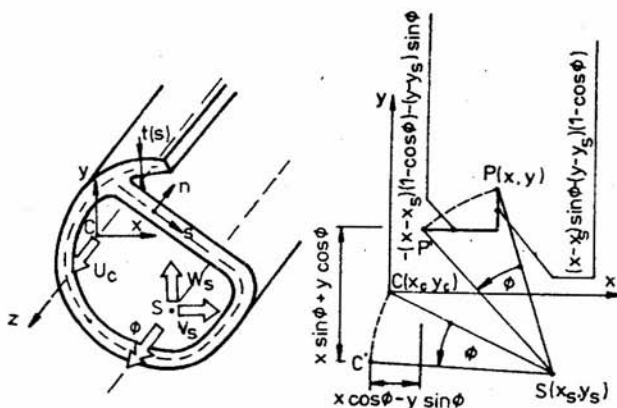
Chen i Hu [9](1988) uzyskują jawne wyrażenia na liniową macierz sztywności pręta o przekroju zamkniętym, aproksymując funkcję kształtu skręcania wielomianem trzeciego stopnia.

W niniejszej pracy wyprowadzono jawne wyrażenia na macierz geometryczną (i macierz liniową) sprężystego elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym. Przyjęto ścisłą funkcję kształtu skręcania z rozwiązania równania różniczkowego, zamiast przybliżania jej funkcjami aproksymującymi. Wpływ momentu giętno-skrętnego na odkształcenia uwzględniono zgodnie z teorią Kollbrunnera, tak więc prezentowane rozwiązania dotyczą zarówno prętów o przekroju zamkniętym jak i otwartym czy mieszanym (otwarto-zamkniętym).

W celu ułatwienia studiowania tekstu, ujęto w ramki te wyrażenia, które są specyficzne dla prowadzonej analizy i nie występują lub występują w innej postaci w klasycznej analizie prętów o przekroju otwartym.

2. Pole przemieszczeń i odkształceń elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym

Pole przemieszczeń punktów przekroju pręta opiszemy w prawoskrętnym układzie współrzędnych (x, y, z) . Oś z jest linią środków ciężkości. Na konturze pręta wprowadzimy prawoskrętny, lokalny układ współrzędnych (n, z, s) , gdzie s jest bieżącą współrzędną linii środkowej konturu, natomiast n jest osią normalną do linii środkowej w punkcie bieżącym.



Rys.1

miast n jest osią normalną do linii środkowej w punkcie bieżącym.

Punkt na linii środkowej przekroju doznaje przemieszczeń liniowych u, v, w odpowiednio wzdłuż osi z, x, y oraz obrotu o kąt ϕ wokół środka zginania $S(x_s, y_s)$. Przemieszczenia liniowe można wyrazić poprzez przemieszczenie u_c środka ciężkości oraz

przemieszczenia v_s i w_s środka zginania, w następujący sposób:

$$u = u_c - v_s' \cdot (x \cdot \cos\phi - y \cdot \sin\phi) - w_s' \cdot (y \cdot \cos\phi + x \cdot \sin\phi) - \omega \cdot \theta, \quad (1a)$$

$$v = v_s - (x - x_s) \cdot (1 - \cos\phi) - (y - y_s) \cdot \sin\phi, \quad (1b)$$

$$w = w_s - (y - y_s) \cdot (1 - \cos\phi) + (x - x_s) \cdot \sin\phi. \quad (1c)$$

Zależności (1a, b, c) wynikają ze związków geometrycznych, zilustrowanych na rys.1. Symbolem $()'$ oznaczono różniczkowanie po z . Funkcja paczenia θ

zastępuje jednostkowy kąt skręcenia ϕ' , występujący w analizie prętów o przekroju otwartym. Główną współrzędną wycinkową ω punktu na linii środkowej przekroju można zapisać w postaci $\omega = \int_0^s (h - \psi/t) ds$, gdzie t jest grubością ścianki, h odległością środka zginania od stycznej do linii środkowej, a $\psi = \tau_b \cdot t / (G \cdot \phi')$ jest funkcją skręcania proporcjonalną do naprężeń stycznych Bredta τ_b zależną tylko od geometrii przekroju [9] (G jest modułem Kirchoffa).

Skończone odkształcenie normalne ϵ_{zz} wzdłuż osi elementu wynosi:

$$\epsilon_{zz} = u' + \frac{1}{2} \cdot \left\{ (u')^2 + (v')^2 + (w')^2 \right\}. \quad (2)$$

Po podstawieniu przemieszczeń (1) do wyrażenia (2), rozwinięciu funkcji trygonometrycznych w szereg Taylora, pominięciu wyrazów rozwinięcia trzeciego i wyższych rzędów a także pominięciu $(u')^2$, otrzymujemy formuły na część liniową $\epsilon_{zz}^{(1)}$ i nieliniową $\epsilon_{zz}^{(2)}$ odkształcenia ϵ_{zz} :

$$\epsilon_{zz}^{(1)} = u'_c - v''_c \cdot x - w''_c \cdot y - \boxed{\omega \cdot \theta'}. \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz}^{(2)} = & v''_c \cdot \phi \cdot y - w''_c \cdot \phi \cdot x + (v''_c \cdot y_c - w''_c \cdot x_c) \cdot \phi' + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left\{ (v'_c)^2 + (w'_c)^2 + [(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2] \cdot (\phi')^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3b)$$

Liniowa część odkształceń stycznych γ_{zx} wywołanych skręcaniem wynosi:

$$\gamma_{zx}^{(1)} = \partial \xi / \partial z + \partial u / \partial s, \quad (4)$$

przy czym przemieszczenie w kierunku stycznym do konturu wynosi $\xi = -h(s) \cdot \phi(z)$, przemieszczenie (paczenie) wzdłuż osi pręta wynosi $u = -\omega(s) \cdot \theta(z)$. Ponieważ zachodzi $\partial \omega / \partial s = h - \psi/t$, to (4) można przepisać w postaci:

$$\gamma_{zx}^{(1)} = \psi/t \cdot \phi' + (\psi/t - h) \cdot (\theta - \phi'). \quad (5)$$

Ponieważ odkształcenia styczne wywołane siłami poprzecznymi są pomijalnie małe w smukłych belkach (spełniających założenia analizy prętów cienkościennych), to w prowadzonej analizie przyjęto, że odkształcenia (5) są całkowitymi odkształceniami postaciowymi. Składowe tensora odkształceń różne od ϵ_{zz} (3) i γ_{zx} (5) są zerowe lub pomijalnie małe. Przyjęto więc: $\epsilon_{ss} = \epsilon_{nn} = \gamma_{ns} = \gamma_{zn} = 0$.

3. Równanie prac wirtualnych i różniczkowe równanie stanu dla elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym

Zasadę prac wirtualnych dla ciała o objętości V i powierzchni S z naprężeniami początkowymi $\sigma_{ij}^{(0)}$, przy skończonych przyrostach: odkształcenia $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)}$, przemieszczeń u_i i naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$

mierzonych od stanu odniesienia, można zapisać w postaci [4]:

$$\delta W_{\text{int}} \left[= \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij}^{(2)}) dV \right] = \delta W_{\text{ext}} \left[= \int_S q_i \delta u_i dS \right], \quad (6)$$

gdzie indeksami (1) oznaczono części liniowe a indeksami (2) części nieliniowe przyrostów tensorów odkształcenia i naprężenia.

Pracę naprężeń na wirtualnych odkształceniach δW_{int} (6) w cienkościennym elemencie długości l o przekroju zamkniętym oszacujemy przy pominięciu jako małych: nieliniowych odkształceń postaciowych oraz pominięciu członów wyższego rzędu niż drugi w iloczynie $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & \int_V (\sigma_{zz}^{(1)} \delta \varepsilon_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(0)} \delta \varepsilon_{zz}^{(2)} + \tau_{sz}^{(1)} \delta \gamma_{sz}^{(1)}) dV \quad \underline{\sigma_{zz}^{(1)} = E \varepsilon_{zz}^{(1)}, \tau_{sz}^{(1)} = G \gamma_{sz}^{(1)} \text{ i } (9a, b)} \\ = & \int_0^l \left\{ u'_c E A u'_c + \delta w'_s E J_x w'_s + \delta v'_s E J_y v'_s + \boxed{\delta \theta' E J_{\omega\omega} \theta'} + \right. \\ & + \boxed{\frac{\mu}{1-\mu} G J (\delta \theta \cdot \theta - \delta \phi' \theta - \delta \theta \cdot \phi')} + \frac{1}{1-\mu} \delta \phi' G J \phi' \left. \right\} + \\ & + \delta \phi' [N r_s^2 + M_x(z) \beta_x + M_y(z) \beta_y + B_\omega(z) \beta_\omega] \phi' - \delta w'_s M_y(z) \phi + (7) \\ & + \delta v'_s M_x(z) \phi - \delta w'_s N x_s \phi' + \delta v'_s N y_s \phi' - \delta \phi M_y(z) w'_s + \\ & + \delta \phi M_x(z) v'_s - \delta \phi' N x_s w'_s + \delta \phi' N y_s v'_s + \delta v'_s N v'_s + \delta w'_s N w'_s \left. \right\} dz. \end{aligned}$$

Wyrażenia zawierające $\sigma_{zz}^{(0)}$ zastąpiono po przekształceniach symbolami siły osiowej N , momentów zginających M_y , M_x oraz bimomentu B_ω :

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA, \quad M_y = \int_A \sigma_{zz} x dA, \quad M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA, \quad B_\omega = \int_A \sigma_{zz} \omega dA.$$

Występujące w formule (7) charakterystyki geometryczne:

$$A = \int_A dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA, \quad J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA$$

obliczane są w układzie głównych, centralnych osi bezwładności dla głównych współrzędnych wycinkowych. Spełnione są więc następujące warunki:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A \omega dA = \int_A y \cdot \omega dA = \int_A y \cdot x dA = \int_A x \cdot \omega dA = 0.$$

We wzorze (7) wprowadzono oznaczenia:

J - moment bezwładności czystego skręcania,

$I_p = \int_A h^2 dA$ - kierunkowy moment bezwładności,

$\mu = 1 - J/I_p$ - współczynnik spaczenia,

$\beta_\omega = 1/J_{\omega\omega} \cdot \int_A (x^2 + y^2) \cdot \omega dA$, $\beta_x = -2 \cdot x_s + 1/J_y \cdot \int_A (x^2 + y^2) \cdot x dA$,

$\beta_y = -2 \cdot y_s + 1/J_x \cdot \int_A (x^2 + y^2) \cdot y dA$ - ramiona asymetrii,

$r_s^2 = J_x + J_y + A \cdot (x_s^2 + y_s^2)$ - kwadrat promienia bezwładności,

$k = \sqrt{\mu \frac{G \cdot J}{E \cdot J_{\omega\omega}}} - \text{giętno-skrętna charakterystyka przekroju.}$

Pracę sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach w elemencie cienkościennym można zapisać w postaci:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^l \left\{ \delta u_p q_z + \delta w_p q_x + \delta v_p q_y + \delta \phi m_t + \delta w'_p m_x + \delta v'_p m_y + \boxed{\delta \theta_p b_\omega} \right\} dz \quad (8)$$

gdzie indeksem p oznaczono przemieszczenia w punktach przyłożenia zewnętrznych obciążeń q_z, q_x, q_y wzdłuż osi z, x, y, momentów zginających m_x, m_y wokół osi x i y, momentów skręcających m_t oraz bimomentów b_ω .

Równania różniczkowe Eulera-Lagrange'a dla stanu równowagi, wynikające z równań (6) przy uwzględnieniu (7), (8) są następujące:

$$(EA \cdot u_c)' + q_z = 0, \quad (9a)$$

$$(EJ_x w''_s)' - (M_y \phi)'' + (N_x \phi)' - (Nw'_s)' - q_y + m'_x = 0, \quad (9b)$$

$$(EJ_x v''_s)' + (M_y \phi)'' - (N_y \phi)' - (Nv'_s)' - q_x + m'_y = 0, \quad (9c)$$

$$\boxed{(GJ/(1-\mu) \cdot [-\phi'' + \mu\theta'] - \{ [N \cdot r_s^2 + M_x(z) \cdot \beta_x + M_y(z) \cdot \beta_y + B_\omega(z) \cdot \beta_\omega] \phi' \} + M_x v'_s - (N_y v'_s)' - M_y w'_s + (N_x w'_s)' - m_t = 0.} \quad (9d)$$

$$\boxed{(\mu GJ/(1-\mu) \cdot (-\phi' + \theta) - EJ_\omega \theta'' - b_\omega = 0.} \quad (9e)$$

4. Funkcje kształtu dla przemieszczeń w elemencie cienkościennym

Funkcje kształtu dla kąta skręcenia przyjęto z rozwiązania równań (9d, e) przy pominięciu wpływu sił przekrojowych na przemieszczenia:

$$\boxed{-\phi'' + \mu\theta' = 0, \quad (k^2/(1-\mu) \cdot (-\phi' + \theta) - \theta'' = 0.} \quad (10a, b)$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (10) można zapisać w postaci:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(z) &= F_1 \sinh kz + F_2 \cosh kz + F_3 kz + F_4, \\ \theta(z) &= k/\mu (F_1 \cosh kz + F_2 \sinh kz + F_3 \mu), \end{aligned}}$$

lub sformułować macierzowo:

$$\phi(z) = A^T \cdot \bar{U}_q \cdot \bar{\xi}, \quad \theta(z) = B^T \cdot \bar{U}_q \cdot \bar{\xi}, \quad (11a, b)$$

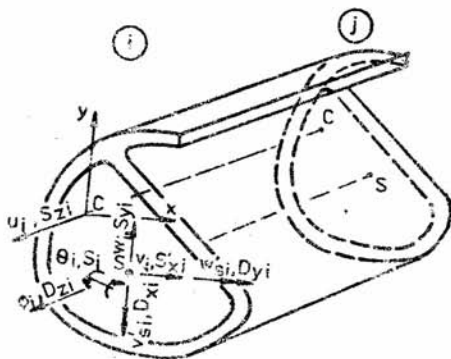
gdzie:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\xi} &= \{\phi_i, \theta_i, \phi_j, \theta_j\}^T, \\ A &= \{\sinh z, \cosh z, kz, 1\}^T, \\ B &= k/\mu \cdot \{\cosh z, \sinh z, \mu, 0\}^T. \end{aligned}}$$

$$F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T,$$

a współrzędne wektora \bar{U}_q wynikają z zależności $F = \bar{U}_q \cdot \bar{\xi}$.

Funkcje kształtu przemieszczeń liniowych aproksymowano wielomianami:



Rys. 2.

przeszczenia $u_c(z)$ funkcją liniową, zaś przeszczenia $w_c(z)$ i $v_c(z)$ funkcjami trzeciego stopnia :

$$u_c(z) = C^T \cdot U, \quad w_c(z) = D^T \cdot W, \quad v_c(z) = D^T \cdot V, \quad (12a, b, c)$$

gdzie : $U = \{ u_i, u_j \}^T$, $V = \{ v_i, -v_i', v_j, -v_j' \}^T$, $W = \{ w_i, -w_i', w_j, -w_j' \}^T$,

$C = \{ 1-z/l, z/l \}^T$, $D = \{ 1-3z^2/l^2+2z^3/l^3, -z+2z^2/l-z^3/l^2, 3z^2/l^2-2z^3/l^3, z^2/l-z^3/l^2 \}^T$.

Na rys.2 zilustrowano stopnie swobody końców i oraz j elementu cienkościennego, które zestawiono w wektory U , V , W (12) oraz wektor $\bar{\Phi}$ (11).

6. Macierz sztywności elementu cienkościennego o przekroju zamkniętym

Równanie równowagi cienkościennego elementu skończonego można sformułować w postaci

$$K \cdot q = S, \quad (13)$$

gdzie K jest macierzą sztywności zawierającą część liniową i geometryczną, q jest wektorem przeszczeń węzłowych, S wektorem sił węzłowych. Równanie (13) można rozpisać następująco:

$$\begin{array}{|c|} \hline S_z \\ \hline S_y \\ \hline S_x \\ \hline H \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline K_{11}^o & & & \\ \hline 0 & K_{22}^o + K_{22}^g & & \\ \hline 0 & 0 & K_{33}^o + K_{33}^g & \\ \hline 0 & K_{42}^g & K_{43}^g & K_{44}^o + K_{44}^g \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U \\ \hline V \\ \hline W \\ \hline \bar{\Phi} \\ \hline \end{array} \quad (14)$$

gdzie : $S_z = \{ S_{zi}, S_{zj} \}^T$, $S_y = \{ S_{yi}, D_{yi}, S_{yj}, D_{yj} \}^T$, $S_x = \{ S_{xi}, D_{xi}, S_{xj}, D_{xj} \}^T$,

$$H = \{ D_{zi}, B_i, D_{zj}, B_j \}^T.$$

Podmacierze macierzy K opatrzone górnym indeksem "o", gdy nie zależą od sił przekrojowych (macierze sztywności liniowej). Natomiast górny indeks "g" oznacza zależność od sił przekrojowych (macierz geometryczna).

Macierz sztywności wyprowadzono przy uwzględnieniu wyrażeń (7) oraz (8) a także funkcji kształtu (11), (12). Przy wyprowadzeniu wzorów na macierz geometryczną przyjęto, że siła osiowa N jest stała, a momenty zginające M_x , M_y i bimoment B zmieniają się liniowo wzdłuż długości elementu. Podmacierze macierzy K można zapisać w postaci :

$$K_{11}^o = EA \cdot K_7, \quad K_{22}^o = EJ_y \cdot K_5, \quad K_{33}^o = EJ_x \cdot K_5, \quad (15a, b, c)$$

$$K_{44}^o = EJ_{\omega\omega} T_q^T K_1 T_q + T_q^T \left[\frac{\mu}{1-\mu} GJ (K_2 - K_4 - K_4^T) + \frac{1}{1-\mu} GJ K_3 \right] \quad (15d)$$

$$K_{44}^C = T_q^T \left[N r_s^2 K_s + (M_{xi} \beta_x + M_{yi} \beta_y + B_{\omega i} \beta_\omega) (K_s - K_8) + (M_{xj} \beta_x + M_{yj} \beta_y + B_{\omega j} \beta_\omega) K_8 \right] T_q, \quad (15e)$$

$$K_{22}^0 = N K_s, \quad K_{42}^0 = N y_s \cdot K_p + T_q^T \cdot \left[M_{xi} \cdot (K_{10} - K_{11}) + M_{xj} \cdot K_{11} \right] \quad (15f, g)$$

$$K_{99}^0 = N K_s, \quad K_{49}^0 = -N x_s \cdot K_p - T_q^T \cdot \left[M_{yi} \cdot (K_{10} - K_{11}) + M_{yj} \cdot K_{11} \right] \quad (15h, i)$$

gdzie: $K_1 = \int B^T B' dz$, $K_2 = \int B B' dz$, $K_3 = \int A^T A' dz$, $K_4 = \int B A^T dz$,

$$K_5 = \int D^T D' dz, \quad K_6 = \int D' D^T dz, \quad K_7 = \int C^T C' dz, \quad K_8 = \int z/l A^T A' dz,$$

$$K_p = \int A^T D' dz, \quad K_{10} = \int A D' dz, \quad K_{11} = \int z/l A D' dz.$$

Macierze pomocnicze K_1 do K_{11} oraz T_q można uzyskać w postaci jawnej.

Siły węzłowe S_L od obciążeń skupionych przyłożonych w węzle o numerze L i punkcie przekroju P o współrzędnych (x_p, y_p, ω_p) wynoszą

$$F_L = \{ F_{zL}, F_{xL}, M_{yL} + x_p F_{zL}, F_{yL}, M_{xL} + y_p F_{zL}, M_{zL} - (y_p - y_s) F_{xL} + (x_p - x_s) F_{yL}, B_{\omega L} + \omega_p F_{zL} \}^T.$$

Dodatkowe podmacierze macierzy geometrycznej wynikające z przyłożenia obciążenia rozłożonego lub skupionego poza linią środków zginania przekrojów elementu można wyprowadzić również z równania (6). Podmacierze te należy dodać do tych wyrazów na głównej przekątnej macierzy sztywności, które odpowiadają stopniom swobody skręcania.

7. Uwagi i wnioski

Zadanie wariacyjne dla pręta cienkościennego o przekroju zamkniętym można sformułować, przy uwzględnieniu wpływu momentu giętno-skrętnego na odkształcenia, w sposób pokazany w niniejszej pracy.

Funkcje kształtu dla nieswobodnego skręcania elementu cienkościennego można przyjąć z rozwiązania układu równań różniczkowych Eulera-Lagrange'a, wynikających z zasady prac przygotowanych. Takie ujęcie pozwala uzyskać macierz sztywności w postaci jawnej.

Analizę dokładności uzyskiwanych rozwiązań należy przeprowadzić przy najmniej w dwóch kierunkach: 1) dokładności proponowanej aproksymacji funkcji kształtu dla skręcania, 2) wpływu momentu giętno-skrętnego na odkształcenia prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym. W pierwszym przypadku rozwiązania można porównać z rozwiązaniami podanymi przez Chen-Hu [9] (1988), uzyskanymi dla problemów statyki przy aproksymacji funkcji kształtu skręcania wielomianami. Natomiast w drugim przypadku rozwiązania można porównać z analizą Nishino i in. [12] (1985), przeprowadzoną dla problemów stateczności początkowej.

Wykaz literatury

A Książki

1. Vlasov W.S.: *Dünnwandige Elastische Stäbe, Band 1 und 2*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964.
2. Kolbrunner C.I., Hajdin N.: *Dünnwandige Stäbe, Band 1, 2*, Springer-Verlag, Berlin 1972, 1975.
3. Kolbrunner C.I., Basler K.: *Torsion in Structures - An Engineering Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
4. Washizu K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1982.

B Artykuły

5. Krajcinovic D.: A consistent discrete element technique for thin-walled assemblages, *Int. J. Solid Struct.*, 5, 1969, s. 639-662.
6. Kawai T.: The application of finite element methods to ship structures, *Comput. Structures*, 3, 1973, s. 1175-1194.
7. Gunnaugsson G.A., Pedersen P.T.: A finite element formulation for beams with thin-walled cross-sections, *Comput. Structures*, 15, 1982, s. 691-699.
8. Waldron P.: Equivalent beam analysis of thin-walled beam structures, *Comput. Structures*, 26, 1987, s. 609-620.
9. Chen H., Hu Y.: The torsional stiffness matrix of a thin-walled beam and its application to beams under combined loading, *Comput. Structures*, 28, 1988, s. 421-431.
10. Waldron P.: Sektorial properties of straight thin-walled beams, *Comput. Structures*, 24, 1986, s. 147-156.
11. Yoo C.H., Acra S.V.: Cross-sectional properties of thin walled multi-cellular section, *Comput. Structures*, 22, 1986, s. 53-61.
12. Hasegawa A., Liyanage K., Ikeda T., Nishino F.: A concise and explicit formulation of out-of-plane instability of thin-walled members *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Proc. JSCE, 2, 1985, No.1, s. 81-89.

ACCURATE FINITE ELEMENT OF THIN-WALLED BAR OF CLOSED CROSS-SECTION
IN STATIC AND STABILITY PROBLEMS

Summary

A variational problem for a closed cross-section thin-walled bar is formulated, taking into account the effect of the secondary shear stress under the condition of restrained torsion. The shape function of warping torsion thin-walled bar is obtained from the solution of the Euler-Lagrange differential equations. These equations are written on the basis of the virtual displacement principle. The formulas for the stiffness and geometric matrix are presented. Components of the these matrix would be obtain in the explicit form is possible to obtain.