



# IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice

Kraków - Rytró, maj 1989



Roman Bijak, Leszek Chodor  
Politechnika Świętokrzyska, Kielce

## ALGORYTM OBLICZANIA SKRĘTNYCH CHARAKTERYSTYK WIELOKOMOROWYCH PRZEKROJÓW CIENKOŚCIENNYCH.

### 1. Wprowadzenie

Z analizy praktyki projektowej wynika, że złożone rachunki przy obliczaniu charakterystyk geometrycznych przekrojów cienkościennych są jednym z głównych powodów stosowania przybliżonej analizy statycznej. Pręty cienkościenne traktowane są jak pręty o zwartym przekroju nawet przy ewidentnym skręcaniu skrępowanym. Dlatego komputerowe algorytmy obliczania charakterystyk skrętnych przekrojów cienkościennych oraz naprężeń dla znanych sił przekrojowych są nie mniej ważne od algorytmów szacowania tych sił.

Sz szczególnie uciążliwe są obliczenia charakterystyk geometrycznych przekrojów wielokomorowych. Wybrane problemy dotyczące tego zagadnienia omówiono w pracach [1,2,3].

Paz, Patrick i Schrader [1] (1976) przedstawili program komputerowy do obliczania środka zginania dla cienkościennych przekrojów zamkniętych.

Yoo i Acra [2] (1986) opisali numeryczną procedurę programu SECP do obliczania charakterystyk geometrycznych prętów o przekroju zamkniętym i otwartym złożonych z odcinków blach o stałej grubości. Dla tych przypadków podali formuły numerycznego całkowania.

Waldron [3] (1986) przedstawił algorytm programu SECTOR i przykłady obliczeń wycinkowych charakterystyk wielokomorowych przekrojów cienkościennych. Program nie jest dostosowany do obliczania promieni asymetrii przekrojów.

W niniejszej pracy przedstawiono algorytm obliczania charakterystyk geometrycznych wielokomorowych przekrojów cienkościennych i naprężeń dla znanych sił przekrojowych. Procedury dostosowano do szacowania ramion asymetrii potrzebnych w obliczeniach stateczności prętów cienkościennych [4].

Usystematyzowano podstawy teoretyczne, dotyczące obliczania charakterystyk geometrycznych przekrojów wielokomorowych i przedstawiono je w zwartej postaci dostosowanej do obliczeń numerycznych. Zaproponowano metodę sprowadzonych grubości ścianek, pozwalającą uzyskać charakterystyki geometryczne przekrojów wielokomorowych z wyrażeń znanych dla przekrojów jednokomorowych.

Program komputerowy opracowano dla przekrojów mieszanych ( otwarto-zamkniętych ) złożonych z odcinków o zmiennej liniowo grubości. Dla tych przypadków podano formuły numerycznego całkowania.

## 2. Moment bezwładności czystego skręcania przekroju wielokomorowego

W przekroju otwarto-zamkniętym wydzielimy część zamkniętą o momencie bezwładności czystego skręcania  $J_c$  oraz część otwartą o momencie  $J_o$ .

$$J = J_c + J_o \quad (1)$$

$$\text{gdzie:} \quad J_c = \sum \bar{q}_i \Omega_i, \quad J_o = \sum \int t^3/3 \, ds. \quad (2a,b)$$

We wzorze (2a) suma rozciąga się na wszystkie komory zamknięte (i), a we wzorze (2b) na wszystkie elementy otwartej części przekroju. Wprowadzono następujące oznaczenia (rys. 1 i 2):  $\Omega_i$  - podwojone pole powierzchni zawarte między liniami środkowymi (i)-tej komory przekroju;  $t$  - grubość ścianki profilu;  $\bar{q}_i = q_i/(G\phi')$  - względny strumień naprężeń stycznych,  $q_i = \tau t$  - strumień naprężeń stycznych Bredta  $\tau$ ,  $\phi'$  - jednostkowy kąt skręcania przekroju,  $G$  - moduł Kirchoffa.

Względne strumienie naprężeń stycznych  $\bar{q}_i$  przypisane do komory zamkniętej (i) można wyznaczyć z układu równań

$$A\bar{Q} - B = 0, \quad (3)$$

gdzie:  $\bar{Q} = [\bar{q}_i]$ ,  $B = [\Omega_i]$ . Współczynniki macierzy  $A = [a_{ik}]$  są równe:

$$a_{ii} = \oint_{(i)} \frac{ds}{t}, \quad a_{ik} = - \int_{ik} \frac{ds}{t}. \quad (4a,b)$$

Całkowanie współczynników  $a_{ik}$  (4b) przebiega po ściankach wspólnych dla komór (i),(k). Współczynnik  $a_{ik} = 0$ , gdy komory (i),(k) nie mają ścianek wspólnych.

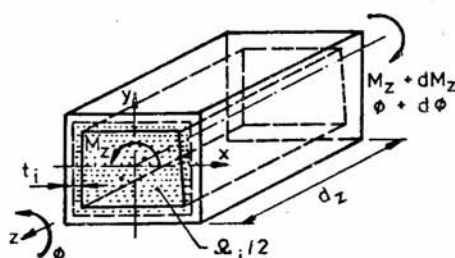
We wzorach (1) oraz (2a,b) wykorzystano zasadę addytywności momentów bezwładności czystego skręcania. Moment bezwładności  $J$  przekroju złożonego z  $n$  elementów można składać ze sztywności  $J_j$  poszczególnych ele-

mentów według wzoru:

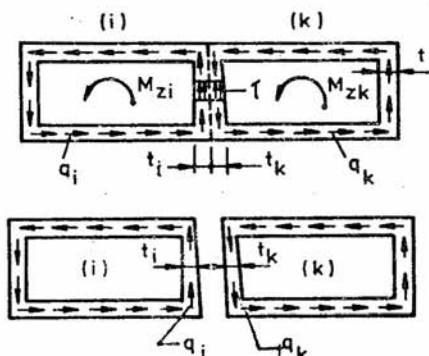
$$J \left( \frac{d\phi}{dz} \right) = \sum_{j=1}^n J_j \left( \frac{d\phi}{dz} \right) \quad (A)$$

wynikającego z następujących założeń: 1) jednostkowy kąt skręcenia  $\phi'$  każdego elementu składowego jest jednakowy, 2) suma momentów skręcających  $M_{zj}$  poszczególnych elementy przekroju jest równa momentowi  $M_z$  skręcającemu cały przekrój.

Pokażemy, że równania (2a) i (3) na moment bezwładności czystego skręcenia przekroju zawierającego komory o wspólnych ściankach można w prosty sposób wyprowadzić z zależności znanych dla przekroju jednokomorowego, przy wykorzystaniu koncepcji sprowadzonych grubości ścianek.



Rys. 1.



Rys. 2

Przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń  $\tau$  na grubości ścianek przekroju jednokomorowego [3] (rys.1). mamy

$$\phi' = \frac{1}{G\Omega_i} \oint_{(i)} \frac{q_i}{t_i} ds, \quad (\text{prawo fizyczne}) \quad (B)$$

$$M_{zi} = \Omega_i q_i \quad (\text{równanie równowagi}) \quad (C)$$

W celu sformułowania związku między jednostkowym kątem skręcenia  $\phi'$  a strumieniem naprężeń przypisanym do komory (i) przekroju wielokomorowego (rys.2) nadamy specyficzny sens grubości ścianki  $t_i$  we wzorze (2). Przyjmijmy, że we wszystkich ściankach komory (i) działa stały strumień naprężeń stycznych, który w ściance wspólnej z komorą (k) przenoszony jest tylko przez część jej grubości. Z równowagi sił w ściankach wspólnych mamy:  $\tau t_i = q_i$ ,  $-\tau t_k = q_k$ ,  $t = t_i + t_k$ . Sprowadzona grubość ścianki wynosi więc

$$t_i = t q_i / (q_i - q_k). \quad (D)$$

Po podstawieniu zależności (D) do (B) otrzymujemy dla komory (i)

$$q_i \oint_{(i)} \frac{ds}{t_i} - \sum_{ik} q_k \int \frac{ds}{t_k} = \phi' G \Omega_i, \quad (E)$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie ścianki komory (i) wspólne z komorami (k). Równania (E) zapisane dla wszystkich komór przekroju dają układ równań (3).

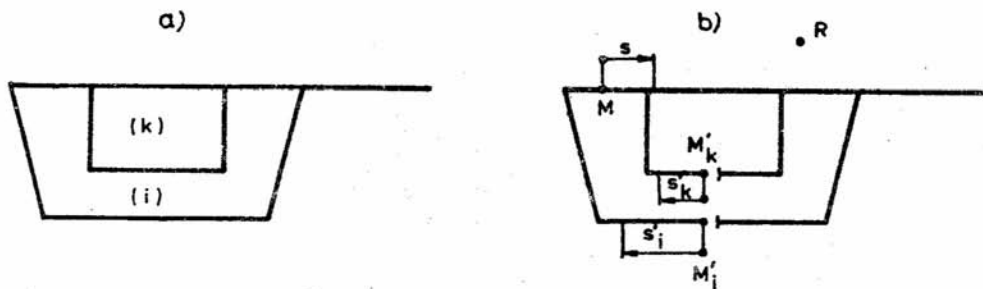
## 3. Giętno-skrętne charakterystyki przekroju wielokomorowego

Współrzędne wycinkowe przekroju zamknięto-otwartego liczone od punktu początkowego M względem bieguna R obliczymy z zależności:

$$\omega' = \omega'_o + \omega'_c. \quad (5)$$

Współrzędne wycinkowe  $\omega'_o$ , odpowiadają profilowi otwartemu powstałemu przez rozcięcie wszystkich komór zamkniętych. Zastępczy przekrój otwarty będziemy dalej nazywać przekrojem podstawowym. Na rys. 3a pokazano przekrój dwukomorowy, a na rys 3b odpowiadający mu jeden z przekrojów podstawowych. Na płaszczyźnie przekroju podstawowego obieramy dowolny biegun R, a na linii środkowej punkt początkowy M. Współrzędna wycinkowa  $\omega'_o$  jest podwojonym polem zakreślonym przez promień wodzący  $h_R^M$  punktów na linii środkowej

$$\omega'_o = 2 \int_M^o h_R^M ds \quad (6)$$



Rys. 3

Współrzędne wycinkowe  $\omega'_c$  obliczamy indywidualnie dla każdej komory (i) ze wzoru:

$$\omega'_c = - \int_{M'}^{s'} \frac{\Delta \bar{q}_i}{t} ds, \quad (7)$$

gdzie punkt początkowy całkowania  $M'$  jest punktem rozcięcia komory (i), a  $s'$  bieżąca współrzędna zaczepiona w tym punkcie. Różnica względnych strumieni naprężeń stycznych  $\Delta \bar{q}_i = \bar{q}_i - \bar{q}_k$ , gdzie  $\bar{q}_i$  i  $\bar{q}_k$  obliczono wcześniej z równania (3) dla komory (i) oraz przyległej do niej komory (k). Dla tych ścianek komory (i), które nie są wspólne z innymi komorami  $\Delta \bar{q}_i = \bar{q}_i$ . Dla części otwartych przekroju  $\omega'_c = 0$ .

Ponieważ w literaturze (np [2,3]) podawane są inne wyrażenia na współrzędną  $\omega'$ , więc pokażemy tok rozumowania uzasadniający formułę (7). Różnice polegają w istocie na stosowaniu w tych pracach we wzorze (7) w odniesieniu do ścianek wspólnych, również względnego strumienia naprężeń zamiast różnicy strumieni.

Współrzędną wycinkową  $\omega$  można zdefiniować formułą:  $\omega = -\omega\phi' + u^{\sim}$ , gdzie  $u^{\sim}$  jest stałym przemieszczeniem punktów na linii środkowej wzdłuż osi

pręta  $u$ , natomiast  $\phi$  jest kątem skręcenia. Odształcenie styczne w przekroju jednokomorowym wynosi:  $\gamma = \partial \xi / \partial z + \partial u / \partial s$  (rys.1) i jest równe  $\tau/G$ . Ponieważ przemieszczenie w kierunku stycznym do konturu  $\xi = \phi h$ , to z przedstawionych równań wynika, że w przekroju jednokomorowym

$$\omega = \omega_0 - \int \bar{q}_i / t_i ds, \quad (F)$$

gdzie  $\bar{q}_i = \psi$  (funkcja skręcania) według oznaczeń z pracy [4].

Wykorzystując koncepcję sprowadzonych grubości ścianek (3) z zależności (F) otrzymujemy po przekształceniach wzór (7).

W celu uzyskania prostych zależności na naprężenia w przekroju cienkościennym sprowadza się współrzędne wycinkowe  $\omega'$  liczone w układzie (R,M) do głównych współrzędnych wycinkowych  $\omega$  liczonych w układzie (Z,G) = (środek zginania, główny punkt początkowy). Transformację wycinkowych współrzędnych przeprowadza się podobnie jak w cienkościennych przekrojach otwartych.

W układzie głównym oblicza się giętno-skrętny wycinkowy moment bezwładności  $J_\omega$ , kierunkowy moment bezwładności  $J_k$  oraz współczynnik spaczenia  $\mu$ :

$$J_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \oint \omega^2 t ds, \quad J_k = \oint h^2 ds, \quad \mu = 1 - J/J_k \quad (8a,b,c)$$

a także promień asymetrii  $\beta_\omega$  stosowany w analizie stateczności [4]

$$\beta_\omega = 1/J_\omega \cdot \oint \omega (x^2 + y^2) t ds. \quad (9)$$

Charakterystyki giętne przekroju wielokomorowego: położenie środka ciężkości C, momenty bezwładności  $J_x, J_y$  i promienie asymetrii  $\beta_x, \beta_y$ , oblicza się również w sposób stosowany w cienkościennych przekrojach otwartych.

#### 4. Momenty statyczne odciętych części przekroju

Momenty statyczne  $S_\omega, S_x, S_y$  odciętych części przekroju wielokomorowego obliczymy z zależności

$$S_\bullet = S_{\bullet,o} + S_{\bullet,c}, \quad (\bullet = \omega, x, y). \quad (10)$$

Momenty statyczne:

$$S_{\omega,o} = \int_o \omega t ds, \quad S_{x,o} = \int_o y t ds, \quad S_{y,o} = \int_o x t ds, \quad (11a,b,c)$$

odpowiadają otwartemu profilowi podstawowemu, uzyskanemu w sposób opisany w p.3.

Momenty statyczne  $S_{\omega,c}, S_{x,c}, S_{y,c}$  obliczymy z zależności:

$$S_{\bullet,c} = q_i^* J_{\bullet}, \quad (\bullet = \omega, x, y) \quad (12)$$

Strumienie naprężeń stycznych  $q_i^*$  należy wyznaczać odrębnie dla każdego z momentów statycznych z równania

$$A^* X^* + B^* = 0. \quad (13)$$

Wektor niewiadomych  $\{X^* = [x_i]; x_i = q_i^*$  dla  $i=(1+n)$ ,  $x_{n+1} = \phi'\}$ , gdzie  $n$  jest liczbą komór przekroju.

Wektor wyrazów wolnych  $\{B^* = [b_i]; b_i = \int \frac{q_0}{t} ds$  dla  $i=(1+n)$ ,  $b_{n+1} = \int q_0 h ds\}$ .

Macierz  $A^* = [a_{ik}^*]$  ma następujące współczynniki:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} = \int \frac{ds}{t} \quad , \quad a_{ik} = - \int \frac{ds}{t} \quad , \quad a_{n+1,k} = \Omega_k \quad , \quad a_{n+1,n+1} = -\Omega_k \cdot G \\ a_{n+1,n+1} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{dla } i,k = (1+n).$$

Pokażemy tok rozumowania uzasadniający formuły (12), (13), (14).

Związek fizyczny (B) jest słuszny również w przypadku działania naprężeń stycznych  $\tau$ , wywołanych momentem giętno-skrętnym  $M_\omega$  lub siłą poprzeczną  $Q_x$ , lub  $Q_y$ . W ściance przekroju jednokomorowego naprężenia te można złożyć z naprężeń  $\tau_0$  wyznaczonych w przekroju podstawowym oraz dodatkowych naprężeń  $\tau^*$  wynikających z zamknięcia komory

$$\tau = \tau_0 + \tau^*, \quad (G)$$

gdzie:  $\tau^* = F \cdot S_{\phi,c} / (J_\phi t_i)$ ,  $\tau_0 = F \cdot S_{\phi,o} / (J_\phi t)$ , ( $\phi = \omega, x, y$ ;  $F = M_\omega, S_y, S_x$ ).

Wykorzystując koncepcję sprowadzonych grubości ścianek (D) związek (B) przyjmie dla komory (i) przekroju wielokomorowego następującą postać

$$q_i^* \int \frac{ds}{t} - \sum_{ik} q_k^* \int \frac{ds}{t} + \int \frac{q_0}{t} ds = \phi' G \Omega_i \quad (H)$$

gdzie  $q_i^* = \tau_i^* t_i$ ,  $q_0 = \tau_0 t$ .

Ponieważ moment skręcający względem środka zginania od naprężeń  $\tau$  zsumowany po wszystkich ściankach profilu jest zerowy, to

$$\sum q_i^* \Omega_i + \int q_0 h ds = 0. \quad (J)$$

Równania (H), (J) po przekształceniach dają (12), (13) i (14). Wielkościami wyznaczanymi z rozwiązania układu równań (13) są strumienie naprężeń stycznych  $q^*$  oraz jednostkowy kąt skręcenia  $\phi'$  z założenia jednakowy dla wszystkich komór. Niewiadome wyznaczane są dla jednostkowych sił przekrojowych  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_\omega$ .

## 5. Wyznaczanie naprężeń w przekroju wielokomorowym

Naprężenia normalne  $\sigma$  oraz styczne  $\tau$  w przekroju wielokomorowym oblicza się ze wzorów:

$$\sigma(s) = N/A + M_y x(s)/J_y + M_x y(s)/J_x + B \cdot \omega(s)/J_\omega, \quad (15)$$

$$\tau(s) = M_\omega S_\omega(s)/(J_\omega t(s)) + Q_y S_x(s)/(J_x t(s)) + Q_x S_y(s)/(J_y t(s)) + \tau_0(s), \quad (16)$$

gdzie:  $N$  - siła osiowa;  $M_x$ ,  $M_y$  - momenty zginające względem osi głównych

$x$  i  $y$  przekroju;  $B$  - bimoment;  $M_\omega$  - moment giętno-skrętny;  $Q_x$ ,  $Q_y$  - siły poprzeczne,  $M_z$  - moment czystego skręcania.

Naprężenia styczne czystego skręcania  $\tau_s$  w przekroju otwarto-zamkniętym wynoszą:

$$\text{- w ściankach części otwartej} \quad \max \tau_s(s) = M_z \cdot t / J, \quad (17)$$

$$\text{- w ściankach części zamkniętej} \quad \tau_s(s) = (\bar{q}_i - \bar{q}_k) \cdot M_z / (J t), \quad (18)$$

gdzie  $\bar{q}_i$ ,  $\bar{q}_k$  wyznaczoną wcześniej z równania (3). Formuła (18) wynika z porównania (D) oraz (A) (przypomnijmy, że  $\bar{q}_i = q_i / G\phi'$ ).

Naprężenia zastępcze w przekroju pręta wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego można obliczać ze wzoru:  $\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \tau^2}$ , gdzie  $\alpha=3+4$ . Ponieważ wyniki badań eksperymentalnych powierzchni płynięcia metali są w zasadzie równo oddalone od krzywej plastyczności Hubera ( $\alpha=3$ ) i krzywej Treski ( $\alpha=4$ ), to wybór współczynnika  $\alpha$  powinien wynikać ze stopnia zagrożenia konstrukcji oraz zasobu informacji przy doborze wytrzymałości obliczeniowej materiału.

## 6. Procedury numeryczne.

Program komputerowy do wyznaczania charakterystyk geometrycznych i naprężeń w przekrojach prętów cienkościennych napisano w języku C na mikrokomputer IBM PC. Program opracowano dla przekrojów otwarto-zamkniętych złożonych z prostoliniowych odcinków o zmiennej liniowo grubości.

W algorytmach numerycznych całkowanie zastąpiono ciągiem sum po prostoliniowych elementach przekroju. Dla poszczególnych elementów zastosowano wyrażenia, wynikające z analitycznego całkowania iloczynu kilku (najczęściej trzech) funkcji liniowych. Wybrane formuły dostosowane do analizy numerycznej są następujące:

$$\omega' = \sum_0^n h' L - \sum_0^n \Delta \bar{q}_i \cdot x, \quad \text{gdzie } x = \frac{L}{t} \text{ dla } t_0 = t_1 \text{ lub } x = L \frac{\ln(t_1/t_0)}{t_1 - t_0}$$

$$J_\omega = \sum_0^{n_0} (\omega_0 \cdot \omega_0 \cdot t_0 + 4 \cdot \omega_{sr} \cdot \omega_{sr} \cdot t_{sr} + \omega_1 \cdot \omega_1 \cdot t_1) \cdot \frac{L}{6}$$

$$S_{\omega,0} = \sum_0^{n_0} (\omega_0 \cdot t_0 + 4 \cdot \omega_{sr} \cdot t_{sr} + \omega_1 \cdot t_1) \cdot \frac{L}{6}$$

$$S_\omega = S_{\omega,0} - q_i^* \cdot J_\omega$$

gdzie  $L$  jest długością prostoliniowego odcinka przekroju o grubości  $t_0$  i współrzędnej wycinkowej  $\omega_0$  na początku,  $t_1$  i  $\omega_1$  na końcu oraz  $t_{sr}$  i  $\omega_{sr}$  w środku długości.

## 7. Uwagi i wnioski

Można spodziewać się, że dzięki wykorzystywaniu w praktyce projektowej programów komputerowych do wyznaczania charakterystyk skrajnych przekrojów cienkościennych, pracochłonność obliczeń nie będzie decydowała o doborze przekrojów elementów.

Charakterystyki geometryczne cienkościennych prętów o przekroju wielokomorowym a także naprężenia w tych przekrojach można wyznaczać w sposób pokazany w niniejszej pracy.

Zamieszczone w pracy sformułowanie macierzowe równań do wyznaczania charakterystyk geometrycznych przekrojów wielokomorowych jest szczególnie przydatne w obliczeniach numerycznych.

Dzięki koncepcji sprowadzonych grubości ścianek, w przejrzysty sposób można uzyskać formuły na charakterystyki geometryczne przekrojów wielokomorowych z wyrażeń znanych dla jednokomorowych przekrojów zamkniętych.

## Wykaz literatury

1. Paz M., Patrick C., Schrader P.: Computer determination of the shear center of open and closed sections, *Comput. Structures*, 6, 1976, s. 117-125.
2. Waldron P.: Sectorial properties of straight thin-walled beams, *Comput. Structures*, 24, 1986, s. 147-156.
3. Yoo C.H., Acra S.V.: Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section, *Comput. Structures*, 22, 1986, s. 53-61.
4. Bijak R., Chodor L.: Ścisły element skończony pręta o przekroju zamkniętym w zagadnieniach statyki i stateczności, *Materiały Konf. Nauk.: Metody Komputerowe w Mechanice*, Ryto 1989 ( tym zeszycie ).

METHOD OF THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES DETERMINATION  
OF THIN-WALLED MULTI-CELLULAR SECTION

## Summary

The algorithm for determination torsional and flexural properties, and stress for the known cross-section forces, for the thin-walled multi-cellular cross-section is presented. Solid form of theoretic bases for evaluation cross-sectional properties is given. This form is especially useful for numerical procedures. The method of the reduced wall thickness is proposed. This one is applied to determination cross-sectional properties of multi-cellular cross-section exploring formulas for single-cellular cross-section. The program for analysis any cross-section with open or closed parts assembled by straight elements with linear variable thickness is described.