**ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚWIĘTOKRZYSKIEJ**
**BUDOWNICTWO 14** **KIELCE 1983**

Leszek CHODOR
Politechnika Świętokrzyska
Stefan PIECHNIK
Politechnika Krakowska

# UJĘCIE MACIERZOWE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

## 1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono podstawowe równania kontynualnej teorii sprężystości w ujęciu macierzowym. Przez teorię kontynualną rozumie się naukę ustalającą prawa mechaniczne, rządzące ciałem zajmującym obszar wypełniony ciągle materią /continuum materialnym/.

Równania mechaniki ciała stałego powszechnie zapisywane są w konwencji tensorowej [1,2,3]. Zapis macierzowy staje się praktyczny przy numerycznej analizie, związanej z dyskretnym podziałem obszaru ciała na pewne podobszary /metoda elementów skończonych/ lub dyskretyzacją równań rządzących tym ciałem /metoda różnic skończonych/. W niniejszej pracy zaproponowano formalny sposób ujęcia układów równań różniczkowych teorii sprężystości w równania macierzowe. Ograniczono się do zagadnięć statycznych. Podobne przedstawienie równań całkowych teorii sprężystości oraz zagadnień dynamicznych nie powoduje większych trudności.

Przyjęto następujące oznaczenia (jak w pracy [4]):

jednokolumnową macierz /wektory/ oznaczono za pomocą klamrowych nawiasów

$$\{a\} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$$

macierz, mającą więcej niż jedną kolumnę i więcej niż jeden wiersz /niekoniecznie kwadratową/ za pomocą nawiasów kwadratowych

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12}, & \ldots, & \varphi_{1n} \\ \vdots & & & \\ \varphi_{m1}, & \varphi_{m2}, & \ldots, & \varphi_{mn} \end{pmatrix}^T$$

Symbol T oznacza operator transpozycji macierzy. W ten sposób odróżniono jedno- i wielokolumnową macierz, co wprowadza pewną jasność przy odczytywaniu zapisu.

Rozważane ciało zanurzone jest w 3 wymiarowej przestrzeni euklidesowej, z bazą w kartezjańskim układzie współrzędnych $x_1$, $x_2$, $x_3$. Symbolem $\partial_i$ oznaczono operator różniczkowania po zmiennej $x_i$ : $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$.

## 2. Zagadnienia brzegowe teorii sprężystości

### 2.1. Statyczne i kinematyczne warunki brzegowe

Niech M będzie punktem w obszerze $V$ zajętym przez ciało i $\vartheta$ ciągłą powierzchnią przechodzącą przez M i rozdzielającą $V$ na części $V_1$ i $V_2$. Można pokazać, że /przy niektórych założeniach tzn. pominięciu działających na $\vartheta$ rozłożonych par /działanie $V_2$ na $V_1$ charakteryzuje się gęstością sił $\{p/r,n/\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$, przy czym wektor $\{p\}$ zależy od wektora wodzącego $r$ punktu M i wektora normalnej zewnętrznej $\{n\} = \{n_1, n_2, n_3\}^T$ zgodnie z zależnością

$$[S]\{\sigma\} - \{p\} = 0 \tag{1}$$

gdzie: $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T$ jest wektorem naprężeń /tutaj współrzędne macierzy naprężeń zapisano w postaci wektora o ilości $M = (n/n+1/ : 2)$ elementów, n- wymiar przestrzeni/,

$$[S] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli powierzchnia $\vartheta$ staje się powierzchnią $\Sigma$ ograniczającą ciało o objętości V, to równanie (1) stanowi zapis statycznych warunków brzegowych, gdzie $\{p\}$ jest gęstością powierzchniowego obciążenia ciała na $\Sigma_p$ /część powierzchni $\Sigma$ na której zadane są statyczne warunki brzegowe/. ■

Kinematyczne warunki brzegowe zadane są na części powierzchni zewnętrznej ciała $\Sigma_u$ $(\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_p)$, jeśli

$$\{u\}\Big|_{\Sigma_u} = \{u^0\}, \tag{2}$$

gdzie: $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}$ jest wektorem przemieszczeń, natomiast $\{u^0\}$ jest daną wartością tego wektora dla określonego punktu $\Sigma_u$. ■

## 2.2. Równania Naviera i Cauchy'ego

Dla quasistatycznych zadań równanie równowagi Naviera [1] można przedstawić w postaci:

$$[H]\{\sigma\} + \varrho\{X\} = 0 \tag{3}$$

gdzie $[H]$ jest operatorem różniczkowym, $\{X\}$ wektorem sił masowych:

$$[H] = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix},$$

natomiast $\varrho$ gęstością ciała /dla małych przemieszczeń $\varrho = \varrho_0$, przy czym zwykle zakłada się $\varrho_0 \equiv 1$, przyjmując że w nieodkształconym ciele materiał ma stałą gęstość/.

Wektor naprężenia $\{\sigma\}$ można rozłożyć na dewiator $\{\sigma_D\}$ i aksjator $\{\sigma_A\}$:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_D\} + \{\sigma_A\},$$

gdzie: $\{\sigma_D\} = \{\sigma_{11} - \sigma_m, \sigma_{22} - \sigma_m, \sigma_{33} - \sigma_m, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T$,

$\{\sigma_A\} = \{\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m, 0, 0, 0\}^T$,

$3\sigma_m = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$. ■

Gradient wektora przemieszczeń można rozłożyć na tensor obrotu i tensor małych deformacji. Tensor małych odkształceń przedstawmy w postaci wektora odkształceń $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}\}^T$. Wówczas równanie Cauchy'ego można wyrazić zależnością:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\}, \tag{4}$$

gdzie: $[D] = [H]^T$, natomiast $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ jest wektorem przemieszczeń.

Wektor $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}\}$ rozłóżmy na dewiator $\{\varepsilon_D\}$ i aksjator $\{\varepsilon_A\}$:

$$\{\hat{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_D\} + \{\varepsilon_A\} ,$$

gdzie: $\{\varepsilon_D\} = \{\varepsilon_{11}-\varepsilon_m , \varepsilon_{22}-\varepsilon_m , \varepsilon_{33}-\varepsilon_m , \varepsilon_{12} , \varepsilon_{23} , \varepsilon_{31}\}^T ,$

$$\{\varepsilon_A\} = \{\varepsilon_m , \varepsilon_m , \varepsilon_m , 0 , 0 , 0\}^T ,$$

$$3\varepsilon_m = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} . \blacksquare$$

### 2.3. Związki konstytutywne

Jeśli rozpatrywać izotermiczne procesy, to można przyjąć, że $\{\sigma\}$ jest operatorem $\{\varepsilon\}$ /lub procesu odkształceń/ [2] :

$$\{\sigma\} = \mathcal{F}\{\varepsilon\} , \tag{5}$$

gdzie: $\mathcal{F}$ jest pewnym operatorem.

W przypadku procesu izotropowego, jednorodnego, odwracalnego i liniowego zachodzą zależności:

$$\{\sigma_A\} = 3K\{\varepsilon_A\} \qquad \text{/prawo zmiany objętości/,} \tag{6}$$

$$\{\sigma_D\} = 2G\{\varepsilon_D\} \qquad \text{/prawo zmiany postaci/,} \tag{7}$$

gdzie: $G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ i $3K = \frac{E}{1-2\nu}$ są stałymi materiałowymi, ($E$, $\nu$ - moduł Younga i współczynnik Poissona).

Prawo Hooke'a można również przedstawić w postaci [2] :

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} , \tag{8}$$

gdzie: $[E] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$

$\lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$ , $\mu = G$ - współczynniki Lamego. $\blacksquare$

## 2.4. Sformułowanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości /ZBTS/

Równania (3), (4) oraz (8) wraz ze statycznymi (1) i kinematycznymi (2) warunkami brzegowymi stanowią zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości.
Można udowodnić, że istnieją jednoznacznie określone wektory $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ i $\{u\}$ spełniające te równania.

# 3. Metody rozwiązywania ZBTS

## 3.1. Rozwiązanie w przemieszczeniach lub naprężeniach

Równania ZBTS można sprowadzić do postaci w której niewiadomą będzie tylko wektor przemieszczeń $\{u\}$. Zależności te, zwane równaniami Lamego, otrzymuje się podstawiając (8) do (3) i korzystając z (4). Dla $\varrho_0 = 1$ mamy:

$$[L]\{u\} + \{X\} = 0 \tag{9}$$

gdzie: $$[L] = [H][\dot{E}][D] = (\lambda+\mu)\begin{bmatrix} \partial_1^2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_3 \\ \partial_2\partial_1 & \partial_2^2 & \partial_2\partial_3 \\ \partial_3\partial_1 & \partial_3\partial_2 & \partial_3^2 \end{bmatrix} + \mu\nabla^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($\nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ - jest operatorem Laplace'a).

Jeśli statyczne (1) i kinematyczne (2) warunki brzegowe wyrazimy przez przemieszczenia:

$$\{u\}\Big|_{\Sigma_u} = \{u^\circ\} \quad , \quad [S]\left\{\mathcal{F}([D]\{u\})\right\}\Big|_{\Sigma_p} = \{p\} \, , \tag{9a}$$

to równania (9) wraz z (9a) stanowią sformułowanie ZBTS w przemieszczeniach.

Dla ZBTS w naprężeniach, tj., gdy w (2) przemieszczenia wyrażone są przez naprężenia $\{u(\{\sigma\})\}$ można zredukować równania (3), (4) i (8) do postaci zawierającej tylko nieznany wektor $\{\sigma\}$ /równania Beltramiego-Michella/. Uzyskuje się to eliminując $\{u\}$ z (4) poprzez mnożenie obu stron tego równania przez pewien operator różniczkowy. Do takiej postaci równania podstawia się (8) i wykorzystując (3) otrzymuje

$$[B_1]\{\sigma\} + [B_2]\{X\} = 0 \, , \qquad (10)$$

gdzie:

$$[B_1] = \nabla^2 \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & 0 & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+\nu} \begin{bmatrix} \partial_1^2 & \partial_1^2 & \partial_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2^2 & \partial_2^2 & \partial_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_3^2 & \partial_3^2 & \partial_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_2 & \partial_1\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_2\partial_3 & \partial_2\partial_3 & \partial_2\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_3\partial_1 & \partial_3\partial_1 & \partial_3\partial_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} 2\partial_1 & 0 & 0 \\ 2\partial_2 & 0 & 0 \\ 2\partial_3 & 0 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-\nu} \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

ZBTS wyrażone równaniem Lamego (9) lub równaniem Baltramiego-Michella (10) można rozwiązać metodą różnic skończonych, metodami iteracyjnymi, w tym szybkobieżną metodą stopniowych przybliżeń czy metodą Monte Carlo.

### 3.2. Metody wariacyjne

Jeśli istnieje potencjał $\Phi$, taki że

$$\{\sigma\} = \mathcal{F}(\{\varepsilon\}) = \frac{\partial \Phi}{\partial\{\varepsilon\}} \, , \qquad (11)$$

to rozwiązanie ZBTS w przemieszczeniach sprowadza się do określenia punktów stacjonarności funkcjonału Lagrange'a $\Pi$

$$\delta\Pi = \delta(W_p - L) = 0 \, , \qquad (12)$$

gdzie: $W_p = \int_V \Phi(\{u\})\, dV$ – praca sił wewnętrznych

$L = \int_V \varrho\{X\}^T\{u\}dV + \int_\Sigma \{p\}^T\{u\}d\Sigma$ – praca sił zewnętrznych

Jeśli operator $\mathcal{F}^{-1}(\{\sigma\})^P (=\{\varepsilon\})$ jest potencjalny, to rozwiązanie ZBTS w naprężeniach uzyskać można przez poszukiwanie takich $\{\sigma\}$, na których realizuje się minimum funkcjonału Castigliano $\Pi^*$

$$\delta\Pi^* = \delta(W_p^* - L^*) = 0 \, , \qquad (13)$$

gdzie: $W^*_p = \int_V \Phi^*(\{\sigma\})dV$ ,

$$L^{*} = \int_{\Sigma_u} \left( [S]\{6\} \right)^T \{u^{0}\} \, dA$$

Dla ciał liniowo sprężystych zachodzi $\Phi^{*} = \Phi$ , /gęstość energii komplementarnej jest równa gęstości energii potencjalnej/. ■

Punktów stacjonarności funkcjonałów Lagrange'a czy Castigliano /lub Reissnera/ poszukuje się metodą Ritza, Fiłonienko-Borodicza , Galerkina-Pietrowa, Bubnowa-Galerkina, najmniejszych kwadratów lub Kantorowicza-Leibnitza.

Rozwiążmy na przykład pierwsze ZBTS metodą Ritza. W tym celu załóżmy, że wektor przemieszczenia dowolnego punktu ciała można wyrazić liniową kombinacją funkcji dopuszczalnych $\varphi(r)$ /funkcji Ritza/

$$u_i(r) = \varphi_{io}(r) + \sum_{(j)} \varphi_{ij}(r) \cdot a_j ,$$

gdzie $a_j$ są stałymi współczynnikami. Równanie (14) można zapisać w postaci macierzowej

$$\{u\} = [N]\{a\} .$$

Równania Cauchy'ego (4) przyjmą postać

$$\{\varepsilon\} = [R]\{a\} \quad , \quad \left( [R] = [D][N] \right) .$$

Stałe $\{a\}$ wyznaczymy z warunku stacjonarności funkcjonału Lagrange'a (12) , wiedząc że:

$$W_p = \int_V \Phi \, dV = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{6\} \, dV = \frac{1}{2}\int_V \{a\}^T [R]\{6\} \, dV ,$$

$$L = \int_V \varrho \{u\}^T \{X\} \, dV + \int \{u\}^T \{p\} \, d\Sigma = \int_V \varrho \{a\}^T [N]^T \{X\} \, dV +$$
$$+ \int_\Sigma \{a\}^T [N]^T \{p\} \, d\Sigma .$$

Różniczkując (12) po $\{a\}^T$ otrzymamy algebraiczne równanie macierzowe do wyznaczenia wektora $\{a\}$:

$$[k]\{a\} = \{F_V\} + \{F_\Sigma\} ,$$

gdzie:

$$[k] = \int_V [R]^T [E][R] \, dV ,$$

$$\{F_V\} = \int_V \varrho [N]^T \{X\} \, dV ,$$

$$\{F_\Sigma\} = \int_\Sigma [N]^T \{p\} \, d\Sigma . \quad ■$$

## 4. Podsumowanie

Przedstawione ujęcie równań kontynualnej teorii sprężystości w formie macierzowej stanowi usystematyzowanie i uzupełnienie reprezentacji macierzowej tych równań spotykanej w literaturze. Konsekwentne i spójne macierzowe sformułowanie podstawowych równań pozwoliło na otrzymanie rozwiązań ZBTS bez uciekania się do zapisu tensorowego. Zapis macierzowy ma ewidentną przewagę nad zapisem tensorowym, gdy stosujemy metody komputerowe obliczeń.

Zaproponowaną reprezentację macierzową da się rozszerzyć na całą Mechanikę Ciała Odkształcalnego.

## Literatura


[1] Piechnik S., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa/Kraków 1980.

[2] Pobiedrija B.E, Čisliennyje metody w teorii uprugosti i plastičnosti, Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta, Moskva 1981 .

[3] Shaw F.S., Virtual displacementes and analysis of structures, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 1972 .

[4] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972 .


## MATRIX FORMULATION OF BOUNDARY PROBLEM OF LINEAR THEORY OF ELASTICITY

### Summary


This work presents an matrix representation of equations of linear theory of elasticity. Methods of solving boundary problem of theory of elasticity has shown. One exampl is given.